Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Радченко, Хеджирование наименьшей вариации в модели со скачками в неслучайные моменты времени, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 608–618

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:57:54

Пример. Допустим, что U_j имеет нормальное распределение с параметрами a_j и σ_j^2 . Тогда правая часть неравенства в следствии 2 не превосходит величины $(2/\eta)[(\min_j \sigma_j)6\sqrt{2\pi}]^{-1}$.

Лемма 2. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые случайные величины, причем Y_j распределена равномерно на интервале (a_j, b_j) , $j = 1, \dots, n$.

Тогда сумма $Y_1 + \dots + Y_n$ имеет одновершинное распределение.

Доказательство следует из результата А. Винтнера (А. Wintner), цитированного в [4, с. 256], см. также [1, задачи 24 и 26, § 12, гл. V].

Теорема 1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины и плотность вероятности каждой из них входит в класс CU. Тогда плотность вероятности их суммы $S = X_1 + \dots + X_n$ является пределом конечных смесей одновершинных плотностей класса CU.

В доказательстве можно применить рассуждения, использованные в доказательстве теоремы Л. Шеппа [1, гл. V, между формулами (9.7) и (9.8)].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
2. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Односторонние устойчивые распределения и закон Бенфорда. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 178–184.
3. Куликова А. А., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. H.F.D. (H-Function Distribution) и закон Бенфорда. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 366–372.
4. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Reading, MA: Addison-Wesley, 1954.

Поступила в редакцию
15.XI.2005

© 2006 г.

РАДЧЕНКО В. Н.*

ХЕДЖИРОВАНИЕ НАИМЕНЬШЕЙ ВАРИАЦИИ В МОДЕЛИ СО СКАЧКАМИ В НЕСЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ¹⁾

Рассматривается модель, в которой цена акции управляется винеровским процессом и дополнительно имеет случайные изменения в некоторые заранее известные неслучайные моменты времени. Выводится в явном виде стратегия хеджирования наименьшей вариации для Европейского опциона колл. Вывод основан на разложении Фельмера–Швайцера функции платежа.

Ключевые слова и фразы: хеджирование наименьшей вариации, Европейский опцион колл, разложение Фельмера–Швайцера, модель цены акции со скачками, неслучайные моменты скачков, минимальная мартингальная мера.

* Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, кафедра математического анализа, ул. Владимирская, 60, 01033 Киев, Украина; e-mail: vradchenko@univ.kiev.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта (грант 1074615).

1. Введение. В данной работе рассматривается задача нахождения хеджирующей стратегии для Европейского опциона колл в одномерной модели с непрерывным временем. Предполагается, что дисконтированная цена акции $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ управляется винеровским процессом и, дополнительно к этому, имеет случайные скачки в некоторые заранее известные моменты времени.

Начиная с классической работы [1], в моделях со скачками обычно предполагалось, что скачки цены акции происходят в случайные моменты (например, в моменты, определяемые пуассоновским процессом). Однако в некоторых ситуациях момент возможного скачка неслучаен. Например, цена может измениться в период между окончанием торгов на бирже в один день и началом в следующий. Изменение может быть результатом встречи или заседания, дата которых известна заранее. Подобные случаи укладываются в рассматриваемую модель. При этом величина изменения может равняться нулю с положительной вероятностью.

Платежная функция H — это квадратично интегрируемая случайная величина, удовлетворяющая стандартному условию измеримости. В рассматриваемой модели рынок, вообще говоря, неполон. Платежная функция не обязательно достижима, и для данной H мы будем решать задачу:

$$\text{минимизировать } \mathbf{E} \left[H - V_0 - \int_0^T \vartheta_s dX_s \right]^2 \text{ среди всех стратегий } \vartheta \text{ и } V_0 \in \mathbf{R}. \quad (1.1)$$

Если V_0^H и ϑ^H дают решение указанной задачи, то V_0^H называем ценой платежной функции H , а ϑ^H — стратегией хеджирования наименьшей вариации.

В нашей модели X — это разрывный специальный семимартингал. Решение задачи (1.1) для семимартингалов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, в общем виде получено в [2]. Некоторые дополнительные результаты в этом направлении содержатся в [3] и [4]. Хеджирующая стратегия в [2] дана как решение стохастического уравнения, элементы которого находятся из разложения Фельмера–Швайцера

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^H dX_s + L_T^H,$$

где $H_0 \in \mathbf{R}$ и L^H — мартингал, ортогональный мартингальной составляющей X . Однако задача нахождения ξ_s^H в общем виде не решена. Заметим лишь, что в случае одномерного X возможный подход для вычисления ξ_s^H указан в [5] в доказательстве теоремы 10 и последующем замечании.

В данной работе мы покажем, что результаты [2] применимы к нашей модели. Для платежной функции вида $H = f(X_T)$, где $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная функция с не более чем полиномиальным ростом, будут найдены H_0 , ξ_t^H и L_t^H и получено решение задачи (1.1).

Следуя подходу работы [2], мы ищем хеджирующую стратегию, используя условное ожидание относительно минимальной мартингальной меры. Отметим, что другие подходы в нахождении стратегий в случае неполного рынка основаны на понятиях мартингальной меры с наименьшей энтропией (см. [6]), минимального риска (см. [7]–[9]).

2. Модель. Пусть заданы момент исполнения опциона $T > 0$ и множество действительных чисел $\{s_j: j = 1, \dots, N_T\}$, $0 < s_j < T$ (моменты скачков цены). Также будем считать, что $s_0 = 0$.

Пусть $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ — винеровский процесс, $(U_j)_{1 \leq j \leq N_T}$ — независимые случайные величины, $U_j \in (-1, +\infty)$. Предположим, что для всех $n \geq 1$ и j выполнено $\mathbf{E}U_j^n < +\infty$ и

$$\mathbf{E}U_j^2 > U_j \mathbf{E}U_j \quad \text{п.н.} \quad (2.1)$$

Все случайные величины и процессы считаются определенными на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Предположим, что σ -алгебры, порожденные значениями $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ и $(U_j)_{1 \leq j \leq N_T}$, независимы. Для $0 \leq t \leq T$ через $\mathcal{F}_t$ обозначим σ -алгебру, порожденную значениями $(W_s)_{0 \leq s \leq t}$ и $(U_j)_{j: 0 < s_j \leq t}$ и пополненную множествами нулевой вероятности из $\mathcal{F}$. Далее будем считать, что $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Через X_t обозначим *дисконтированную* цену акции (рискового актива) в момент t , $X_0 \in \mathbf{R}$, $X_0 > 0$. Также предполагаем, что имеется нерисковый актив (облигации). Считаем, что процесс (X_t) удовлетворяет уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_{s-} (\mu ds + \sigma dW_s) + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} X_{s_j-} U_j, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

где $\mu \geq 0$ и $\sigma > 0$ — константы. Отсюда имеем, что

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\} \prod_{j: 0 < s_j \leq t} (1 + U_j), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Тогда (X_t) — квадратично интегрируемый семимартингал и имеет место представление $X_t = X_0 + M_t + A_t$, где

$$M_t = \sigma \int_0^t X_{s-} dW_s + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} X_{s_j-} (U_j - \mathbf{E}U_j) \quad (2.4)$$

— мартингал, а

$$A_t = \mu \int_0^t X_{s-} ds + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} X_{s_j-} \mathbf{E}U_j$$

— предсказуемый процесс ограниченной вариации.

Из (2.4) мы находим предсказуемую квадратическую вариацию:

$$\langle M \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t X_{s-}^2 ds + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} X_{s_j-}^2 \mathbf{D}U_j.$$

Следуя [2], обозначим $\alpha_t = dA_t/d\langle M \rangle_t$. Тогда

$$\alpha_t = \frac{\mu}{X_t - \sigma^2} \quad \text{для } t \notin \bigcup_j \{s_j\}, \quad \alpha_{s_j} = \frac{\mathbf{E}U_j}{X_{s_j-} \mathbf{D}U_j} \quad \text{для } 1 \leq j \leq N_T.$$

Пусть $(N_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T}$ и $(N_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T}$ — квадратично интегрируемые мартингалы такие, что $N_0^{(1)} = N_0^{(2)} = 0$ п.н. Напомним, что $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$ называются *сильно ортогональными*, если $(N_t^{(1)} N_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T}$ — равномерно интегрируемый мартингал.

Следующие два определения согласуются с соответствующими определениями в [2] и [10].

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество $L^2(M)$ — это множество предсказуемых процессов $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ со значениями в $\mathbf{R}$ таких, что процесс $(\int_0^t \theta_s^2 d\langle M \rangle_s)_{0 \leq t \leq T}$ интегрируем. Множество $L^2(A)$ — это множество предсказуемых процессов $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ со значениями в $\mathbf{R}$ таких, что процесс $(\int_0^t |\theta_s \alpha_s| d\langle M \rangle_s)_{0 \leq t \leq T}$ квадратично интегрируем. Также положим $\Theta = L^2(M) \cap L^2(A)$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Разложением Фёльмера–Швайцера случайной величины $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется представление

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^H dX_s + L_T^H, \quad (2.5)$$

где H_0 — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина, $(\xi_t^H)_{0 \leq t \leq T} \in \Theta$, $L_0^H = 0$ п.н. и $(L_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ — квадратично интегрируемый мартингал, сильно ортогональный $\int \theta dM$ для всех $\theta \in L^2(M)$.

Если выполняется (2.5), то для H будем рассматривать *внутренний процесс стоимости*

$$V_t^H = H_0 + \int_0^t \xi_s^H dX_s + L_t^H, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Процесс

$$\hat{K}_t = \int_0^t \alpha_s^2 d\langle M \rangle_s = \frac{\mu^2}{\sigma^2} t + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \frac{(\mathbf{E}U_j)^2}{\mathbf{D}U_j}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

является ограниченным. Таким образом, выполнено условие (SC) работы [2], и из теоремы 3.4 [10] мы получаем существование и единственность разложения Фельмера-Швайцера для любой $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Кроме того, процесс

$$\tilde{K}_t = \int_0^t \frac{\alpha_s^2}{1 + \sum_{j: 0 < s_j \leq s} (\mathbf{E}U_j)^2 (\mathbf{D}U_j)^{-1} 1_{\{s_j\}}(s)} d\langle M \rangle_s = \frac{\mu^2}{\sigma^2} t + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \frac{(\mathbf{E}U_j)^2}{\mathbf{E}U_j^2}$$

будет детерминированным. Значит, выполняются условия теоремы 3 [2] и следствия 10 [2]. Пусть для платежной функции H имеет место разложение (2.5). Тогда следствие 10 [2] утверждает, что решение задачи

$$\text{минимизировать } \mathbf{E} \left[H - V_0 - \int_0^T \vartheta_s dX_s \right]^2 \text{ по всем } (V_0, \vartheta) \in \mathbf{R} \times \Theta \quad (2.6)$$

дается парой $(H_0, \xi^{(H_0)})$, где стратегия $\xi^{(H_0)}$ удовлетворяет уравнению (2.2) [2]. Такое H_0 будем называть *ценой платежной функции H* и будем говорить, что $\xi^{(H_0)}$ реализует *самофинансируемую стратегию хеджирования наименьшей вариации* для данной H .

В то же время не ясно, как найти все элементы уравнения (2.2) [2]. В данной работе будет получено в явном виде решение задачи (2.6) для модели (2.2)–(2.3).

Вывод элементов разложения Фельмера-Швайцера будет основан на значении плотности минимальной мартингальной меры. Следующее понятие было введено в [11].

О п р е д е л е н и е 2.3. Вероятность $\hat{\mathbf{P}}$ называется *минимальной мартингальной мерой*, если

1) $\hat{\mathbf{P}}$ эквивалентна $\mathbf{P}$,

2) $\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$,

3) $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ является мартингалом относительно $\hat{\mathbf{P}}$,

4) любой квадратично интегрируемый $\mathbf{P}$ -мартингал, сильно ортогональный M относительно $\mathbf{P}$, остается мартингалом относительно $\hat{\mathbf{P}}$.

Мы будем рассматривать стохастическую экспоненту

$$\hat{Z}_t = \mathcal{E} \left(- \int_0^t \alpha_s dM_s \right) = \exp \left\{ - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t - \frac{\mu}{\sigma} W_t \right\} \prod_{j: 0 < s_j \leq t} \frac{\mathbf{E}U_j^2 - U_j \mathbf{E}U_j}{\mathbf{D}U_j}.$$

Условие (2.1) дает, что $\hat{Z}_T > 0$ п.н. Из леммы 17 [2] следует, что мера $\hat{\mathbf{P}}$, определяемая соотношением $d\hat{\mathbf{P}} = \hat{Z}_T d\mathbf{P}$, будет минимальной мартингальной мерой для нашего процесса цены (X_t) . В дальнейшем через $\hat{\mathbf{E}}$ мы будем обозначать математическое ожидание относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$.

Также из леммы 17 [2] мы получаем равенства для цены H_0 и внутреннего процесса стоимости V_t^H :

$$H_0 = \hat{\mathbf{E}}H, \quad V_t^H = \hat{\mathbf{E}}[H | \mathcal{F}_t]. \quad (2.7)$$

В частности, $\hat{\mathbf{P}}$ будет эквивалентной мартингальной мерой для X . Следовательно, наша модель рынка свободна от арбитража (см., например, [12, теорема VII.2а.2]).

Дадим небольшой комментарий к условию (2.1). Если $\mathbf{E}U_j > 0$, то из (2.1) следует, что U_j ограничены п.н. и условие $\mathbf{E}U_j^n < +\infty$ выполняется автоматически. Например, (2.1) выполняется, если для некоторых $a > 0 > b > -1$ мы имеем

$$\mathbf{P}\{U_j = a\} > 0, \quad \mathbf{P}\{U_j = b\} > 0, \quad \mathbf{P}\{U_j = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{U_j = a\} - \mathbf{P}\{U_j = b\}.$$

Также (2.1) будет верно для любой $U_j \in (-1, +\infty)$ такой, что $-\mathbf{E}U_j^2 < \mathbf{E}U_j \leq 0$.

3. Вывод разложения Фёльмера–Швайцера. В дальнейшем мы будем рассматривать платежную функцию вида $H = f(X_T)$, где $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная функция с не более чем полиномиальным ростом. Заметим, что при наших предположениях $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Мы будем искать разложение

$$V_t^H = H_0 + \int_0^t \xi_s^H dX_s + L_t^H, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где H_0 , ξ^H и L_t^H удовлетворяют условиям определения 2.2. В дальнейшем мы будем считать H фиксированной и обычно опускать верхний индекс H в записи.

Случайные величины $\hat{Z}_T/\hat{Z}_t$ и X_t независимы, поэтому

$$V_t = \widehat{\mathbf{E}}[f(X_T) | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}\left[f(X_T) \frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_t} \middle| \mathcal{F}_t\right] = F(t, X_t),$$

где

$$\begin{aligned} F(t, x) = & \mathbf{E}\left[f\left(x \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right\}\right) \prod_{j: t < s_j < T} (1 + U_j)\right] \\ & \times \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}(T-t) - \frac{\mu}{\sigma}(W_T - W_t)\right\} \prod_{j: t < s_j < T} \frac{\mathbf{E}U_j^2 - U_j\mathbf{E}U_j}{\mathbf{D}U_j}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Имеем

$$V_t = V_0 + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} (V_{s_j-} - V_{s_{j-1}}) + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} (V_{s_j} - V_{s_j-}) + (V_t - V_{s_k}),$$

где $s_k = \max\{s_j: s_j \leq t\}$.

Рассмотрим слагаемое

$$V_{s_j-} - V_{s_{j-1}} = F(s_{j-}, X_{s_{j-}}) - F(s_{j-1}, X_{s_{j-1}}).$$

Для $1 \leq j \leq N_T + 1$ положим

$$g_j(x) = \mathbf{E}\left[f\left(x \prod_{i: i \geq j} (1 + U_i)\right) \prod_{i: i \geq j} \frac{\mathbf{E}U_i^2 - U_i\mathbf{E}U_i}{\mathbf{D}U_i}\right], \quad x \in \mathbf{R}$$

(для $j = N_T + 1$ записанные здесь произведения пропадают и $g_{N_T+1}(x) = f(x)$). Тогда $g_j(x)$ непрерывна и имеет не более чем полиномиальный рост.

Далее, введем функцию

$$\begin{aligned} F_j(t, x) = & \mathbf{E}\left[g_j\left(x \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right\}\right)\right. \\ & \left. \times \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}(T-t) - \frac{\mu}{\sigma}(W_T - W_t)\right\}\right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Известно, что $F_j(t, x)$ принадлежит $C^{1,2}([0, T] \times \mathbf{R})$ и является решением задачи

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2} = 0, \quad F_j(T, x) = g_j(x) \quad (3.3)$$

(см., например, в [13] следствие 5.1.3 и равенство (5.46) для $r = 0$).

Из независимости $(W_i)_{0 \leq t \leq T}$ и $(U_j)_{1 \leq j \leq N_T}$ следует, что

$$\begin{aligned} F(t, x) &= F_j(t, x) & \text{для } t \in [s_{j-1}, s_j], \\ F(t, x) &= F_{N_T+1}(t, x) & \text{для } t \geq s_{N_T}, \end{aligned} \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.4)$$

Стандартными преобразованиями с использованием формулы Ито, (3.3) и (3.4) мы получаем

$$V_{s_j-} - V_{s_{j-1}} = F(s_j-, X_{s_j-}) - F(s_{j-1}, X_{s_{j-1}}) = \int_{s_{j-1}}^{s_j-} \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_{s-}) dX_s.$$

Аналогичным образом имеем

$$V_t - V_{s_k} = \int_{s_k}^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_{s-}) dX_s.$$

Используя (3.2), мы можем записать $F_j(t, x)$ как интеграл с плотностью распределения случайной величины $W_T - W_t$ и, учитывая полиномиальный рост g_j , легко получить, что для всех j

$$\mathbf{E} \left[\int_{s_{j-1}}^{s_j-} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_{s-}) \right)^2 d\langle M \rangle_s \right] < \infty \quad (3.5)$$

(совершенно аналогичные рассуждения проводятся для классической модели Блэка–Шоулса).

Так мы получаем процесс

$$\xi_t^{(c)} = \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_{t-}), \quad (3.6)$$

соответствующий слагаемым $\sum_{j: 0 < s_j \leq t} (V_{s_j-} - V_{s_{j-1}}) + (V_t - V_{s_k})$. Далее мы рассмотрим часть $\sum_{j: 0 < s_j \leq t} (V_{s_j} - V_{s_{j-1}})$. Будем искать представление

$$V_{s_j} - V_{s_{j-1}} = \xi_{s_j} X_{s_j-} U_j + \Delta L_{s_j}, \quad (3.7)$$

где ξ_{s_j} $\mathcal{F}_{s_{j-1}}$ -измерима и

$$L_t = \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \Delta L_{s_j} \quad (3.8)$$

является мартингалом, сильно ортогональным $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Умножим обе части (3.7) на $\Delta M_{s_j} = X_{s_j-}(U_j - \mathbf{E}U_j)$, возьмем условные математические ожидания относительно $\mathcal{F}_{s_{j-1}}$ и предположим ортогональность ΔL_{s_j} и ΔM_{s_j} . Таким образом мы получим

$$\xi_{s_j} = \frac{1}{X_{s_j-}} \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_{s_j}} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{\mathbf{D}U_j} \middle| \mathcal{F}_{s_{j-1}} \right), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_{s_j} &= \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_{s_j} \right) - \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_{s_{j-1}}} \middle| \mathcal{F}_{s_{j-1}} \right) \\ &\quad - U_j \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\hat{Z}_T}{\hat{Z}_{s_j}} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{\mathbf{D}U_j} \middle| \mathcal{F}_{s_{j-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Легко можно проверить, что

$$\mathbf{E}(\Delta L_{s_j} X_{s_j-} (U_j - \mathbf{E}U_j) | \mathcal{F}_{s_{j-1}}) = 0 \quad \text{п.н.}, \quad \mathbf{E}(\Delta L_{s_j} | \mathcal{F}_{s_{j-1}}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Значит, L и M сильно ортогональны.

Собирая вместе равенства (3.6), (3.8), (3.9) и (3.10), мы получим следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть дисконтированная цена акции $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ удовлетворяет условиям модели (2.2)–(2.3), $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная функция с не более

чем полиномиальным ростом. Тогда элементы ξ_t^H и L_t^H разложения Фёлмера-Швайцера (2.5) платежной функции $H = f(X_T)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}\xi_t^H &= \xi_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_{t-}) 1_{\{(0, T] \setminus \cup_j s_j\}}(t) \\ &+ \sum_{j: 0 < s_j < T} \frac{1}{X_{s_j-}} \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{Z}_{s_j}} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{\mathbf{D}U_j} \middle| \mathcal{F}_{s_j-} \right) 1_{\{s_j\}}(t), \\ L_t^H &= L_t = \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \left[\mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{Z}_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_{s_j} \right) - \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{Z}_{s_j-}} \middle| \mathcal{F}_{s_j-} \right) \right. \\ &\quad \left. - U_j \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{Z}_{s_j}} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{\mathbf{D}U_j} \middle| \mathcal{F}_{s_j-} \right) \right],\end{aligned}\quad (3.11)$$

где F задана формулой (3.1).

Элемент H_0 (цена H) определяется равенством (2.7).

Из (3.5) следует, что $(\xi_t^H)_{0 \leq t \leq T} \in \Theta$. Напомним, что функция $F(t, x)$ может быть получена из уравнений (3.3) с учетом (3.4).

З а м е ч а н и е 3.1. Платежная функция $H = f(X_T)$ достижима тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, \dots, N_T$

$$\begin{aligned}\Delta L_{s_j} = 0 \text{ п.н.} &\iff \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{Z}_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_{s_j} \right) - \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{Z}_{s_j-}} \middle| \mathcal{F}_{s_j-} \right) \\ &- U_j \mathbf{E} \left(f(X_T) \frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{Z}_{s_j}} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{\mathbf{D}U_j} \middle| \mathcal{F}_{s_j-} \right) = 0 \text{ п.н.}\end{aligned}\quad (3.12)$$

4. Вывод стратегии хеджирования. Уравнение (2.2) [2] для нашей модели будет иметь вид

$$\xi_t^{(H_0)} = \xi_t + \frac{\alpha_t}{1 + \alpha_t^2 \Delta \langle M \rangle_t} \left(\int_0^{t-} \xi_s dX_s - \int_0^{t-} \xi_s^{(H_0)} dX_s + L_{t-} \right), \quad 0 < t \leq T.$$

В случае достижимой H мы имеем $L_t = 0$ и $\xi_t^{(H_0)} = \xi_t$.

Обозначив $\eta_t = \xi_t^{(H_0)} - \xi_t$ и положив $\eta_0 = 0$, получим отсюда равенство

$$\eta_t = \frac{\alpha_t}{1 + \alpha_t^2 \Delta \langle M \rangle_t} \left(L_{t-} - \int_0^{t-} \eta_s dX_s \right). \quad (4.1)$$

Далее, введем обозначение $\tilde{\eta}_t = \eta_t(1 + \alpha_t^2 \Delta \langle M \rangle_t)/\alpha_t$. Имеем

$$\tilde{\eta}_t = \frac{\eta_t X_{t-} \sigma^2}{\mu} \quad \text{для } t \notin \bigcup_j \{s_j\}, \quad \tilde{\eta}_{s_j} = \frac{\eta_{s_j} X_{s_j-} \mathbf{E}U_j^2}{\mathbf{E}U_j}.$$

Из (2.2) и (4.1) получим

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t &= L_{t-} - \int_0^{t-} \eta_s X_{s-} (\mu ds + \sigma dW_s) - \sum_{j: 0 < s_j < t} \eta_{s_j} X_{s_j-} U_j \\ &= L_{t-} - \int_0^{t-} \tilde{\eta}_s \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} ds + \frac{\mu}{\sigma} dW_s \right) - \sum_{j: 0 < s_j < t} \tilde{\eta}_{s_j} \frac{U_j \mathbf{E}U_j}{\mathbf{E}U_j^2} = L_{t-} + \int_0^{t-} \tilde{\eta}_s dY_s,\end{aligned}$$

где

$$Y_t = -\frac{\mu^2}{\sigma^2} t - \frac{\mu}{\sigma} W_t - \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \frac{U_j \mathbf{E}U_j}{\mathbf{E}U_j^2}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}(Y)_t$ стохастическую экспоненту процесса Y_t с $\mathcal{E}(Y)_0 = 1$. Тогда $d\mathcal{E}(Y)_t = \mathcal{E}(Y)_{t-} dY_t$ [14, теорема 13.5]). Для непрерывного справа процесса $\hat{\eta}_t = \tilde{\eta}_{t+}$ имеем уравнение

$$\hat{\eta}_t = L_t + \int_0^t \hat{\eta}_{s-} dY_s. \quad (4.2)$$

Теорема 14.6 [14] дает существование и единственность решения уравнения (4.2). Мы будем искать это решение в виде $\hat{\eta}_t = \zeta_t \mathcal{E}(Y)_t$, где $\zeta_t = \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \gamma_j$ — неизвестный непрерывный справа процесс, γ_j — $\mathcal{F}_{s_j}$ -измеримые случайные величины.

Стандартными преобразованиями, используя формулу Ито, мы получаем $\gamma_j = \Delta L_{s_j} / \mathcal{E}(Y)_{s_j}$. Таким образом,

$$\tilde{\eta}_t = \hat{\eta}_{t-} = \zeta_{t-} \mathcal{E}(Y)_{t-} = \mathcal{E}(Y)_{t-} \sum_{j: 0 < s_j < t} \frac{\Delta L_{s_j}}{\mathcal{E}(Y)_{s_j}}. \quad (4.3)$$

Из всех проведенных выше рассуждений мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда количество акций в стратегии хеджирования наименьшей вариации в модели (2.2)–(2.3) определяется формулой

$$\xi_t^{(H_0)} = \xi_t + \frac{\tilde{\eta}_t}{X_{t-}} \left(\frac{\mu}{\sigma^2} 1_{\{(0, T] \setminus \cup_j s_j\}}(t) + \sum_{j: 0 < s_j < T} \frac{EU_j}{EU_j^2} 1_{\{s_j\}}(t) \right),$$

где ξ_t определяется равенством (3.11), а $\tilde{\eta}_t$ — равенством (4.3).

Цена платежной функции H в хеджировании наименьшей вариации определяется формулой (2.7).

Напомним, что $\xi_t^{(H_0)}$ равно количеству акций ценой X_t у инвестора в момент t . Тогда дисконтированная стоимость портфеля инвестора в момент t равна $V_t = H_0 + \int_0^t \xi_s^{(H_0)} dX_s$. Наша стратегия самофинансируемая, поэтому сумма, вложенная в нерисковые активы в момент t , будет равна $H_0 + \int_0^t \xi_s^{(H_0)} dX_s - \xi_t^{(H_0)} X_t$.

5. Сравнение с моделью с дискретным временем. Теперь мы рассмотрим случай $\mu = \sigma = 0$, при котором цена акции может лишь скачкообразно меняться в конечном множестве моментов s_j , как и в модели с дискретным временем. Отметим, что хеджирование наименьшей вариации в случае дискретного времени было рассмотрено в [15] и [16]. В этих работах были получены рекуррентные формулы для вычисления стратегии. В данном пункте мы выпишем явные формулы хеджирования, полученные с помощью нашего подхода, и покажем связь между достижимостью в нашей модели (2.2)–(2.3) и в соответствующей модели с дискретным временем.

Будем рассматривать вместе две модели. Первой из них будет модель (2.2)–(2.3) с некоторыми фиксированными $\mu \geq 0$ и $\sigma > 0$. Вторую мы получим из модели (2.2)–(2.3), положив $\mu = \sigma = 0$ и оставив без изменения s_j и распределения величин U_j . Обозначим через X_t^U дисконтированную цену акции во второй модели, $X_0^U \in \mathbb{R}$, $X_0^U > 0$. Имеем

$$X_t^U = X_0^U + \sum_{j: 0 < s_j \leq t} X_{s_j-}^U U_j, \quad (5.1)$$

$$X_t^U = X_0^U \prod_{j: 0 < s_j \leq t} (1 + U_j). \quad (5.2)$$

Через $\mathcal{F}_t^U$ обозначим σ -алгебру, порожденную величинами $(U_j)_{j: 0 < s_j \leq t}$, и через $\mathcal{F}_t^W$ — σ -алгебру, порожденную значениями $(W_s)_{0 \leq s \leq t}$. Также пополним эти σ -алгебры всеми множествами нулевой вероятности из $\mathcal{F}$.

Заметим, что изменение количества акций в портфеле на интервале $(s_{j-1}, s_j]$ в модели (5.1)–(5.2) не имеет никакого значения. Мы будем предполагать эти количества постоянными.

В модели (5.1)–(5.2) процесс цены акции также является квадратично интегрируемым семимартингалом. Легко получить, что в этом случае $\alpha_t = 0$ для $t \notin \bigcup_j \{s_j\}$, процесс

$$\hat{K}_t^U = \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \frac{(\mathbf{E}U_j)^2}{\mathbf{D}U_j}$$

ограничен, а процесс

$$\tilde{K}_t^U = \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \frac{(\mathbf{E}U_j)^2}{\mathbf{E}U_j^2}$$

детерминирован. Следовательно, условия теоремы 3 [2] и следствия 10 [2] выполняются, наш подход применим и в этой модели.

Рассмотрим платежную функцию $H = f(X_T^U)$, где также $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная функция с не более чем полиномиальным ростом. Мы можем сделать очевидные изменения в проведенных выше рассуждениях и получить формулы хеджирования наименьшей вариации.

Процессом плотности минимальной мартингальной меры в модели (5.1)–(5.2) будет

$$\hat{Z}_t^U = \prod_{j: 0 < s_j \leq t} \frac{\mathbf{E}U_j^2 - U_j \mathbf{E}U_j}{\mathbf{D}U_j}.$$

Цена платежной функции равна

$$H_0^U = \mathbf{E} \left[f \left(X_0^U \prod_{j: 0 < s_j < T} (1 + U_j) \right) \prod_{j: 0 < s_j < T} \frac{\mathbf{E}U_j^2 - U_j \mathbf{E}U_j}{\mathbf{D}U_j} \right]. \quad (5.3)$$

Элементами разложения Фельмера–Швайцера величины $H = f(X_T^U)$ будут

$$\begin{aligned} \xi_t^{HU} &= \sum_{j: 0 < s_j < T} \frac{1}{X_{s_j-}^U} \mathbf{E} \left(f(X_T^U) \frac{\hat{Z}_T^U}{\hat{Z}_{s_j}^U} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{\mathbf{D}U_j} \middle| \mathcal{F}_{s_j-}^U \right), \\ L_t^{HU} &= \sum_{j: 0 < s_j \leq t} \left[\mathbf{E} \left(f(X_T^U) \frac{\hat{Z}_T^U}{\hat{Z}_{s_j}^U} \middle| \mathcal{F}_{s_j}^U \right) - \mathbf{E} \left(f(X_T^U) \frac{\hat{Z}_T^U}{\hat{Z}_{s_j-}^U} \middle| \mathcal{F}_{s_j-}^U \right) \right. \\ &\quad \left. - U_j \mathbf{E} \left(f(X_T^U) \frac{\hat{Z}_T^U}{\hat{Z}_{s_j}^U} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{\mathbf{D}U_j} \middle| \mathcal{F}_{s_j-}^U \right) \right]. \end{aligned}$$

Количество акций в стратегии хеджирования наименьшей вариации равно

$$\xi_t^{(H_0)U} = \xi_t^{H(U)} + \frac{\hat{\eta}_{s_j}^U}{X_{s_j-}^U} \sum_{j: 0 < s_j < T} \frac{\mathbf{E}U_j}{\mathbf{E}U_j^2} 1_{(s_{j-1}, s_j]}(t),$$

где

$$\hat{\eta}_t^U = \mathcal{E}(Y^U)_{t-} \sum_{j: 0 < s_j < t} \frac{\Delta L_{s_j}^{H(U)}}{\mathcal{E}(Y^U)_{s_j}}, \quad Y_t^U = - \sum_{i: 0 < s_i \leq t} \frac{U_i \mathbf{E}U_i}{\mathbf{E}U_i^2}.$$

Залисанные здесь равенства согласуются с соответствующими формулами в [15] и [16]. H достижима, если $L_t^U = 0$.

Следующая теорема устанавливает связь между достижимостью в нашей модели (2.2)–(2.3) и в соответствующей модели с дискретным временем (5.1)–(5.2).

Теорема 5.1. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная функция с не более чем полиномиальным ростом. Предположим, что для любого $X_0^U \in \mathbf{R}$, $X_0^U > 0$, функция платежа $H = f(X_T^U)$ достижима в модели (5.1)–(5.2). Тогда для любых $X_0 \in \mathbf{R}$, $X_0^U > 0$, $\mu \geq 0$, $\sigma > 0$ функция платежа $H = f(X_T)$ достижима в модели (2.2)–(2.3) с теми же самыми распределениями величин U_j .

Доказательство. Предположим, что величины U_j , $1 \leq j \leq N_T$, и поток $\mathcal{F}_t^U$ определены на полном вероятностном пространстве $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \mathbf{P}^U)$, величины W_t , $0 \leq t \leq T$, и поток $\mathcal{F}_t^W$ определены на полном вероятностном пространстве $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbf{P}^W)$, $\Omega = \Omega^U \times \Omega^W$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^U \otimes \mathcal{F}_t^W$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^U \times \mathbf{P}^W$.

Из условия (3.12) следует, что в Ω^U для всех $X_0^U > 0$ и $1 \leq j \leq N_T$ имеет место

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(f(X_T^U) \frac{\hat{Z}_T^U}{\hat{Z}_{s_j}^U} \middle| \mathcal{F}_{s_j}^U \right) - \mathbf{E} \left(f(X_T^U) \frac{\hat{Z}_T^U}{\hat{Z}_{s_j-}^U} \middle| \mathcal{F}_{s_j-}^U \right) \\ & - U_j \mathbf{E} \left(f(X_T^U) \frac{\hat{Z}_T^U}{\hat{Z}_{s_j}^U} \frac{(U_j - \mathbf{E}U_j)}{DU_j} \middle| \mathcal{F}_{s_j-}^U \right) = 0 \quad \mathbf{P}^U\text{-п.н.} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Умножая обе части (5.4) на

$$\exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} (T - s_j) - \frac{\mu}{\sigma} (W_T - W_{s_j}) \right\},$$

получим

$$X_0^U = X_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right\},$$

где $X_0 > 0$ и процесс W_t определен на Ω^W . В полученном равенстве мы возьмем условное ожидание относительно $\mathcal{F}_{s_j}^W$ в Ω^W для каждого фиксированного $\omega^U \in \Omega^U$. Отметим, что $\mathcal{F}_{s_j}^W = \mathcal{F}_{s_j-}^W$. Очевидно, что для любой $\mathbf{P}$ -интегрируемой случайной величины $\eta = \eta(\omega^U, \omega^W)$, определенной на $\Omega = \Omega^U \times \Omega^W$, верно равенство

$$\mathbf{E}(\eta | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}^W [\mathbf{E}^U(\eta(\omega^U, \omega^W) | \mathcal{F}_t^U) | \mathcal{F}_t^W],$$

где верхние индексы показывают, в каком пространстве взяты математические ожидания. Условные ожидания $\mathbf{E}^U$ взяты для каждого фиксированного $\omega^W \in \Omega^W$, и условные ожидания $\mathbf{E}^W$ взяты для каждого фиксированного $\omega^U \in \Omega^U$. Таким образом, мы получим равенство (3.12) в Ω для каждого j и поэтому $f(X_T)$ достижима. Теорема 5.1 доказана.

Автор выражает признательность Мартине Целе-Цицольд за полезные обсуждения в процессе подготовки публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merton R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. — J. Financial Econom., 1976, v. 3, p. 125–144.
2. Schweizer M. Approximating random variables by stochastic integrals. — Ann. Probab., 1994, v. 22, № 3, p. 1536–1575.
3. Pham H., Rheinländer T., Schweizer M. Mean-variance hedging for continuous processes: New proofs and examples. — Finance Stoch., 1998, v. 2, № 2, p. 173–198.
4. Hou Ch., Karatzas I. Least-squares approximation of random variables by stochastic integrals. — Adv. Stud. Pure Math., 2004, v. 41, p. 141–166.
5. Ansel J.-P., Stricker C. Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer-Schweizer. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1992, v. 28, № 3, p. 375–392.
6. Mania M., Santacrose M., Tevzadze R. A semimartingale BSDE related to the minimal entropy martingale measure. — Finance Stoch., 2003, v. 7, № 3, p. 385–402.
7. Schweizer M. Option hedging for semimartingales. — Stochastic Process. Appl., 1991, v. 37, № 2, p. 339–363.
8. Ди Маззи Дж. Б., Кабанов Ю. М., Рунггальдер В. Й. Хеджирование опционов на акцию при среднеквадратичном критерии и марковских волатильностях. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 211–222.
9. Радченко В. М. Стратегія найменшого ризику для процесів зі стрибками. — Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, 2003, № 1–2, с. 55–68.

10. Monat P., Stricker C. Fölmer-Schweizer decomposition and mean-variance hedging for general claims. — Ann. Probab., 1995, v. 23, № 2, p. 605–628.
11. Föllmer H., Schweizer M. Hedging of contingent claims under incomplete information. — Applied Stochastic Analysis (London, 1989). Ed. by M.H.A. Davis and R. J. Elliott. Stochastics Monogr., v. 5. New York: Gordon and Breach, 1991, p. 389–414.
12. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2: Теория. М.: ФАЗИС, 1998, 544 с.
13. Musiela M., Rutkowski M. Martingale Methods in Financial Modelling. Berlin: Springer-Verlag, 1997, 512 p.
14. Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986, 352 с.
15. Schäl M. On quadratic cost criteria for option hedging. — Math. Oper. Res., 1994, v. 19, № 1, p. 121–131.
16. Schweizer M. Variance-optimal hedging in discrete time. — Math. Oper. Res., 1995, v. 20, № 1, p. 1–32.

Поступила в редакцию
19.VIII.2004

© 2006 г.

ТИМУШЕВ Д. А.*

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ МАТРИЦЫ¹⁾

Показано, что расстояние Колмогорова между спектральной функцией распределения $(n \times n)$ -матрицы из GUE и функцией распределения полукругового закона имеет стохастический порядок $O_p((\ln n)/n^{2/3})$.

Ключевые слова и фразы: случайная матрица, полукруговой закон, вигнеровский ансамбль, гауссовский унитарный ансамбль.

Рассмотрим вигнеровскую эрмитову случайную матрицу $\mathbf{W} = (w_{kj})$ размерности $n \times n$. По определению ансамбля Вигнера, элементы w_{kj} , $1 \leq k \leq j \leq n$, являются независимыми одинаково распределенными комплексными случайными величинами, с независимыми мнимыми и вещественными частями, причем $\mathbf{E}w_{kj} = 0$ и $\mathbf{E}|w_{kj}|^2 = \sigma^2$. Обозначим λ_j , $1 \leq j \leq n$, собственные числа матрицы $n^{-1/2}\mathbf{W}$, а $F_n(x) = n^{-1}\#\{j: \lambda_j \leq x\}$ спектральную функцию распределения матрицы $n^{-1/2}\mathbf{W}$. Пусть $G(x)$ — функция распределения полукругового закона с плотностью

$$G'(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \mathbf{I}_{\{|x| \leq 2\sigma\}}.$$

Нас будет интересовать скорость сходимости спектральной функции $F_n(x)$ к функции распределения $G(x)$ в метрике Колмогорова, а также в метриках пространств L_1 и L_2 , т.е. величины

$$\Delta_n^* := \sup_x |F_n(x) - G(x)|,$$

$$L_p(F_n, G) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - G(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p = 1, 2.$$

* Математический факультет, Сыктывкарский государственный университет, Октябрьский пр., 55, 167001 Сыктывкар, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке DFG-Forschergruppe FOR 399/1 и SFB 701 Universität Bielefeld.