Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Иванов, А. Н. Ширяев, О принципе дуальности для хеджирующих стратегий в диффузионных моделях, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 3, 417–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 06:39:32

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 56
Выпуск 3, 2011 год
июль, август, сентябрь

© 2011 г.

ИВАНОВ Р. В.*, ШИРЯЕВ А. Н.**

О ПРИНЦИПЕ ДУАЛЬНОСТИ ДЛЯ ХЕДЖИРУЮЩИХ СТРАТЕГИЙ В ДИФфуЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ

В теории расчетов опционов известный принцип дуальности утверждает, что расчет *рациональных* цен для опционов колл (опционов покупателя) может быть сведен к расчету рациональных цен для опционов пут (опционов продавца) в соответствующих *дуальных* моделях. В настоящей работе для диффузионных моделей рассматривается ряд опционов, для которых показывается, как задачу отыскания хеджирующих стратегий для опционов колл можно свести к задаче нахождения хеджирующих стратегий для опционов пут в дуальных моделях. Рассматриваются также опционы Магрэйба и некоторые экзотические опционы.

Ключевые слова и фразы: диффузионные модели, хеджирующие стратегии, принцип дуальности, опционы.

1. Введение. Следуя работе [25], рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий сущность *принципа дуальности*. Пусть собственник опциона колл имеет право купить доллары за евро по некоторой цене K . Это право, очевидно, эквивалентно праву продать евро за доллары по цене $K' = 1/K$. Таким образом, данный опцион колл совпадает с соответствующим опционом пут, и их цены определяют одна другую.

В свете вышеописанного примера, основной областью применения принципа дуальности являются задачи выражения цен одних финансовых инструментов через цены других. В работе [6] получены формулы «колл-пут»-дуальности для модели Блэка и Шоулса (см. [5]) и некоторых более общих диффузионных моделей. В [9] рассматривается двухфакторная диффузионная модель, а в [4] обсуждаются диффузионная и

*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, ул. Профсоюзная, 65, 117997 Москва, Россия; e-mail: roivanov@yahoo.com

**Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: albertsh@mi.ras.ru

диффузионная со скачками модели. В работе [41] установлены дуальные результаты для цен опционов с различными платежными функциями в диффузионной и диффузионной со скачками моделях. В [20] рассматриваются процессы Леви. Авторами [34], [13] получены дуальные результаты для опционов на зарубежных рынках, опционов на облигации и процентные ставки.

В случае опционов американского типа вместо «колл-пут»-паритета имеет место «колл-пут»-неравенство. В работе [7] «колл-пут»-неравенство доказывается для диффузионных моделей, в [11] рассмотрены американские опционы с функцией выплат общего вида, а в [20] те же результаты доказываются для процессов Леви. «Колл-пут»-дуальность для опционов американского типа получена методом отрицательной волатильности в работе [35].

Азиатские опционы (с плавающей и фиксированной ценами исполнения) рассматриваются в работах [27] и [43] для модели Блэка и Шоулса. В работе [14] результаты [27] распространены на процессы Леви. Кроме того, в [14] рассмотрены опционы с плавающей и фиксированной ценой исполнения, зависящие от траектории рискованного актива.

Сильным инструментом для получения дуальных результатов является *метод замены меры*. Ярким примером его использования является решение задачи о *русском* опционе. Замена меры в этом случае позволила перейти от задачи с двумя случайными процессами к задаче с одним процессом — см. работы [37], [38]. Подобный прием позволяет существенно упростить и численные расчеты. Одной из первых в данном направлении является работа [22].

В работах [44] и [45] метод замены меры использован для получения одномерного интегро-дифференциального уравнения для цен азиатских опционов в модели Блэка и Шоулса и общей семимартингальной модели. В [3] этот метод используется для получения уравнений для опционов, зависящих от траектории, в модели Блэка и Шоулса и диффузионной модели со скачками. В [15] методом замены меры рассчитываются степенные опционы, селф-кванто- и кванто-опционы для процессов Леви. Наконец, в работе [16] данный метод используется для расчетов различных опционов европейского и американского типа в общей семимартингальной модели.

Стоит также отметить работы [1] и [2], в которых дуальные соотношения для цен стандартных опционов американского типа на бесконечном временном интервале обобщаются на опционы на определенные функции от рискованного актива в диффузионной модели эволюции акции.

Однако, наряду с этим, почти полностью отсутствуют результаты относительно дуальности для хеджирующих стратегий. Можно лишь отметить работы [8], [4] и [19], в которых получены *статические* хеджирующие стратегии для различных *экзотических* финансовых инстру-

ментов с использованием стандартных европейских опционов в качестве хеджирующих инструментов.

В настоящей работе идея принципа дуальности используется для нахождения *динамических* хеджирующих стратегий. Рассматриваются различные опционы как европейского, так и американского типа. В качестве основной модели финансового рынка рассматривается диффузионная модель эволюции рискованного актива с ненулевыми процентной ставкой и дивидендами.

2. Модель.

2.1. Предположим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ порождается d -мерным винеровским процессом $(W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \leq T}$, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma((W_s^1, \dots, W_s^d), 0 \leq s \leq t)$. Пусть эволюция стохастического векторного процесса цен *акций* $(S^1, \dots, S^d) = ((S_t^1)_{t \leq T}, \dots, (S_t^d)_{t \leq T})$ покомпонентно задается уравнениями

$$S_t^i = \exp \left(\int_0^t \left(\mu_s^i - \frac{(\sigma_s^i)^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s^i dW_s^i \right), \quad t \leq T, \quad (2.1)$$

где детерминированный процесс $\mu^i = (\mu_t^i)_{t \leq T}$ и стохастический процесс $\sigma^i = (\sigma_t^i, \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ предполагаются удовлетворяющими условиям

$$\int_0^t |\mu_s^i| ds < \infty, \quad \int_0^t (\sigma_s^i)^2 ds < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}), \quad t \leq T. \quad (2.2)$$

Далее, пусть детерминированные процессы $r = (r_t)_{t \leq T}$ и $\delta^i = (\delta_t^i)_{t \leq T}$, $i = 1, \dots, d$, удовлетворяют условиям

$$\int_0^t |r_s| ds < \infty, \quad \int_0^t |\delta_s^i| ds < \infty, \quad t \leq T.$$

Будем считать, что процессы

$$D_t^i = \exp \left(\int_0^t \delta_s^i ds \right) \quad \text{и} \quad B_t = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) \quad (2.3)$$

определяют интенсивность выплаты *дивидендов* и эволюцию *банковского счета* соответственно. Кроме того, предполагаем, что

$$S_0^i = D_0^i = B_0 = 1.$$

Пусть

$$\mu_t^i = r_t - \delta_t^i, \quad t \leq T, \quad i = 1, \dots, d.$$

Основной нашей моделью будет модель с дивидендами. В рамках этой модели собственно капитал владельца акции S^i определяется процессом $D^i S^i = (D_t^i S_t^i)_{t \leq T}$, где

$$D_t^i S_t^i = S_t^i \exp \left(\int_0^t \delta_s^i ds \right). \quad (2.4)$$

При этом дисконтированная стоимость акции $D^i S^i/B = (D_t^i S_t^i/B_t)_{t \leq T}$ есть

$$\frac{D_t^i S_t^i}{B_t} = S_t^i \exp \left(\int_0^t (\delta_s^i - r_s) ds \right), \quad t \leq T. \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 2.1. В контексте зарубежных финансовых рынков δ^i может рассматриваться также как зарубежная процентная ставка.

2.2. По теореме 2 в [40, гл. VII, § 3g] процесс $D^i S^i/B$ относительно исходной меры $\mathbf{P}$ является локальным мартингалом. И согласно [40, гл. VII, § 4а, п. 5] мера $\mathbf{P}$ является единственной эквивалентной вероятностной мерой, относительно которой $D^i S^i/B$ — локальный мартингал.

Рассмотрим модель $(B, D^1 S^1, \dots, D^d S^d)$ финансового рынка. Аналогично [40, гл. VII, § 4а, формула (18)], будем говорить, что стратегия $\pi = (\beta, \gamma^1, \dots, \gamma^d)$ допустима, если ее компоненты $\beta = (\beta_t)_{t \leq T}$ и $\gamma^i = (\gamma_t^i)_{t \leq T}$, $i = 1, \dots, d$, являются процессами Ито относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ и выполнено условие

$$\int_0^T (\gamma_u^i \sigma_u^i)^2 du < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}), \quad i = 1, \dots, d.$$

Допустимая стратегия π называется *хеджирующей стратегией* для опциона европейского типа с $\mathcal{F}_T$ -измеримой функцией выплат f_T , если для некоторого начального капитала $x = \beta_0 + \sum_{i=1}^d \gamma_0^i$

$$X_T^{x, \pi} = \beta_T B_T + \sum_{i=1}^d \gamma_T^i (D^i S^i)_T \geq f_T \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \quad (2.6)$$

Хеджирующая стратегия с минимальным начальным капиталом x называется *минимальной хеджирующей стратегией*. В случае, когда в (2.6) достигается равенство, минимальная хеджирующая стратегия называется *реплицирующей* или *совершенным хеджем*.

Соответственно, для опциона американского типа с выплатами $f = (f_t)_{t \leq T}$ вместо (2.6) должно выполняться неравенство

$$X_\tau^{x, \pi} = \beta_\tau B_\tau + \sum_{i=1}^d \gamma_\tau^i (D^i S^i)_\tau \geq f_\tau \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}) \quad (2.7)$$

для всех моментов остановки $\tau \leq T$.

Исходя из формулы (27) в [40, гл. VII, § 1а], в рамках данной работы будем называть стратегию π *самофинансируемой*, если

$$d\beta_t + \sum_{i=1}^d \left(\frac{D_t^i S_t^i}{B_t} d\gamma_t^i + d \left\langle \left(\frac{D^i S^i}{B} \right)^c, (\gamma^i)^c \right\rangle_t \right) \leq 0 \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}), \quad (2.8)$$

где верхний индекс « c » указывает на взятие непрерывной мартингальной составляющей. В случае, когда в (2.8) выполнено равенство, будем

называть π *самофинансируемой без потребления*. Выполнение условия самофинансируемости означает, что поведение на финансовом рынке, определяемое такой стратегией, не подразумевает использование на всем периоде инвестирования каких-либо других средств, кроме начального капитала $\beta_0 + \sum_{i=1}^d \gamma_0^i$, и часть средств, возможно, будет сохранена. В случае самофинансируемой стратегии без потребления предполагается, что в течение периода хеджирования начальный капитал будет использован полностью.

С учетом вышесказанного, в множестве хеджирующих стратегий обычно в первую очередь ищут стратегии, являющиеся самофинансируемыми без потребления и реплицирующими. В случае отсутствия таковых — самофинансируемые минимальные хеджи. Также рассматриваются несамофинансируемые хеджирующие стратегии.

2.3. В дальнейшем для компонент хеджирующих стратегий мы используем обозначения, характеризующие конкретный опцион. Например, обозначение

$$\beta_t^c(S; K; r; \delta)$$

соответствует значению безрисковой компоненты хеджирующей стратегии для европейского опциона колл с ценой исполнения K на актив S с дивидендами δ на рынке с процентной ставкой r в момент t .

Во всем дальнейшем существенно предположение, что дисконтированный процесс стоимости акции $D^i S^i / B$, где i есть некоторое специально выбранное значение из множества $\{1, \dots, d\}$, является *мартингалом* относительно исходной вероятностной меры $\mathbf{P}$ (обозначение: $D^i S^i / B \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$). Тогда

$$\mathbf{E}\left(\frac{D^i S^i}{B}\right)_t = 1, \quad t \leq T,$$

и на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \leq T})$ мы можем определить новую вероятностную меру $\hat{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$ такую, что для каждого $t \leq T$ (с $\hat{\mathbf{P}}_t = \hat{\mathbf{P}} | \mathcal{F}_t$ и $\mathbf{P}_t = \mathbf{P} | \mathcal{F}_t$)

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{P}_t} = \left(\frac{D^i S^i}{B}\right)_t. \quad (2.9)$$

Пусть процесс $\hat{S}^i$ определяется как

$$\hat{S}^i = \frac{1}{S^i} \quad (2.10)$$

для некоторого $i \in \{1, \dots, d\}$.

Лемма 2.1. Если процесс $D^i S^i / B$ является $\mathbf{P}$ -мартингалом, то процесс $B\hat{S}^i / D^i$ есть $\hat{\mathbf{P}}$ -мартингал.

Доказательство. Согласно [16, лемма 3.2], $((D^i S^i / B)_t)_{t \leq T}$ является $\mathbf{P}_T$ -мартингалом для любого $T \geq 0$. Поэтому $B\hat{S}^i / D^i = ((B\hat{S}^i / D^i)_t)_{t \leq T}$ является $\hat{\mathbf{P}}$ -мартингалом.

3. Стандартные опционы европейского и американского типа.

3.1. Стандартные опционы европейского типа. Пусть, как было сказано в разделе 2, цена некоторого рискованного актива определяется стохастическим процессом $S = S^1$ (т.е. считается, что $d = 1$). Тогда функция выплат стандартного опциона колл европейского типа на этот актив есть

$$f_T = (S_T - K)^+, \quad T < \infty, \quad K > 0. \quad (3.1)$$

Соответственно, платежная функция стандартного опциона пут есть

$$f_T = (K - S_T)^+, \quad T < \infty, \quad K > 0. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. Пусть динамика изменения рыночной цены акции $S = S^1$ удовлетворяет уравнению (2.1), а параметры процесса выплаты дивидендов и изменения стоимости банковского счета — уравнениям (2.3). Предположим также, что процесс DS/B является мартингалом относительно меры $\mathbf{P}$. В этом случае самофинансируемый без потребления совершенный хедж (β^c, γ^c) для стандартного опциона колл европейского типа может быть вычислен через компоненты $\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p$ самофинансируемой без потребления реплицирующей стратегии для опциона пут на актив, динамика которого определяется процессом $\hat{S} = 1/S$ по формулам

$$\gamma_t^c(S; K; r; \delta) = K \hat{\beta}_t^p(\hat{K}; \hat{S}; \delta; r), \quad (3.3)$$

$$\beta_t^c(S; K; r; \delta) = K \hat{\gamma}_t^p(\hat{K}; \hat{S}; \delta; r), \quad (3.4)$$

где индексы « c » и « p » соответствуют опционам колл и пут, а $\hat{K} = 1/K$.

Доказательство. Согласно [40, гл. VII, § 4b, формулы (6), (7)], для рассматриваемого опциона колл существует реплицирующая стратегия (β^c, γ^c) и ее капитал $\mathbb{C}_t = \mathbb{C}_t(S; K; r; \delta)$ определяется формулой

$$\mathbb{C}_t = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) = \beta_t^c B_t + \gamma_t^c D_t S_t. \quad (3.5)$$

В то же время мы можем записать, что

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_t &= \mathbb{C}_t(S; K; r; \delta) = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) \\ &= \frac{D_t}{D_T} \mathbf{E}\left(\frac{S_T D_T B_t}{B_T S_t D_t} \frac{S_t (S_T - K)^+}{S_T} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= S_t \frac{D_t}{D_T} \hat{\mathbf{E}}((1 - K \hat{S}_T)^+ | \mathcal{F}_t) \\ &= K S_t \frac{D_t}{D_T} \hat{\mathbf{E}}((\hat{K} - \hat{S}_T)^+ | \mathcal{F}_t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\widehat{K} = 1/K$. Положим

$$\widehat{\mathbb{P}}_t = \frac{D_t}{D_T} \widehat{\mathbf{E}}\left((\widehat{K} - \widehat{S}_T)^+ \mid \mathcal{F}_t\right). \quad (3.7)$$

Поскольку относительно меры $\widehat{\mathbf{P}}$ процесс $B\widehat{S}/D = (B_t\widehat{S}_t/D_t)_{t \leq T}$ имеет дифференциал

$$d\left(\frac{B\widehat{S}}{D}\right)_t = -\sigma_t\left(\frac{B\widehat{S}}{D}\right)_t d\widehat{W}_t,$$

где $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t \leq T}$ — стандартное броуновское движение относительно $\widehat{\mathbf{P}}$, то по теореме о представлении (см. [40, гл. III, § 3с, теорема 2])

$$\frac{\widehat{\mathbb{P}}_t}{D_t} = \widehat{\mathbb{P}}_0 + \int_0^t \widehat{\gamma}_u^p d\left(\frac{B\widehat{S}}{D}\right)_u,$$

и если положить

$$\widehat{\beta}_t^p = \frac{\widehat{\mathbb{P}}_t - \widehat{\gamma}_t^p(B\widehat{S})_t}{D_t},$$

то найдем, что

$$\widehat{\mathbb{P}}_t = \widehat{\beta}_t^p D_t + \widehat{\gamma}_t^p(B\widehat{S})_t. \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что процесс $\widehat{\mathbb{P}}_t = \widehat{\mathbb{P}}_t(\widehat{K}; \widehat{S}; \delta; r)$ можно интерпретировать как процесс цены стандартного опциона пут на актив $\widehat{S}$ на рынке с банковским счетом D и дивидендами B , а $(\widehat{\beta}^p, \widehat{\gamma}^p)$ — как реплицирующую стратегию для него.

Сопоставляя формулы (3.5)–(3.8), получаем, что

$$\mathbb{C}_t = \beta_t^c B_t + \gamma_t^c D_t S_t = K \widehat{\beta}_t^p D_t S_t + K \widehat{\gamma}_t^p B_t, \quad (3.9)$$

откуда, вообще говоря, результат теоремы 3.1 напрямую еще не следует: необходимо проверить допустимость и самофинансируемость без потребления стратегии $(\beta^c, \gamma^c) = (K\widehat{\gamma}^p, K\widehat{\beta}^p)$.

Начнем с проверки того, что стратегия $(\beta^c, \gamma^c) = (K\widehat{\gamma}^p, K\widehat{\beta}^p)$ является допустимой. Для этого достаточно показать, что

$$\int_0^T (\widehat{\beta}_u^p \sigma_u)^2 du < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \quad (3.10)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\widehat{\beta}_u^p \sigma_u)^2 du &= \int_0^T \left(\left(\widehat{\mathbb{P}}_u - \widehat{\gamma}_u^p \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_u \right) \sigma_u \right)^2 du \\ &\leq 2 \int_0^T (\widehat{\mathbb{P}}_u \sigma_u)^2 du + 2 \int_0^T \left(\widehat{\gamma}_u^p \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_u \sigma_u \right)^2 du. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В силу условий (2.2) и квадратичной интегрируемости процесса $(\widehat{\mathbb{P}}_t)_{t \leq T}$ выполнено неравенство

$$\int_0^T (\widehat{\mathbb{P}}_u \sigma_u)^2 du < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \quad (3.12)$$

А поскольку стратегия $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ является допустимой для хеджирования дуального опциона, то

$$\int_0^T \left(\hat{\gamma}_u^p \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_u \sigma_u \right)^2 du < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \quad (3.13)$$

Условие (3.10) следует из (3.11)–(3.13).

Наконец, осталось проверить условие самофинансируемости без потребления стратегии $(\beta^c, \gamma^c) = (K\hat{\gamma}^p, K\hat{\beta}^p)$. Предположим, что относительно меры $\mathbf{P}$ процессы β^p и $\hat{\gamma}^p$ имеют дифференциалы Ито

$$d\hat{\beta}_t^p = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\widehat{W}_t, \quad (3.14)$$

$$d\hat{\gamma}_t^p = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\widehat{W}_t. \quad (3.15)$$

Поскольку стратегия $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ является самофинансируемой без потребления для опциона пут на актив $\widehat{S}$, для нее выполняется условие

$$d\hat{\beta}_t^p + \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_t d\hat{\gamma}_t^p + d \left\langle \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)^c, (\hat{\gamma}^p)^c \right\rangle_t = 0,$$

откуда получаем, что

$$\hat{\mu}_t^\beta + \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_t \hat{\mu}_t^\gamma - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\gamma \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_t = 0, \quad (3.16)$$

$$\hat{\sigma}_t^\beta + \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma = 0. \quad (3.17)$$

Чтобы доказать, что стратегия $(K\hat{\gamma}^p, K\hat{\beta}^p)$ является самофинансируемой без потребления, необходимо проверить условие

$$d\hat{\gamma}_t^p + \left(\frac{DS}{B} \right)_t d\hat{\beta}_t^p + d \left\langle \left(\frac{DS}{B} \right)^c, (\hat{\beta}^p)^c \right\rangle_t = 0. \quad (3.18)$$

Поскольку относительно меры $\mathbf{P}$

$$d\hat{\beta}_t^p = (\hat{\mu}_t^\beta - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\beta) dt + \hat{\sigma}_t^\beta dW_t$$

и

$$d\hat{\gamma}_t^p = (\hat{\mu}_t^\gamma - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\gamma) dt + \hat{\sigma}_t^\gamma dW_t,$$

то условие (3.18) эквивалентно паре условий

$$(\hat{\mu}_t^\gamma - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\gamma) + \left(\frac{DS}{B} \right)_t (\hat{\mu}_t^\beta - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\beta) + \left(\frac{DS}{B} \right)_t \sigma_t \hat{\sigma}_t^\beta = 0$$

и

$$\hat{\sigma}_t^\gamma + \left(\frac{DS}{B} \right)_t \hat{\sigma}_t^\beta = 0,$$

которые, как нетрудно видеть, следуют из (3.16) и (3.17). Теорема 3.1 доказана.

3.2. Стандартные опционы американского типа с дисконтированием. Функции выплат стандартных опционов колл и пут американского типа с дисконтированием определяются формулами

$$f_t = e^{-\lambda t} (S_t - K)^+, \quad t \leq T < \infty, \quad K > 0, \quad \lambda \geq 0, \quad (3.19)$$

и

$$f_t = e^{-\lambda t} (K - S_t)^+, \quad t \leq T < \infty, \quad K > 0, \quad \lambda \geq 0, \quad (3.20)$$

соответственно.

Теорема 3.2. Рассмотрим модель (2.1)–(2.3) в предположении, что процесс DS/B является $\mathbf{P}$ -мартингалом. В этом случае компоненты минимальной хеджирующей самофинансируемой стратегии для стандартного опциона колл американского типа с дисконтированием могут быть вычислены через компоненты минимального самофинансируемого хеджа $(\hat{\beta}^{ap}, \hat{\gamma}^{ap})$ для стандартного опциона пут американского типа по формулам

$$\gamma_t^{ac}(S; K; r; \delta; \lambda) = K \hat{\beta}_t^{ap}(\widehat{K}; \widehat{S}; \delta; r; \lambda), \quad (3.21)$$

$$\beta_t^{ac}(S; K; r; \delta; \lambda) = K \hat{\gamma}_t^{ap}(\widehat{K}; \widehat{S}; \delta; r; \lambda). \quad (3.22)$$

Доказательство. Согласно [40, гл. VIII, § 3а] или [36, гл. I, § 2], текущие цены $\mathbb{C}_t^a$, $t \leq T$, американского опциона колл задаются формулами

$$\mathbb{C}_t^a = \mathbb{C}_t^a(S; K; r; \delta; \lambda) = B_t \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \mathbf{E} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{(S_\tau - K)^+}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

где $\mathcal{M}_t^T$ — множество моментов остановки τ таких, что $t \leq \tau \leq T$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_t^a &= B_t \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \mathbf{E} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{(S_\tau - K)^+}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t D_t \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \mathbf{E} \left(\frac{S_T D_T}{B_T} \frac{B_t}{S_t D_t} e^{-\lambda \tau} \frac{(S_\tau - K)^+}{B_\tau} \left(\frac{B \widehat{S}}{D} \right)_T \middle| \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_t D_t \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \widehat{\mathbf{E}} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{(S_\tau - K)^+}{B_\tau} \widehat{\mathbf{E}} \left(\left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_T \middle| \mathcal{F}_\tau \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= K S_t D_t \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \widehat{\mathbf{E}} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{(\widehat{K} - \widehat{S}_\tau)^+}{D_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right), \quad t \leq T. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Положим

$$\widehat{\mathbb{P}}_t^a = D_t \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \widehat{\mathbf{E}} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{(\widehat{K} - \widehat{S}_\tau)^+}{D_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (3.24)$$

Дисконтированный процесс текущей цены дуального опциона, являясь супермартингалом, допускает разложение Дуба–Мейера

$$\frac{\widehat{\mathbb{P}}_t^a}{D_t} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \widehat{\mathbf{E}} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{(\widehat{K} - \widehat{S}_\tau)^+}{D_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \widehat{M}_t - \widehat{A}_t$$

с мартингалом $\widehat{M} = (\widehat{M}_t)_{t \leq T}$ и возрастающим неотрицательным предсказуемым процессом $\widehat{A} = (\widehat{A}_t)_{t \leq T}$. Процесс $\widehat{M} = (\widehat{M}_t)_{t \leq T}$, являющийся броуновским мартингалом относительно $\widehat{\mathbf{P}}$, допускает представление

$$\widehat{M}_t = \widehat{M}_0 + \int_0^t \widehat{\gamma}_u^{ap} d \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_u,$$

и поэтому процесс $\widehat{\mathbb{P}}_t^a$ представим в виде

$$\widehat{\mathbb{P}}_t^a = \widehat{\beta}_t^{ap} D_t + \widehat{\gamma}_t^{ap} (B\widehat{S})_t, \quad (3.25)$$

где

$$d\widehat{\beta}_t^{ap} + \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_t d\widehat{\gamma}_t^{ap} + d \left\langle \left(\frac{B\widehat{S}}{D} \right)_t^c, (\widehat{\gamma}_t^{ap})^c \right\rangle_t = -d\widehat{A}_t \leq 0 \quad (3.26)$$

и $(\widehat{\beta}^{ap}, \widehat{\gamma}^{ap})$ — хедж с потреблением. Поскольку в силу (3.23), (3.24)

$$\mathbb{C}_t^a = K S_t \widehat{\mathbb{P}}_t^a = K \widehat{\beta}_t^{ap} (DS)_t + K \widehat{\gamma}_t^{ap} B_t, \quad (3.27)$$

мы получаем соотношения (3.21) и (3.22). Теперь необходимо проверить условия

$$\int_0^T (\widehat{\beta}_u^{ap} \sigma_u)^2 du < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}), \quad (3.28)$$

$$d\widehat{\gamma}_t^{ap} + \left(\frac{DS}{B} \right)_t d\widehat{\beta}_t^{ap} + d \left\langle \left(\frac{DS}{B} \right)_t^c, (\widehat{\beta}_t^{ap})^c \right\rangle_t \leq 0, \quad (3.29)$$

чтобы доказать, что стратегия $(\beta^{ac}, \gamma^{ac}) = (K\widehat{\gamma}^{ap}, K\widehat{\beta}^{ap})$ является допустимой самофинансируемой стратегией. Условие (3.28) проверяется так

же, как и (3.10). Предполагая, что относительно $\hat{\mathbf{P}}$ процессы $\hat{\beta}^{ap}$ и $\hat{\gamma}^{ap}$ имеют дифференциалы

$$d\hat{\beta}_t^{ap} = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\widehat{W}_t, \quad (3.30)$$

$$d\hat{\gamma}_t^{ap} = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\widehat{W}_t, \quad (3.31)$$

заметим, что условие (3.29) эквивалентно двум условиям

$$\begin{aligned} (\hat{\mu}_t^\gamma - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\gamma) + \left(\frac{DS}{B} \right)_t (\hat{\mu}_t^\beta - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\beta) + \left(\frac{DS}{B} \right)_t \sigma_t \hat{\sigma}_t^\beta &\leq 0, \\ \hat{\sigma}_t^\gamma + \left(\frac{DS}{B} \right)_t \hat{\sigma}_t^\beta &= 0, \end{aligned}$$

которые следуют из того, что $(\hat{\beta}^{ap}, \hat{\gamma}^{ap})$ — хеджирующая стратегия с потреблением для дуального опциона. Теорема 3.2 доказана.

З а м е ч а н и е 3.2. Как известно, в случае $r = \delta = \lambda = 0$ хеджирующие стратегии для стандартных американских и европейских опционов совпадают. Из (3.3)–(3.4) и (3.21)–(3.22), в частности, следует, что найденные дуальные портфели удовлетворяют этому условию.

4. Опционы Магрэйба.

4.1. Европейские опционы Магрэйба. В данном разделе рассматриваются опционы вида

$$f_T = (S_T^1 - S_T^2)^+,$$

где $S^1 = (S_t^1)_{t \leq T}$ и $S^2 = (S_t^2)_{t \leq T}$ — два рискованных актива.

Теорема 4.1. Пусть процессы S^1, S^2 удовлетворяют (2.1)–(2.3) с $\sigma^1, \delta^1, \sigma^2, \delta^2$ и винеровскими процессами W^1, W^2 с коэффициентом корреляции ρ . Предположим также, что локальный мартингал $D^1 S/B$ является мартингалом. Тогда самофинансируемым без потребления совершенным хеджем для опциона Магрэйба будет стратегия $(\gamma^{m1}, \gamma^{m2})$, компоненты которой определяются соотношениями

$$\gamma_t^{m1} = \hat{\beta}_t^p(1; \hat{S}; \delta^1; \delta^2), \quad \gamma_t^{m2} = \hat{\gamma}_t^p(1; \hat{S}; \delta^1; \delta^2),$$

где стратегия $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ является самофинансируемым без потребления совершенным хеджем для опциона пут с $K = 1$, дивидендами δ^2 и процентной ставкой δ^1 на акцию, динамика которой определяется процессом $\hat{S} = S^2/S^1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\mathbb{C}_t^M = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}((S_T^1 - S_T^2)^+ | \mathcal{F}_t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}_t^M &= \mathbb{C}_t^M(S^1; S^2; r; \delta) = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}(S_T^1(1 - \hat{S}_T)^+ | \mathcal{F}_t) \\
 &= \frac{D_t^1}{D_T^1} S_t^1 \mathbf{E}\left(\frac{S_T^1 D_T^1 / B_T}{S_t^1 D_t^1 / B_t} (1 - \hat{S}_T)^+ \mid \mathcal{F}_t\right) \\
 &= S_t^1 \frac{D_t^1}{D_T^1} \hat{\mathbf{E}}((1 - \hat{S}_T)^+ | \mathcal{F}_t),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где, согласно [17, следствие 4.5], предсказуемые характеристики $(\hat{B}_t, \hat{C}_t)$ процесса $\hat{H} = \ln \hat{S} = \ln(S^2/S^1)$ относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$ задаются формулами

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_t &= \int_0^t \left(\delta_s^1 - \delta_s^2 - \frac{(\sigma_s^1)^2}{2} - \frac{(\sigma_s^2)^2}{2} + \rho \sigma_s^1 \sigma_s^2 \right) ds, \\
 \hat{C}_t &= \int_0^t \left((\sigma_s^1)^2 - 2\rho \sigma_s^1 \sigma_s^2 + (\sigma_s^2)^2 \right) ds.
 \end{aligned}$$

При этом характеристическая функция $\varphi_{\hat{H}}$ процесса $\hat{H}$ относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$ имеет вид

$$\varphi_{\hat{H}}(\theta) = \exp\left(i\theta\hat{B} - \frac{1}{2}\theta\hat{C}\right).$$

По теореме 2 из [39, гл. II, § 12] процесс $D^2\hat{S}/D^1$ является броуновским локальным мартингалом относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$, и из (4.1) следует, что

$$\mathbb{C}_t^M = S_t \hat{\mathbb{P}}_t(1; \hat{S}; \delta^1; \delta^2) = S_t^1 \hat{\mathbb{P}}_t.$$

По теореме о представлении (см. [40, гл. III, § 3с, теорема 2]),

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{P}}_t &= \frac{D_t^1}{D_T^1} \hat{\mathbf{E}}((1 - \hat{S}_T)^+ | \mathcal{F}_t) = D_t^1 \left(\hat{\mathbb{P}}_0 + \int_0^t \hat{\gamma}_u^p d\left(\frac{D^2\hat{S}}{D^1}\right)_u \right) \\
 &= \hat{\beta}_t^p D_t^1 + \hat{\gamma}_t^p (D^2\hat{S})_t,
 \end{aligned}$$

и поэтому

$$\mathbb{C}_t^M = \hat{\beta}_t^p D_t^1 S_t^1 + \hat{\gamma}_t^p D_t^2 S_t^2 = \hat{\beta}_t^p (D^1 S^1)_t + \hat{\gamma}_t^p (D^2 S^2)_t.$$

Чтобы доказать, что стратегия $(\gamma^{m1}, \gamma^{m2}) = (\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ является самофинансируемой без потребления, необходимо проверить условие

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t d\hat{\beta}_t^p + d\left\langle \left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)^c, (\hat{\beta}^p)^c \right\rangle_t + \left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)_t d\hat{\gamma}_t^p \\
 + d\left\langle \left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)^c, (\hat{\gamma}^p)^c \right\rangle_t = 0.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Предположим, что относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$ компоненты стратегии $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ имеют дифференциалы

$$d\hat{\beta}_t^p = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\widehat{W}_t, \quad d\hat{\gamma}_t^p = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\widehat{W}_t.$$

Обозначим

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{(\sigma_t^1)^2 - 2\rho\sigma_t^1\sigma_t^2 + (\sigma_t^2)^2}. \quad (4.3)$$

Тогда относительно исходной меры

$$d\hat{\beta}_t^p = \hat{\mu}_t^\beta dt + \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\hat{\sigma}_t}(\sigma_t^2 dW_t^2 - \sigma_t^1 dW_t^1 + (\sigma_t^1)^2 dt - \rho\sigma_t^1\sigma_t^2 dt), \quad (4.4)$$

$$d\hat{\gamma}_t^p = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t}(\sigma_t^2 dW_t^2 - \sigma_t^1 dW_t^1 + (\sigma_t^1)^2 dt - \rho\sigma_t^1\sigma_t^2 dt). \quad (4.5)$$

Далее, условие самофинансируемости без потребления хеджа $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ для дуального опциона эквивалентно условиям

$$\hat{\sigma}_t^\beta + \left(\frac{D^2\widehat{S}}{D^1}\right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma = 0, \quad (4.6)$$

$$\hat{\mu}_t^\beta + \hat{\mu}_t^\gamma \left(\frac{D^2\widehat{S}}{D^1}\right)_t + \hat{\sigma}_t^\gamma \hat{\sigma}_t \left(\frac{D^2\widehat{S}}{D^1}\right)_t = 0. \quad (4.7)$$

Используя (4.4) и (4.5), нетрудно заметить, что (4.2) эквивалентно условиям

$$\left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t \hat{\sigma}_t^\beta + \left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma = 0 \quad (4.8)$$

и

$$\begin{aligned} & \left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t \hat{\mu}_t^\beta + \left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)_t \hat{\mu}_t^\gamma + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t} (\sigma_t^2)^2 \left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)_t \\ & - 2 \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t} \rho \sigma_t^1 \sigma_t^2 \left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)_t + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t} (\sigma_t^1)^2 \left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)_t = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Условие (4.8) непосредственно следует из (4.6). Условие (4.9) вытекает из (4.3), (4.6) и (4.7). Поэтому выполнено (4.2), и стратегия $(\gamma^{m1}, \gamma^{m2}) = (\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ является самофинансируемой без потребления. Допустимость стратегии $(\gamma^{m1}, \gamma^{m2})$ нетрудно получить аналогично (3.11)–(3.13).

4.2. Американские опционы Магрэйба. Функция выплат опциона Магрэйба американского типа имеет вид

$$f_t = e^{-\lambda t} (S_t^1 - S_t^2)^+, \quad \lambda \geq 0, \quad t \leq T.$$

Аналогично теоремам 3.2 и 4.1 может быть получен следующий результат.

Теорема 4.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.1. В этом случае минимальным самофинансируемым хеджем для опциона Магрэйба американского типа будет стратегия с компонентами*

$$\gamma_t^{am1} = \hat{\beta}_t^p(1; \hat{S}; \delta^1; \delta^2; \lambda), \quad \gamma_t^{am2} = \hat{\gamma}_t^p(1; \hat{S}; \delta^1; \delta^2; \lambda),$$

определяющими минимальную хеджирующую самофинансируемую стратегию для стандартного американского опциона пут.

5. Экзотические опционы.

5.1. Опционы европейского типа на степень актива. Опционы колл и пут данного вида имеют платежные функции

$$f_T = [(S_T - K)^+]^\alpha, \quad T < \infty, \quad K > 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad (5.1)$$

и

$$f_T = [(K - S_T)^+]^\alpha, \quad T < \infty, \quad K > 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad (5.2)$$

соответственно.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1 и при этом волатильность $\sigma = (\sigma_t)_{t \leq T}$ является детерминированной функцией. Тогда для европейского опциона колл на степень актива компоненты самофинансируемого без потребления совершенного хеджа (β^c, γ^c) вычисляются через компоненты самофинансируемой без потребления реплицирующей стратегии $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ для дуального опциона пут по формулам*

$$\begin{aligned} \beta_t^c &= K \left((2 - \alpha) M_t \hat{\gamma}_t^p(\hat{K}; \hat{S}; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta}) + (1 - \alpha) L_t \hat{\beta}_t^p(\hat{K}; \hat{S}; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta}) \right), \\ \gamma_t^c &= K \frac{\alpha L_t \hat{\beta}_t^p(\hat{K}; \hat{S}; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta}) + (\alpha - 1) M_t \hat{\gamma}_t^p(\hat{K}; \hat{S}; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta})}{(SD/B)_t}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{r} = \alpha \delta - (\alpha - 1)r + \frac{\alpha}{2}(1 - \alpha)\sigma^2, \quad (5.3)$$

$$\hat{\delta} = (\alpha - 1)\delta + (2 - \alpha)r + \left(\frac{3\alpha}{2} - 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \sigma^2, \quad (5.4)$$

а процессы L и M определяются формулами

$$\begin{aligned} L_t &= \exp \left(\alpha \int_0^t \sigma_u dW_u - \alpha^2 \int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2} du \right), \\ M_t &= \exp \left((\alpha - 1) \int_0^t \sigma_u dW_u - (\alpha - 1)^2 \int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2} du \right). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 5.1. Пусть $\alpha = 1$. Тогда, как нетрудно видеть, в случае детерминированной волатильности результат теоремы 3.1 может быть получен как частный случай теоремы 5.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы 3.1, для текущего капитала реплицирующей стратегии имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_t &= \mathbb{C}_t(S; K; \alpha; r; \delta) = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E} \left([(S_T - K)^+]^\alpha \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \frac{D_t}{D_T} \mathbf{E} \left(\frac{S_T^\alpha D_T B_t}{B_T S_t^\alpha D_t} \frac{S_t^\alpha [(S_T - K)^+]^\alpha}{S_T^\alpha} \mid \mathcal{F}_t \right), \quad t \leq T. \quad (5.5)\end{aligned}$$

При этом процесс

$$\frac{D_t S_t^\alpha}{B_t} = \exp \left((\alpha - 1) \int_0^t (r_u - \delta_u) du - \alpha \int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2} du + \alpha \int_0^t \sigma_u dW_u \right),$$

очевидно, не является $\mathbf{P}$ -мартингалом.

Определим процесс

$$\mathcal{C}_t = \exp \left(-(\alpha - 1) \int_0^t (r_u - \delta_u) du + \alpha \int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2} du - \alpha^2 \int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2} du \right). \quad (5.6)$$

Тогда $D_t \mathcal{C}_t S_t^\alpha / B_t \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$, и из (5.5) следует, что

$$\mathbb{C}_t = K S_t^\alpha \frac{D_t \mathcal{C}_t}{D_T \mathcal{C}_T} \hat{\mathbf{E}} \left([(\hat{K} - \hat{S}_T)^+]^\alpha \mid \mathcal{F}_t \right), \quad (5.7)$$

где

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{P}_t} = \frac{D_t \mathcal{C}_t S_t^\alpha}{B_t}.$$

Далее, будем искать процесс $\hat{D} = (\hat{D}_t)_{t \leq T}$ такой, что

$$\frac{\hat{S} \hat{D}}{D \mathcal{C}} \in \mathcal{M}(\hat{\mathbf{P}}). \quad (5.8)$$

Заметим, что, согласно утверждению 3.8 из [26], условие (5.8) эквивалентно условию

$$\frac{\hat{S} \hat{D}}{D \mathcal{C}} \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \in \mathcal{M}(\mathbf{P}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\hat{D}_t &= \exp \left((2 - \alpha) \int_0^t r_u du + \left(\frac{3\alpha}{2} - 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \int_0^t \sigma_u^2 du \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - 1) \int_0^t \delta_u du \right), \quad (5.9)\end{aligned}$$

$t \leq T$, и из (5.7) получаем, что

$$\mathbb{C}_t = K S_t^\alpha \widehat{\mathbb{P}}_t(\widehat{K}; \widehat{S}; \alpha; \widehat{r}; \widehat{\delta}) = K S_t^\alpha (\widehat{\beta}_t^p \mathcal{C}_t D_t + \widehat{\gamma}_t^p \widehat{S}_t \widehat{D}_t),$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\delta} &= (\alpha - 1)\delta + (2 - \alpha)r + \left(\frac{3\alpha}{2} - 1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\sigma^2, \\ \widehat{r} &= \alpha\delta - (\alpha - 1)r + \frac{\alpha}{2}(1 - \alpha)\sigma^2. \end{aligned}$$

Положим

$$L_t = \frac{C_t D_t}{B_t} S_t^\alpha, \quad M_t = \frac{\widehat{D}_t}{B_t} S_t^{\alpha-1}.$$

В этих обозначениях дисконтированный текущий капитал принимает вид

$$\frac{\mathbb{C}_t}{B_t} = K(L_t \widehat{\beta}_t^p + M_t \widehat{\gamma}_t^p),$$

где относительно исходной меры $\mathbf{P}$ процессы L и M имеют дифференциалы

$$dL_t = \alpha \sigma_t L_t dW_t, \quad (5.10)$$

$$dM_t = (\alpha - 1) \sigma_t M_t dW_t. \quad (5.11)$$

Предположим, что относительно меры $\widehat{\mathbf{P}}$

$$d\widehat{\beta}_t^p = \widehat{\mu}_t^\beta dt + \widehat{\sigma}_t^\beta d\widehat{W}_t, \quad (5.12)$$

$$d\widehat{\gamma}_t^p = \widehat{\mu}_t^\gamma dt + \widehat{\sigma}_t^\gamma d\widehat{W}_t. \quad (5.13)$$

В этом случае, поскольку по теореме Гирсанова

$$\widehat{W}_t = W_t - \alpha \int_0^t \sigma_u du \quad (5.14)$$

и

$$d\left(\frac{\widehat{D}\widehat{S}}{\mathcal{C}D}\right)_t = -\sigma_t \left(\frac{\widehat{D}\widehat{S}}{\mathcal{C}D}\right)_t d\widehat{W}_t, \quad (5.15)$$

условия самофинансируемости стратегии $(\widehat{\beta}^p, \widehat{\gamma}^p)$ имеют вид

$$\sigma_t^\beta + \left(\frac{\widehat{D}\widehat{S}}{\mathcal{C}D}\right)_t \sigma_t^\gamma = 0, \quad (5.16)$$

$$\mu_t^\beta + \left(\frac{\widehat{D}\widehat{S}}{\mathcal{C}D}\right)_t \mu_t^\gamma - \sigma_t \sigma_t^\gamma \left(\frac{\widehat{D}\widehat{S}}{\mathcal{C}D}\right)_t = 0. \quad (5.17)$$

Запишем дифференциал Ито процесса дисконтированного текущего капитала, без ограничения общности полагая $K = 1$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t}{B_t}\right) &= \hat{\beta}_t^p dL_t + L_t d\hat{\beta}_t^p + d\langle(\hat{\beta}^p)^c, L^c\rangle_t \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^p dM_t + M_t d\hat{\gamma}_t^p + d\langle(\hat{\gamma}^p)^c, M^c\rangle_t. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Используя (5.10)–(5.15), перепишем (5.18) в виде

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t}{B_t}\right) &= (\hat{\mu}_t^\beta L_t + \hat{\mu}_t^\gamma M_t - \sigma_t \hat{\sigma}_t^\gamma M_t) dt \\ &\quad + (\alpha \sigma_t \hat{\beta}_t^p L_t + \hat{\sigma}_t^\beta L_t + (\alpha - 1) \sigma_t \hat{\gamma}_t^p M_t + \hat{\sigma}_t^\gamma M_t) dW_t. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Заметим, что

$$\frac{\mathcal{C}_t D_t}{\hat{D}_t} S_t = \exp\left(\int_0^t \sigma_u dW_u - (2\alpha - 1) \int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2} du\right) = \frac{L_t}{M_t}.$$

Следовательно, условия (5.16) и (5.17) можно переписать в виде

$$\frac{L_t}{M_t} \sigma_t^\beta + \sigma_t^\gamma = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{L_t}{M_t} \mu_t^\beta + \mu_t^\gamma - \sigma_t \sigma_t^\gamma = 0. \quad (5.21)$$

Из (5.19), (5.20) и (5.21), очевидно, следует, что

$$d\left(\frac{\mathbb{C}_t}{B_t}\right) = (\alpha \sigma_t \hat{\beta}_t^p L_t + (\alpha - 1) \sigma_t \hat{\gamma}_t^p M_t) dW_t,$$

откуда

$$d\left(\frac{\mathbb{C}_t}{B_t}\right) = \gamma_t^c d\left(\frac{SD}{B}\right)_t, \quad (5.22)$$

где

$$\gamma_t^c = K \frac{\alpha \hat{\beta}_t^p L_t + (\alpha - 1) \hat{\gamma}_t^p M_t}{(SD/B)_t} \quad (5.23)$$

для произвольного $K > 0$. Положим

$$\beta_t^c = \frac{KS_t^\alpha \hat{\mathbb{P}}_t - \gamma_t^c (DS)_t}{B_t},$$

где γ^c определяется соотношением (5.23). Стратегия (β^c, γ^c) является совершенным хеджем и, в силу (5.22), самофинансируемой без потребления. Теорема 5.1 доказана.

5.2. Опционы американского типа на степень актива. В данном случае функция выплат для опциона колл имеет вид

$$f_t = e^{-\lambda t} [(S_t - K)^+]^\alpha, \quad (5.24)$$

а для опциона пут — вид

$$f_t = e^{-\lambda t} [(K - S_t)^+]^\alpha, \quad (5.25)$$

где $T < \infty$, $t \leq T$, $\lambda \geq 0$, $K > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. В этом случае компоненты минимального самофинансируемого хеджа для американского опциона колл на степень актива могут быть выражены через компоненты самофинансируемой минимальной хеджирующей стратегии для американского опциона пут на степень актива следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_t^{ac} &= K((2 - \alpha)M_t \hat{\gamma}_t^{ap}(\hat{K}; \hat{S}; \lambda; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta}) + (1 - \alpha)L_t \hat{\beta}_t^{ap}(\hat{K}; \hat{S}; \lambda; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta})), \\ \gamma_t^{ac} &= K \frac{\alpha L_t \hat{\beta}_t^{ap}(\hat{K}; \hat{S}; \lambda; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta}) + (\alpha - 1)M_t \hat{\gamma}_t^{ap}(\hat{K}; \hat{S}; \lambda; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta})}{(SD/B)_t}, \end{aligned}$$

где процессы $\hat{r}$, $\hat{\delta}$, L , M такие же, как в теореме 5.1.

Доказательство. Определим процесс $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \leq T}$ с помощью (5.6). Тогда, аналогично (5.7), имеем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_t^a &= \mathbb{C}_t^a(S; K; \lambda; \alpha; r; \delta) = B_t \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{[(S_\tau - K)^+]^\alpha}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathcal{C}_t D_t S_t^\alpha \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} \left(\frac{\mathcal{C}_T D_T S_T^\alpha}{B_T} \frac{B_t}{\mathcal{C}_t D_t S_t^\alpha} \frac{B_T}{\mathcal{C}_T D_T S_T^\alpha} e^{-\lambda \tau} \frac{[(S_\tau - K)^+]^\alpha}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathcal{C}_t D_t S_t^\alpha \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \hat{\mathbf{E}} \left(\frac{B_T}{\mathcal{C}_T D_T S_T^\alpha} e^{-\lambda \tau} \frac{[(S_\tau - K)^+]^\alpha}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathcal{C}_t D_t S_t^\alpha \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \hat{\mathbf{E}} \left(\hat{\mathbf{E}} \left(\frac{B_T}{\mathcal{C}_T D_T S_T^\alpha} e^{-\lambda \tau} \frac{[(S_\tau - K)^+]^\alpha}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_\tau \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= K \mathcal{C}_t D_t S_t^\alpha \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \hat{\mathbf{E}} \left(e^{-\lambda \tau} \frac{[(\hat{K} - \hat{S}_\tau)^+]^\alpha}{\mathcal{C}_\tau D_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Поскольку для процесса $\hat{D}$, определяемого формулой (5.9), выполнено (5.8), мы можем записать (5.26) в виде

$$\mathbb{C}_t^a = K S_t^\alpha \hat{\mathbb{P}}_t^a(\hat{K}; \hat{S}; \lambda; \alpha; \hat{r}; \hat{\delta}) = K S_t^\alpha (\hat{\beta}_t^{ap} D_t \mathcal{C}_t + \hat{\gamma}_t^{ap} \hat{S}_t \hat{D}_t).$$

Окончание доказательства аналогично доказательствам теорем 3.2 и 5.1.

5.3. Селф-кванто-опционы европейского типа. По определению, функция выплат селф-кванто-опциона колл есть

$$f_T = S_T(S_T - K)^+, \quad T < \infty, \quad K > 0. \quad (5.27)$$

Соответственно, платежная функция опциона пут есть

$$f_T = S_T(K - S_T)^+, \quad T < \infty, \quad K > 0. \quad (5.28)$$

Теорема 5.3. В рамках модели (2.1)–(2.3) с детерминированной волатильностью и $\mathbf{P}$ -мартингалом DS/B компоненты реплицирующей самофинансируемой стратегии без потребления для селф-кванто-опциона колл определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \beta_t^{sq} &= -S_t^2 \frac{\hat{D}_t}{B_t} \hat{\gamma}_t^c(S; K; \delta; 2\delta - r - \sigma^2), \\ \gamma_t^{sq} &= \hat{\beta}_t^c(S; K; \delta; 2\delta - r - \sigma^2) + 2S_t \frac{\hat{D}_t}{D_t} \hat{\gamma}_t^c(S; K; \delta; 2\delta - r - \sigma^2), \end{aligned}$$

где $(\hat{\beta}^c, \hat{\gamma}^c)$ есть совершенный хедж для европейского опциона колл и

$$\hat{D}_t = \exp \left(\int_0^t (2\delta_s - r_s) ds - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right), \quad t \leq T. \quad (5.29)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Текущий капитал совершенного хеджа для европейского селф-кванто-опциона колл есть

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_t^{sq} &= \mathbb{C}_t^{sq}(S; K; r; \delta) = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}(S_T(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) \\ &= \frac{D_t}{D_T} \mathbf{E} \left(\frac{B_t S_T D_T}{B_T S_t D_t} S_t (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \frac{D_t}{D_T} S_t \hat{\mathbf{E}}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Будем искать процесс $\hat{D}$ такой, что $S\hat{D}/D \in \mathcal{M}(\hat{\mathbf{P}})$, что эквивалентно условию

$$\frac{S\hat{D}}{D} \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \in \mathcal{M}(\mathbf{P}). \quad (5.31)$$

Из (5.31) имеем, что

$$\hat{D}_t = \exp \left(\int_0^t (2\delta_s - r_s) ds - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right),$$

и из (5.30) следует, что

$$\mathbb{C}_t^{sq} = S_t \hat{\mathbb{C}}_t(S; K; \delta; 2\delta - r - \sigma^2) = S_t (\hat{\beta}_t^c D_t + \hat{\gamma}_t^c S_t \hat{D}_t).$$

Предположим, что

$$d\hat{\beta}_t^c = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\widehat{W}_t = (\hat{\mu}_t^\beta - \hat{\sigma}_t^\beta \sigma_t) dt + \hat{\sigma}_t^\beta dW_t, \quad (5.32)$$

$$d\hat{\gamma}_t^c = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\widehat{W}_t = (\hat{\mu}_t^\gamma - \hat{\sigma}_t^\gamma \sigma_t) dt + \hat{\sigma}_t^\gamma dW_t. \quad (5.33)$$

Тогда, поскольку относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$

$$d\left(\frac{\widehat{D}S}{D}\right)_t = \sigma_t \left(\frac{\widehat{D}S}{D}\right)_t d\widehat{W}_t,$$

условие самофинансируемости стратегии $(\hat{\beta}^c, \hat{\gamma}^c)$ имеет вид двух условий

$$\hat{\sigma}_t^\beta + \left(\frac{\widehat{D}S}{D}\right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma = 0, \quad (5.34)$$

$$\hat{\mu}_t^\beta + \left(\frac{\widehat{D}S}{D}\right)_t \hat{\mu}_t^\gamma + \left(\frac{\widehat{D}S}{D}\right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma \sigma_t = 0. \quad (5.35)$$

Запишем дифференциал дисконтированного процесса текущего капитала:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}^{sq}}{B}\right)_t &= \hat{\beta}_t^c d\left(\frac{DS}{B}\right)_t + \left(\frac{DS}{B}\right)_t d\hat{\beta}_t^c + d\left\langle \left(\frac{DS}{B}\right)^c, (\hat{\beta}^c)^c \right\rangle_t \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^c d\left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t + \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t d\hat{\gamma}_t^c + d\left\langle \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)^c, (\hat{\gamma}^c)^c \right\rangle_t. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Заметим, что

$$d\left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t = 2\sigma_t \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t dW_t.$$

Эквивалентно, (5.36) может быть записано как

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}^{sq}}{B}\right)_t &= \hat{\beta}_t^c d\left(\frac{DS}{B}\right)_t + \hat{\gamma}_t^c \cdot 2\sigma_t \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t dW_t + \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma dW_t \\ &\quad + \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t (\hat{\mu}_t^\gamma - \hat{\sigma}_t^\gamma \sigma_t) dt + 2\sigma_t \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma dt \\ &\quad + \left(\frac{SD}{B}\right)_t (\hat{\mu}_t^\beta - \hat{\sigma}_t^\beta \sigma_t) dt + \left(\frac{SD}{B}\right)_t \hat{\sigma}_t^\beta dW_t + \sigma_t \left(\frac{SD}{B}\right)_t \hat{\sigma}_t^\beta dt. \end{aligned}$$

Используя (5.34) и (5.35), получаем, что

$$d\left(\frac{\mathbb{C}^{sq}}{B}\right)_t = \hat{\beta}_t^c d\left(\frac{DS}{B}\right)_t + \hat{\gamma}_t^c \cdot 2\sigma_t \left(\frac{\widehat{D}S^2}{B}\right)_t dW_t,$$

откуда

$$d\left(\frac{\mathbb{C}^{sq}}{B}\right)_t = \left(\hat{\beta}_t^c + 2\hat{\gamma}_t^c \frac{\widehat{D}_t}{D_t} S_t\right) d\left(\frac{DS}{B}\right)_t. \quad (5.37)$$

Положим

$$\gamma_t^{sq} = \hat{\beta}_t^c + 2\hat{\gamma}_t^c \frac{\hat{D}_t}{D_t} S_t, \quad \beta_t^{sq} = \frac{\mathbb{C}_t^{sq} - \gamma_t^{sq}(SD)_t}{B_t}.$$

Тогда в силу (5.37) реплицирующая стратегия $(\beta^{sq}, \gamma^{sq})$ является самофинансируемой без потребления. Теорема 5.3 доказана.

5.4. Селф-кванто-опционы американского типа. Функции выплат селф-кванто-опционов колл и пут американского типа имеют вид

$$f_t = e^{-\lambda t} S_t (S_t - K)^+, \quad f_t = e^{-\lambda t} S_t (K - S_t)^+, \quad t \leq T, \quad (5.38)$$

где $T < \infty$, $K > 0$, $\lambda \geq 0$.

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.3. В этом случае минимальная хеджирующая самофинансируемая стратегия $(\beta^{asq}, \gamma^{asq})$ рассчитывается с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \beta_t^{asq} &= -S_t^2 \frac{\hat{D}_t}{B_t} \hat{\gamma}_t^{ac}(S; K; \lambda; \delta; 2\delta - r - \sigma^2), \\ \gamma_t^{asq} &= \hat{\beta}_t^{ac}(S; K; \lambda; \delta; 2\delta - r - \sigma^2) + 2S_t \frac{\hat{D}_t}{D_t} \hat{\gamma}_t^{ac}(S; K; \lambda; \delta; 2\delta - r - \sigma^2) \end{aligned}$$

через компоненты минимального самофинансируемого хеджа для соответствующего опциона колл американского типа, где процесс $\hat{D}$ определен в (5.29).

Доказательство. Цена хеджирующего портфеля в момент времени t есть

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_t^{asq} &= \mathbb{C}_t^{asq}(S; K; \lambda; r; \delta) = B_t \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} S_\tau (S_\tau - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t \frac{D_t B_T}{D_T} \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} \frac{S_T D_T}{B_T} \frac{B_t}{S_t D_t} \hat{S}_T S_\tau (S_\tau - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t \frac{D_t B_T}{D_T} \sup_{t \leq \tau \leq T} \hat{\mathbf{E}} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} \hat{S}_T S_\tau (S_\tau - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t D_t \sup_{t \leq \tau \leq T} \hat{\mathbf{E}} \left(\mathbf{E} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} \frac{\hat{S}_T B_T}{D_T} S_\tau (S_\tau - K)^+ \mid \mathcal{F}_\tau \right) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t D_t \sup_{t \leq \tau \leq T} \hat{\mathbf{E}} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} \frac{B_\tau}{D_\tau} (S_\tau - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

и, определяя процесс $\hat{D}$ с помощью (5.29), мы можем записать, что

$$\mathbb{C}_t^{asq} = S_t \mathbb{C}_t^a(S; K; \lambda; \delta; 2\delta - r - \sigma^2) = S_t (\hat{\beta}_t^{ac} D_t + \hat{\gamma}_t^{ac} \hat{D}_t S_t).$$

откуда результат теоремы следует аналогично теореме 4.1 и теореме 5.3.

5.5. Селф-кванто-опционы на два актива. В данном пункте рассматриваются опционы колл и пут с функциями выплат

$$\begin{aligned} f_T &= S_T^1(S_T^2 - K)^+, & T < \infty, & K > 0, \\ f_T &= S_T^1(K - S_T^2)^+, & T < \infty, & K > 0, \end{aligned}$$

соответственно.

Теорема 5.5. *Предположим, что процессы S^1, S^2 удовлетворяют (2.1)–(2.3) с δ^1, δ^2 , детерминированными функциями волатильности σ^1, σ^2 и винеровскими процессами W^1, W^2 с коэффициентом корреляции ρ . Пусть, кроме этого, локальный мартингал $D^1 S^1/B$ является мартингалом. В этом случае совершенный самофинансируемый без потребления хедж $(\beta^{sq}, \gamma^{sq1}, \gamma^{sq2})$ для селф-кванто-опциона колл определяется через компоненты реплицирующей самофинансируемой без потребления стратегии для дуального опциона колл с некоторыми дифференциалами Ито относительно дуальной меры $\hat{\mathbf{P}}$*

$$d\hat{\beta}_t^c = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\widehat{W}_t, \quad d\hat{\gamma}_t^c = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\widehat{W}_t,$$

где $\widehat{W}$ — стандартное броуновское движение относительно $\hat{\mathbf{P}}$, и через процесс

$$\widehat{D}_t = \exp \left(\int_0^t \left(\delta_s^1 + \delta_s^2 - r_s - \rho \sigma_s^1 \sigma_s^2 \right) ds \right) \quad (5.39)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_t^{sq1} &= \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\sigma_t^1} + \hat{\beta}_t^c(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho \sigma^1 \sigma^2) \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^c(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho \sigma^1 \sigma^2) \frac{\widehat{D}_t S_t^2}{D_t^1}, \\ \gamma_t^{sq2} &= \frac{\widehat{D}_t S_t^1}{D_t^2} \left(\frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\sigma_t^2} + \hat{\gamma}_t^c(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho \sigma^1 \sigma^2) \right), \\ \beta_t^{sq} &= - \left(\frac{D^1 S^1}{B} \right)_t \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\sigma_t^1} \\ &\quad - \left(\frac{\widehat{D} S^1 S^2}{B} \right)_t \left(\hat{\gamma}_t^c(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho \sigma^1 \sigma^2) + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\sigma_t^2} \right). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 5.2. В случае $S^1 \equiv S^2$ и $\delta^1 \equiv \delta^2$ из теоремы 5.5 следует результат теоремы 5.3 в силу условия (5.43) ниже.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\mathbb{C}_t^{sq} = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}(S_T^1(S_T^2 - K)^+ | \mathcal{F}_t).$$

Имеем

$$\mathbb{C}_t^{sq} = S_t^1 \frac{D_t^1}{D_T^1} \hat{\mathbf{E}}((S_T^2 - K)^+ | \mathcal{F}_t), \quad (5.40)$$

где $d\hat{\mathbf{P}}_t/d\mathbf{P}_t = S_t^1 D_t^1/B_t$, и относительно $\hat{\mathbf{P}}$, в силу [17, следствие 4.5], процесс $H^2 = \ln S^2$ имеет характеристики

$$\hat{B}_t^2 = \int_0^t \left(r_s - \delta_s^2 - \frac{(\sigma_s^2)^2}{2} + \rho \sigma_s^1 \sigma_s^2 \right) ds, \quad (5.41)$$

$$\hat{C}_t^2 = \int_0^t (\sigma_s^2)^2 ds. \quad (5.42)$$

Далее, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 5.1, получаем, что для процесса

$$\hat{D}_t = \exp \left(\int_0^t (\delta_s^1 + \delta_s^2 - r_s - \rho \sigma_s^1 \sigma_s^2) ds \right)$$

процесс $S^2 \hat{D}/D^1$ является броуновским $\hat{\mathbf{P}}$ -локальным мартингалом и, следовательно,

$$\mathbb{C}_t^{sq} = S_t^1 \mathbb{C}_t(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho \sigma^1 \sigma^2) = S_t^1 \left(\hat{\beta}_t^c D_t^1 + \hat{\gamma}_t^c \hat{D}_t S_t^2 \right).$$

Пусть относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$ компоненты стратегии $(\hat{\beta}^c, \hat{\gamma}^c)$ имеют дифференциалы $d\hat{\beta}_t^c = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\hat{W}_t$, $d\hat{\gamma}_t^c = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\hat{W}_t$, где $\hat{W}$ является $\hat{\mathbf{P}}$ -броуновским движением. Условие самофинансируемости без потребления совершенного хеджа $(\hat{\beta}^c, \hat{\gamma}^c)$ имеет вид

$$d\hat{\beta}_t^c + \frac{\hat{D}_t S_t^2}{D_t^1} d\hat{\gamma}_t^c + d \left\langle \left(\frac{\hat{D} S^2}{D^1} \right)^c, (\hat{\gamma}^c)^c \right\rangle_t = 0$$

и эквивалентно паре условий

$$\hat{\sigma}_t^\beta + \left(\frac{\hat{D} S^2}{D^1} \right)_t \hat{\sigma}_t^\gamma = 0, \quad (5.43)$$

$$\hat{\mu}_t^\beta + \left(\frac{\hat{D} S^2}{D^1} \right)_t \hat{\mu}_t^\gamma + \left(\frac{\hat{D} S^2}{D^1} \right)_t \sigma_t^2 \hat{\sigma}_t^\gamma = 0. \quad (5.44)$$

В силу (5.41) и (5.42), относительно меры $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned} d\hat{\beta}_t^c &= (\hat{\mu}_t^\beta - \rho \sigma_t^1 \sigma_t^2 \hat{\sigma}_t^\beta) dt + \hat{\sigma}_t^\beta dW_t^2, \\ d\hat{\gamma}_t^c &= (\hat{\mu}_t^\gamma - \rho \sigma_t^1 \sigma_t^2 \hat{\sigma}_t^\gamma) dt + \hat{\sigma}_t^\gamma dW_t^2. \end{aligned}$$

Запишем дифференциал дисконтированного процесса текущей цены селф-кванто-опциона:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t^{sq}}{B_t}\right) &= \hat{\beta}_t^c d\left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t + \left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t d\hat{\beta}_t^c + d\left\langle (\hat{\beta}^c)^c, \left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)^c \right\rangle_t \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^c d\left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)_t + \left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)_t d\hat{\gamma}_t^c + d\left\langle (\hat{\gamma}^c)^c, \left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)^c \right\rangle_t. \end{aligned}$$

Поскольку относительно исходной меры

$$d\left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)_t = \left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)_t (\sigma_t^1 dW_t^1 + \sigma_t^2 dW_t^2),$$

то

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t^{sq}}{B_t}\right) &= \left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t (\hat{\mu}_t^\beta - \rho \sigma_t^1 \sigma_t^2 \hat{\sigma}_t^\beta + \rho \sigma_t^1 \hat{\sigma}_t^\beta) dt \\ &\quad + \left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)_t (\hat{\mu}_t^\gamma - \rho \sigma_t^1 \sigma_t^2 \hat{\sigma}_t^\gamma + \sigma_t^2 \hat{\sigma}_t^\gamma + \rho \sigma_t^1 \hat{\sigma}_t^\gamma) dt \\ &\quad + \hat{\sigma}_t^\beta \left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t dW_t^2 + \hat{\sigma}_t^\gamma \left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)_t dW_t^2 \\ &\quad + \hat{\beta}_t^c d\left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t + \hat{\gamma}_t^c d\left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B}\right)_t. \end{aligned} \quad (5.45)$$

В силу условий (5.43) и (5.44), из (5.45) следует, что

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t^{sq}}{B_t}\right) &= \left(\frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\sigma_t^1} + \hat{\beta}_t^c + \hat{\gamma}_t^c \left(\frac{\hat{D} S^2}{D^1}\right)_t\right) d\left(\frac{D^1 S^1}{B}\right)_t \\ &\quad + \frac{(\hat{D} S^1)_t}{D_t^2} \left(\frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\sigma_t^2} + \hat{\gamma}_t^c\right) d\left(\frac{D^2 S^2}{B}\right)_t. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Положим

$$\begin{aligned} \gamma_t^{sq1} &= \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\sigma_t^1} + \hat{\beta}_t^c + \hat{\gamma}_t^c \frac{\hat{D}_t S_t^2}{D_t^1}, \quad \gamma_t^{sq2} = \frac{\hat{D}_t S_t^1}{D_t^2} \left(\frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\sigma_t^2} + \hat{\gamma}_t^c\right), \\ \beta_t^{sq} &= \frac{S_t^1 \mathbb{C}_t - \gamma_t^{sq1} (D^1 S^1)_t - \gamma_t^{sq2} (D^2 S^2)_t}{B_t}. \end{aligned}$$

Совершенный хедж $(\beta^{sq}, \gamma^{sq1}, \gamma^{sq2})$ является самофинансируемым без потребления в силу представления (5.46). Теорема 5.5 доказана.

5.6. Селф-кванто-опционы американского типа на два актива. Опционы данного типа имеют функции выплат

$$\begin{aligned} f_t &= e^{-\lambda t} S_t^1 (S_t^2 - K)^+, \quad T < \infty, \quad K > 0, \\ f_t &= e^{-\lambda t} S_t^1 (K - S_t^2)^+, \quad T < \infty, \quad K > 0, \end{aligned}$$

где $\lambda \geq 0$ и $t \leq T$.

Теорема 5.6. Пусть выполнены условия теоремы 5.5. В этом случае компоненты минимальной хеджирующей самофинансируемой стратегии $(\beta^{asq}, \gamma^{asq1}, \gamma^{asq2})$ для американского селф-кванто-опциона колл определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\gamma_t^{asq1} &= \frac{\hat{\sigma}_t^{a\beta}}{\sigma_t^1} + \hat{\beta}_t^{ac}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^{ac}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \frac{\hat{D}_t S_t^2}{D_t^1}, \\ \gamma_t^{asq2} &= \frac{\hat{D}_t S_t^1}{D_t^2} \left(\frac{\hat{\sigma}_t^{a\gamma}}{\sigma_t^2} + \hat{\gamma}_t^{ac}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \right), \\ \beta_t^{asq} &= - \left(\frac{D^1 S^1}{B} \right)_t \frac{\hat{\sigma}_t^{a\beta}}{\sigma_t^1} \\ &\quad - \left(\frac{\hat{D} S^1 S^2}{B} \right)_t \left(\hat{\gamma}_t^{ac}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) + \frac{\hat{\sigma}_t^{a\gamma}}{\sigma_t^2} \right)\end{aligned}$$

через минимальный самофинансируемый хедж для стандартного американского опциона колл с компонентами

$$d\hat{\beta}_t^{ac} = \hat{\mu}_t^{a\beta} dt + \hat{\sigma}_t^{a\beta} d\widehat{W}_t, \quad d\hat{\gamma}_t^{ac} = \hat{\mu}_t^{a\gamma} dt + \hat{\sigma}_t^{a\gamma} d\widehat{W}_t,$$

где $\widehat{W} = W^2 - \rho\sigma^1\sigma^2$ — стандартное броуновское движение относительно дуальной меры $\widehat{\mathbf{P}}$, и через процесс $\widehat{D}$, определяемый соотношениями (5.39).

Доказательство. Полагая

$$\mathbb{C}_t^{asq} = B_t \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} S_\tau^1 (S_\tau^2 - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right),$$

имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_t^{asq} &= B_t \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} \frac{S_T^1 D_T^1 B_t}{B_T S_t^1 D_t^1} \frac{S_t^1 D_t^1 B_T}{B_t S_T^1 D_T^1} S_\tau^1 (S_\tau^2 - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t^1 D_t^1 \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \widehat{\mathbf{E}} \left(e^{-(\lambda+r)\tau} \frac{\widehat{S}_\tau^1 B_\tau}{D_\tau^1} S_\tau^1 (S_\tau^2 - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t^1 D_t^1 \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau \leq T} \widehat{\mathbf{E}} \left(e^{-(\lambda+\delta^1)\tau} (S_\tau^2 - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right),\end{aligned}$$

откуда, аналогично теореме 5.5, имеем, что

$$\mathbb{C}_t^{asq} = S_t^1 \widehat{\mathbb{C}}_t^a(S^2; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) = S_t^1 (\hat{\beta}_t^{ac} D_t^1 + \hat{\gamma}_t^{ac} \widehat{D}_t S_t^2),$$

где процесс $\widehat{D}$ определен (5.39), и, следовательно, теорема доказана.

5.7. Кванто-цифровые опционы. Функции выплат цифровых опционов европейского и американского типов имеют вид $f_T = I\{S_T > K\}$ и $f_t = e^{-\lambda t} I\{S_t > K\}$ соответственно, где $K > 0$, $\lambda \geq 0$, $T < \infty$, $t \leq T$.

Кванто-цифровой опцион европейского типа имеет функцию выплат $f_T = S_T^1 I\{S_T^2 > K\}$, американского — $f_t = e^{-\lambda t} S_t^1 I\{S_t^2 > K\}$, где $K > 0$, $\lambda \geq 0$, $T < \infty$, $t \leq T$.

Аналогично теоремам 5.5 и 5.6 могут быть получены следующие результаты.

Теорема 5.7. Пусть выполнены условия теоремы 5.5. Тогда совершенный самофинансируемый без потребления хедж $(\beta^{qd}, \gamma^{qd1}, \gamma^{qd2})$ для кванто-цифрового опциона европейского типа определяется по формулам

$$\begin{aligned}\gamma_t^{qd1} &= \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\sigma_t^1} + \hat{\beta}_t^d(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^d(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \frac{\hat{D}_t S_t^2}{D_t^1}, \\ \gamma_t^{qd2} &= \frac{\hat{D}_t S_t^1}{D_t^2} \left(\frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\sigma_t^2} + \hat{\gamma}_t^d(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \right), \\ \beta_t^{qd} &= - \left(\frac{D_t^1 S_t^1}{B} \right)_t \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\sigma_t^1} \\ &\quad - \left(\frac{\hat{D}_t S_t^1 S_t^2}{B} \right)_t \left(\hat{\gamma}_t^d(S; K; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\sigma_t^2} \right)\end{aligned}$$

через компоненты с дифференциалами

$$d\hat{\beta}_t^d = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\widehat{W}_t, \quad d\hat{\gamma}_t^d = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\widehat{W}_t$$

совершенного самофинансируемого без потребления хеджа для цифрового опциона; процесс $\hat{D}$ определен в (5.39).

Теорема 5.8. В условиях теоремы 5.6 компоненты минимального самофинансируемого хеджа $(\beta^{aqd}, \gamma^{aqd1}, \gamma^{aqd2})$ для американского кванто-цифрового опциона могут быть найдены из соотношений

$$\begin{aligned}\gamma_t^{aqd1} &= \frac{\hat{\sigma}_t^{a\beta}}{\sigma_t^1} + \hat{\beta}_t^{ad}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^{ad}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \frac{\hat{D}_t S_t^2}{D_t^1}, \\ \gamma_t^{aqd2} &= \frac{\hat{D}_t S_t^1}{D_t^2} \left(\frac{\hat{\sigma}_t^{a\gamma}}{\sigma_t^2} + \hat{\gamma}_t^{ad}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) \right), \\ \beta_t^{aqd} &= - \left(\frac{D_t^1 S_t^1}{B} \right)_t \frac{\hat{\sigma}_t^{a\beta}}{\sigma_t^1}\end{aligned}$$

$$- \left(\frac{\hat{D}S^1S^2}{B} \right)_t \left(\hat{\gamma}_t^{ad}(S; K; \lambda; \delta^1; \delta^1 + \delta^2 - r - \rho\sigma^1\sigma^2) + \frac{\hat{\sigma}_t^{a\gamma}}{\sigma_t^2} \right),$$

где $(\hat{\beta}^{ad}, \hat{\gamma}^{ad})$ есть минимальный самофинансируемый хедж для американского цифрового опциона и $\hat{D}$ определяется формулой (5.39).

5.8. Кванто-своп-опцион. Функцией выплат кванто-своп-опциона является

$$f_T = S_T^1(S_T^2 - S_T^3)^+,$$

где $T < \infty$ и S^1, S^2, S^3 — рискованные активы.

Теорема 5.9. Пусть процессы S^1, S^2, S^3 удовлетворяют (2.1)–(2.3) с $\sigma^1, \delta^1, \sigma^2, \delta^2, \sigma^3, \delta^3$ и винеровскими процессами W^1, W^2, W^3 с коэффициентами корреляции $\rho^{12}, \rho^{13}, \rho^{23}$. Будем предполагать, что все функции волатильности являются детерминированными. В этом случае совершенным самофинансируемым без потребления хеджем для кванто-своп-опциона будет стратегия $(\beta^{qs}, \gamma^{qs1}, \gamma^{qs2}, \gamma^{qs3})$, компоненты которой выражаются через компоненты самофинансируемого без потребления совершенного хеджа $(\hat{\beta}^p(1; \hat{S}; \hat{r}; \hat{\delta}), \hat{\gamma}^p(1; \hat{S}; \hat{r}; \hat{\delta}))$ для опциона пут на актив $\hat{S} = S^3/S^2$. Если относительно дуальной меры $\hat{\mathbf{P}}$

$$d\hat{\beta}_t^p = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\hat{W}_t, \quad d\hat{\gamma}_t^p = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\hat{W}_t,$$

где $\hat{W}$ — стандартное броуновское движение относительно $\hat{\mathbf{P}}$, то

$$\begin{aligned} \gamma_t^{qs1} &= \frac{\mathcal{K}_t S_t^2 \hat{\beta}_t^p + \hat{D}_t S_t^3 \hat{\gamma}_t^p}{D_t^1}, \\ \gamma_t^{qs2} &= S_t^1 \frac{\mathcal{K}_t S_t^2 (\hat{\sigma}_t \hat{\beta}_t^p - \hat{\sigma}_t^\beta) - \hat{D}_t S_t^3 \hat{\sigma}_t^\gamma}{D_t^2 S_t^2 \hat{\sigma}_t}, \\ \gamma_t^{qs3} &= S_t^1 \frac{\mathcal{K}_t S_t^2 \hat{\sigma}_t^\beta + \hat{D}_t S_t^3 (\hat{\sigma}_t \hat{\gamma}_t^p + \hat{\sigma}_t^\gamma)}{D_t^3 S_t^3 \hat{\sigma}_t} \end{aligned}$$

и

$$\beta_t^{qs} = \frac{S_t^1 (\mathcal{K}_t S_t^2 \hat{\beta}_t^p + \hat{D}_t S_t^3 \hat{\gamma}_t^p) - \gamma_t^{qs1} D_t^1 S_t^1 - \gamma_t^{qs2} D_t^2 S_t^2 - \gamma_t^{qs3} D_t^3 S_t^3}{B_t},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t &= \exp \left(\int_0^t \hat{r}_s ds \right), \quad \hat{D}_t = \exp \left(\int_0^t \hat{\delta}_s ds \right), \\ \hat{\sigma}_t &= \sqrt{(\sigma_t^2)^2 - 2\rho^{23}\sigma_t^2\sigma_t^3 + (\sigma_t^3)^2}. \end{aligned}$$

Процентная ставка и ставка дивидендов имеют вид

$$\hat{r}_t = \delta_t^1 + \delta_t^2 - r_t - \rho^{12}\sigma_t^1\sigma_t^2, \quad (5.47)$$

$$\hat{\delta}_t = \delta_t^3 + \delta_t^1 - \rho^{13}\sigma_t^1\sigma_t^3 - r_t \quad (5.48)$$

соответственно.

З а м е ч а н и е 5.3. Отметим, что из теоремы 5.9 с $S_t^3 \equiv K$ не следует результат теоремы 5.5, поскольку замены меры различны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Текущая цена опциона есть

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_t^{qs} &= \mathbb{C}_t^{qs}(S^1, S^2, S^3, r, \delta^1, \delta^2, \delta^3) = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}(S_T^1(S_T^2 - S_T^3)^+ | \mathcal{F}_t) \\ &= \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}\left(S_T^1 S_T^2 \left(1 - \frac{S_T^3}{S_T^2}\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right).\end{aligned}$$

По формуле Ито,

$$\begin{aligned}d(S^1 S^2)_t &= (S^1 S^2)_t (2r_t - \delta_t^1 - \delta_t^2 + \rho^{12} \sigma_t^1 \sigma_t^2) dt \\ &\quad + (S^1 S^2)_t \sigma_t^1 dW_t^1 + (S^1 S^2)_t \sigma_t^2 dW_t^2.\end{aligned}$$

Поэтому, определяя процесс $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \leq T}$ формулой

$$\mathcal{C}_t = \exp\left(\int_0^t \rho^{12} \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds\right),$$

для меры $\hat{\mathbf{P}}$ с плотностью

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{P}_t} = \frac{S_t^1 S_t^2 D_t^1 D_t^2}{(B_t)^2 \mathcal{C}_t}$$

мы можем записать, что

$$\mathbb{C}_t^{qs} = S_t^1 S_t^2 \frac{D_t^1 D_t^2}{D_T^1 D_T^2} \frac{B_T \mathcal{C}_T}{B_t \mathcal{C}_t} \hat{\mathbf{E}}((1 - \hat{S}_T)^+ | \mathcal{F}_t).$$

Положим

$$\mathcal{K}_t = \exp\left(\int_0^t (\delta_s^1 + \delta_s^2 - r_s - \rho^{12} \sigma_s^1 \sigma_s^2) ds\right).$$

В этом случае

$$\mathbb{C}_t^{qs} = S_t^1 S_t^2 \frac{\mathcal{K}_t}{\mathcal{K}_T} \hat{\mathbf{E}}((1 - \hat{S}_T)^+ | \mathcal{F}_t).$$

Относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$ процесс $\ln \hat{S}$ имеет предсказуемые характеристики

$$\begin{aligned}\hat{B}_t &= \int_0^t \left(\rho^{13} \sigma_s^1 \sigma_s^3 + \rho^{23} \sigma_s^2 \sigma_s^3 - \rho^{12} \sigma_s^1 \sigma_s^2 - \frac{(\sigma_s^2)^2}{2} - \frac{(\sigma_s^3)^2}{2} - \delta_s^3 + \delta_s^2 \right) ds, \\ \hat{C}_t &= \int_0^t ((\sigma_s^2)^2 - 2\rho^{23} \sigma_s^2 \sigma_s^3 + (\sigma_s^3)^2) ds.\end{aligned}$$

Определяя процесс $(\hat{D}_t)_{t \leq T}$ формулой

$$\hat{D}_t = \exp \left(\int_0^t (\delta_s^3 + \delta_s^1 - \rho^{13} \sigma_s^1 \sigma_s^3 - r_s) ds \right),$$

получаем, что процесс $\hat{D}\hat{S}/\mathcal{K}$ является локальным мартингалом относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$, следовательно,

$$\mathbb{C}_t^{qs} = S_t^1 S_t^2 \hat{\mathbb{P}}_t(1; \hat{S}; \hat{r}; \hat{\delta}) = S_t^1 S_t^2 (\mathcal{K}_t \hat{\beta}_t^p(1; \hat{S}; \hat{r}; \hat{\delta}) + \hat{D}_t \hat{S}_t \hat{\gamma}_t^p(1; \hat{S}; \hat{r}; \hat{\delta})),$$

где процессы $\hat{r}$ и $\hat{\delta}$ определяются соотношениями (5.47) и (5.48).

Пусть относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$ компоненты хеджа $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ имеют дифференциалы $d\hat{\beta}_t^p = \hat{\mu}_t^\beta dt + \hat{\sigma}_t^\beta d\hat{W}_t$, $d\hat{\gamma}_t^p = \hat{\mu}_t^\gamma dt + \hat{\sigma}_t^\gamma d\hat{W}_t$. Полагая

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{(\sigma_t^2)^2 - 2\rho^{23}\sigma_t^2\sigma_t^3 + (\sigma_t^3)^2},$$

мы можем записать относительно исходной меры

$$\begin{aligned} d\hat{\beta}_t^p &= \left(\hat{\mu}_t^\beta + \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\hat{\sigma}_t} (\rho^{12}\sigma_t^1\sigma_t^2 - \rho^{13}\sigma_t^1\sigma_t^3 - \rho^{23}\sigma_t^2\sigma_t^3) \right) dt \\ &\quad + \frac{\hat{\sigma}_t^\beta\sigma_t^3}{\hat{\sigma}_t} dW_t^3 - \frac{\hat{\sigma}_t^\beta\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t} dW_t^2, \\ d\hat{\gamma}_t^p &= \left(\hat{\mu}_t^\gamma + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t} (\rho^{12}\sigma_t^1\sigma_t^2 - \rho^{13}\sigma_t^1\sigma_t^3 - \rho^{23}\sigma_t^2\sigma_t^3) \right) dt \\ &\quad + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma\sigma_t^3}{\hat{\sigma}_t} dW_t^3 - \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t} dW_t^2. \end{aligned}$$

Условия самофинансируемости стратегии $(\hat{\beta}^p, \hat{\gamma}^p)$ таковы:

$$\hat{\sigma}_t^\beta + \frac{\hat{D}_t \hat{S}_t}{\mathcal{K}_t} \hat{\sigma}_t^\gamma = 0, \quad (5.49)$$

$$\hat{\mu}_t^\beta + \frac{\hat{D}_t \hat{S}_t}{\mathcal{K}_t} \hat{\mu}_t^\gamma + \frac{\hat{D}_t \hat{S}_t}{\mathcal{K}_t} \hat{\sigma}_t \hat{\sigma}_t^\gamma = 0. \quad (5.50)$$

Положим

$$M_t = \frac{S_t^1 S_t^2 \mathcal{K}_t}{B_t}, \quad L_t = \frac{S_t^1 S_t^2 \hat{D}_t \hat{S}_t}{B_t}.$$

Относительно исходной меры процессы M и L имеют дифференциалы

$$dM_t = \sigma_t^1 M_t dW_t^1 + \sigma_t^2 M_t dW_t^2, \quad dL_t = \sigma_t^1 L_t dW_t^1 + \sigma_t^3 L_t dW_t^3.$$

Запишем дифференциал дисконтированного процесса текущей цены кванто-своп-опциона относительно исходной меры:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t^{qs}}{B_t}\right) &= \hat{\beta}_t^p dM_t + M_t d\hat{\beta}_t^p + d\langle M^c, (\hat{\beta}^p)^c \rangle_t \\ &\quad + \hat{\gamma}_t^p dL_t + L_t d\hat{\gamma}_t^p + d\langle L^c, (\hat{\gamma}^p)^c \rangle_t. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Группируя подобные члены при dt в правой части (5.51), получаем:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t^{qs}}{B_t}\right) &= M_t\left(\hat{\mu}_t^\beta - \frac{\hat{\sigma}_t^\beta(\sigma_t^2)^2}{\hat{\sigma}_t}\right)dt + L_t\left(\hat{\mu}_t^\gamma - \frac{(\sigma_t^2)^2\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t} + \hat{\sigma}_t\hat{\sigma}_t^\gamma\right)dt \\ &\quad + \sigma_t^1(\hat{\beta}_t^p M_t + \hat{\gamma}_t^p L_t) dW_t^1 + \sigma_t^2\left(M_t\left(\hat{\beta}_t^p - \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\hat{\sigma}_t}\right) - L_t\frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t}\right) dW_t^2 \\ &\quad + \sigma_t^3\left(M_t\frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\hat{\sigma}_t} + L_t\left(\hat{\gamma}_t^p + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t}\right)\right) dW_t^3. \end{aligned}$$

В силу условий (5.49) и (5.50)

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathbb{C}_t^{qs}}{B_t}\right) &= \frac{\hat{\beta}_t^p \mathcal{K}_t S_t^2 + \hat{\gamma}_t^p \hat{D}_t S_t^3}{D_t^1} d\left(\frac{D_t^1 S_t^1}{B_t}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\mathcal{K}_t S_t^1}{D_t^2} \left(\hat{\beta}_t^p - \frac{\hat{\sigma}_t^\beta}{\hat{\sigma}_t}\right) - \frac{\hat{D}_t S_t^1 S_t^3 \hat{\sigma}_t^\gamma}{D_t^2 S_t^2 \hat{\sigma}_t}\right) d\left(\frac{D_t^2 S_t^2}{B_t}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\mathcal{K}_t S_t^1 S_t^2 \hat{\sigma}_t^\beta}{D_t^3 S_t^3 \hat{\sigma}_t} + \frac{\hat{D}_t S_t^1}{D_t^3} \left(\hat{\gamma}_t^p + \frac{\hat{\sigma}_t^\gamma}{\hat{\sigma}_t}\right)\right) d\left(\frac{D_t^3 S_t^3}{B_t}\right). \quad (5.52) \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \gamma_t^{qs1} &= \frac{\mathcal{K}_t S_t^2 \hat{\beta}_t^p + \hat{D}_t S_t^3 \hat{\gamma}_t^p}{D_t^1}, \quad \gamma_t^{qs2} = S_t^1 \frac{\mathcal{K}_t S_t^2 (\hat{\sigma}_t \hat{\beta}_t^p - \hat{\sigma}_t^\beta) - \hat{D}_t S_t^3 \hat{\sigma}_t^\gamma}{D_t^2 S_t^2 \hat{\sigma}_t}, \\ \gamma_t^{qs3} &= S_t^1 \frac{\mathcal{K}_t S_t^2 \hat{\sigma}_t^\beta + \hat{D}_t S_t^3 (\hat{\sigma}_t \hat{\gamma}_t^p + \hat{\sigma}_t^\gamma)}{D_t^3 S_t^3 \hat{\sigma}_t} \end{aligned}$$

и

$$\beta_t^{qs} = \frac{\mathbb{C}_t^{qs} - \gamma_t^{qs1} D_t^1 S_t^1 - \gamma_t^{qs2} D_t^2 S_t^2 - \gamma_t^{qs3} D_t^3 S_t^3}{B_t}.$$

Утверждение теоремы следует из (5.52).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alfonsi A., Jourdain B. General duality for perpetual American options. — Int. J. Theor. Appl. Fin., 2008, v. 11, № 6, p. 545–566.
2. Alfonsi A., Jourdain B. Exact volatility calibration based on a Dupire-type call-put duality for perpetual American options. — Nonlinear Differ. Eq. Appl., 2009, v. 16, № 4, p. 523–554.
3. Andreasen J. The pricing of discretely sampled Asian and lookback options: a change of numeraire approach. — J. Comput. Finance, 1998, v. 2, № 1, p. 5–30.
4. Bates D. S. The skewness premium: option pricing under asymmetric processes. — Advances in Futures and Options Research, v. 9. Ed. by P. P. Boyle, P. Ritchken, and G. Pennacchi. Stamford: JAI Press, 1997, p. 51–82.
5. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. — J. Polit. Econ., 1973, v. 81, p. 637–654.

6. Carr P. European put call symmetry. Preprint, Cornell University, 1994.
7. Carr P., Chesney M. American put call symmetry. Preprint, H.E.C., 1996; <http://www.math.nyu.edu/research/carrp/research.html>
8. Carr P., Ellis K., Gupta V. Static hedging of exotic options. — J. Finance, 1998, v. 53, № 3, p. 1165–1190.
9. Chesney M., Gibson R. State space symmetry and two factor option pricing models. — Advances in Futures and Options Research, v. 8. Ed. by P. P. Boyle, F. A. Longstaff, and P. Ritchken. Stamford: JAI Press, 1995, p. 85–112.
10. Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. — Math. Ann., 1994, v. 300, № 3, p. 463–520.
11. Detemple J. American options: symmetry properties. — Option Pricing, Interest Rates and Risk Management. Ed. by J. Cvitanić, E. Jouini, and M. Musiela. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001, p. 67–104.
12. Dupire B. Pricing with a smile. — Risk, 1994, v. 7, № 1, p. 18–20.
13. Eberlein E., Kluge W., Papapantoleon A. Symmetries in Lévy term structure models. — Int. J. Theor. Appl. Finance, 2006, v. 9, № 6, p. 967–986.
14. Eberlein E., Papapantoleon A. Equivalence of floating and fixed strike Asian and lookback options. — Stochastic Process. Appl., 2005, v. 115, № 1, p. 31–40.
15. Eberlein E., Papapantoleon A. Symmetries and pricing of exotic options in Lévy models. — Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models. Ed. by A. Kyprianou, W. Schoutens, and P. Wilmott. Chichester: Wiley, 2005, p. 99–128.
16. Eberlein E., Papapantoleon A., Shiryaev A. N. On the duality principle in option pricing: semimartingale setting. — Finance Stoch., 2006, v. 12, № 2, p. 265–292.
17. Eberlein E., Papapantoleon A., Shiryaev A. N. Esscher transform and the duality principle for multidimensional semimartingales. — Finance Stoch., 2008, v. 12, № 2, p. 265–292.
18. El Karoui N., Quenez M. C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. — SIAM J. Control Optim., 1995, v. 33, № 1, p. 29–66.
19. Fajardo J., Mordecki E. Skewness premium with Lévy processes. IBMEC RJ Economics Discussion Paper № 2006-04. Rio de Janeiro: IBMEC Business School, 2006; arXiv:0810.4485v1.
20. Fajardo J., Mordecki E. Symmetry and duality in Lévy markets. — Quant. Finance, 2006, v. 6, № 3, p. 219–227.
21. Geman H., Eydeland A. Domino effect. — Risk, 1995, v. 8, № 4, p. 65–67.
22. Geman H., El Karoui N., Rochet J.-C. Changes of numéraire, changes of probability measures and option pricing. — J. Appl. Probab., 1995, v. 32, № 2, p. 443–458.
23. Geman H., Yor M. Quelques relations entre processus de Bessel, options asiatiques et fonctions confluentes hypergéométriques. — C.R. Acad. Sci. Paris, 1992, v. 1314, № 6, p. 471–474.
24. Geman H., Yor M. Bessel processes, Asian options, and perpetuities. — Math. Finance, 1993, v. 3, № 4, p. 349–375.
25. Grabbe J. O. The pricing of call and put options on foreign exchange. — J. Int. Money Finance, 1983, v. 2, p. 239–253.
26. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 661 p.
27. Henderson V., Wojakowski R. On the equivalence of floating- and fixed-strike Asian options. — J. Appl. Probab., 2002, v. 39, № 2, p. 391–394.
28. Heynen R. C., Kat H. M. Pricing and hedging power options. — Financ. Engin. Japan. Markets, 1996, v. 3, p. 253–261.
29. Hoffman I. D. Lognormal processes in finance. Doctoral dissertation. Sydney: University of New South Wales, 1993.
30. Kallsen J. Optimal portfolios for exponential Lévy processes. — Math. Methods Oper. Res., 2000, v. 51, № 3, p. 357–374.
31. Kallsen J., Shiryaev A. N. The cumulant process and Esscher's change of measure. — Finance Stoch., 2002, v. 6, № 4, p. 397–428.
32. Kramkov D. O. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. — Probab. Theory Related Fields, 1996, v. 105, № 4, p. 459–479.

33. *Kyprianou A. E.* Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 373 p.
34. *Lipton A.* Mathematical Methods for Foreign Exchange a Financial Engineer's Approach. River Edge: World Sci. Publ., 2001, 676 p.
35. *Peskir G., Shiryaev A. N.* A note on the call-put parity and a call-put duality. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 1, с. 181–183.
36. *Peskir G., Shiryaev A.* Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
37. *Shepp L. A., Shiryaev A. N.* The Russian option: reduced regret. — Ann. Appl. Probab., 1993, v. 3, № 3, p. 631–640.
38. *Шенн Л. А., Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона». — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 130–149.
39. *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2004, 519 с.
40. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики, т. 1, 2. М.: ФАЗИС, 1017 с.
41. *Schroder M.* Changes of numeraire for pricing futures, forwards and options. — Rev. Financ. Stud., 1999, v. 12, p. 1143–1163.
42. *Skiadopoulos G.* Volatility smile consistent option models: a survey. — Int. J. Theor. Appl. Finance, 2001, v. 4, p. 403–437.
43. *Vanmaele M., Deelstra G., Liinev J., Dhaene J., Goovaerts M. J.* Bounds for the price of discrete arithmetic Asian options. — J. Comput. Appl. Math., 2006, v. 185, № 1, p. 51–90.
44. *Večeř J.* Unified Asian pricing. — Risk, 2002, v. 15, № 6, p. 113–116.
45. *Večeř J., Xu M.* Pricing Asian options in a semimartingale model. — Quant. Finance, 2004, v. 4, № 2, p. 170–175.

Поступила в редакцию
27.VIII.2010