Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Перельман, К вопросу о справедливости формулы Ито для разрывной функции, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 3, 478–493

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:48:03

© 2011 г.

ПЕРЕЛЬМАН Г. В.*

К ВОПРОСУ О СПРАВЕДЛИВОСТИ ФОРМУЛЫ ИТО ДЛЯ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ¹⁾

В работе получены два обобщения классической формулы Ито для броуновского движения: получена формула, справедливая для функций, имеющих разрыв производной вдоль гладкой кривой, а также формула, справедливая для функций, имеющих разрыв вдоль монотонной гладкой кривой.

Ключевые слова и фразы: формула Ито, броуновское движение, винеровский процесс, дискретная формула Ито, формула Танака.

1. Введение. Рассмотрим различные известные варианты и обобщения формулы Ито.

Классическая формула Ито для функции из $C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ и броуновского движения выглядит следующим образом.

Предложение 1 (Ито [7]). Пусть $F \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$, W_t — стандартное броуновское движение. Тогда

$$F(t, W_t) - F(0, 0) = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, W_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, W_s) ds.$$

В связи с тем что формула является одной из ключевых в теории стохастического исчисления, большое число работ направлены на обобщение классического результата, связанное с расширением классов функций и процессов, к которым она применима.

Большое значение имеет формула Танака, в которой выписывается аналогичная формула для недифференцируемой функции модуль.

Предложение 2 (Формула Танака).

$$|W_t - a| = |W_0 - a| + \int_0^t \text{sign}(W_s - a) dW_s + L_t^a,$$

$$\text{где } L_t^a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_0^t I(|W_s - a| \leq \varepsilon) ds.$$

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: glebperelman@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-08-01070-а).

Ниже приведены примеры, последовательно обобщающие класс допустимых функций.

Предложение 3 (Ито–Танака–Мейер [8]). Пусть F дифференцируема и $F'(x)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда

$$F(W_t) = F(W_0) + \int_0^t F'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} L_t^a F''(da).$$

Предложение 4 (Було–Йор [9]). Пусть F дифференцируема и $F'(x)$ локально ограничена. Тогда

$$F(W_t) = F(W_0) + \int_0^t F'(W_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} F'(a) d_a L_t^a.$$

Предложение 5 (Фёлмер–Проттер–Ширяев [4]). Пусть F дифференцируема и $F' \in L_{\text{loc}}^2$. Тогда

$$F(W_t) = F(W_0) + \int_0^t F'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} [F(W), W]_t,$$

где $[F(W), W]_t = \mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k (F'(W_{t_{k+1}^n \wedge t}) - F'(W_{t_k^n \wedge t}))(W_{t_{k+1}^n \wedge t} - W_{t_k^n \wedge t})$ и $\sup_k (t_{k+1}^n \wedge t - t_k^n \wedge t) \rightarrow 0$.

Также имеются результаты Н. Айзенбаум [10] и А. С. Черного [5] для абсолютно непрерывных функций, на которые наложены определенные условия (касающиеся существования некоторых интегралов).

Наиболее близким к результатам настоящей работы является результат Пешкира, полученный в 2002 г.:

Предложение 6 (Пешкир [2]). Пусть X_t — непрерывный семимартингал, $b: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ — функция ограниченной вариации,

$$C = \{(s; x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \mid x < g(s)\}, \quad D = \{(s; x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \mid x > g(s)\}$$

и непрерывная функция $F: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ является функцией класса $C^{1,2}$ на замыканиях множеств C и D .

Тогда

$$\begin{aligned} F(t, X_t) = & F(0, X_0) + \int_0^t F_t(s, X_{s-}) ds + \int_0^t F_x(s, X_{s-}) dX_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(s, X_s) I(X_s \neq b(s)) d\langle X, X \rangle_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t (F_x(s, X_{s+}) - F_x(s, X_{s-})) I(X_s = b(s)) d\ell_s^b, \end{aligned}$$

где ℓ_s^b — локальное время X_t на кривой $b(t)$:

$$\ell_s^b = \mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s I(b(r) \leq X_r < b(r) + \varepsilon) d\langle X, X \rangle_r.$$

В данной работе получено два результата, близких к результату, сформулированному в предложении 6. Первый результат является более слабым вариантом. Второй применим к более общему классу функций — функции могут иметь разрыв по кривой (в работе [2] и в первой части настоящей работы допускаются только разрывы производных).

2. Случай непрерывной функции.

Теорема 1. Пусть функция $g \in C^1$, $g(0) \neq 0$, является границей множества A в $\mathbf{R}^2$, F непрерывна и имеет вид

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x) \in C^{1,2}(\overline{A}), \\ \phi(t, x) \in C^{1,2}(\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \setminus A}). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & F(t, W_t) - F(0, 0) \\ &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds \\ &+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \frac{F'_{x+}(s, g(s)) - F'_{x-}(s, g(s))}{2} I(|W_s - g(s)| < \varepsilon) ds, \quad (1) \end{aligned}$$

если последний предел существует.

Здесь и далее

$$\begin{aligned} F'_t &= \frac{\partial F}{\partial t}, \quad F'_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F''_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ F'_{x+}(s, g(s)) &= \lim_{t \rightarrow s+0} F'_x(t, g(s)), \quad F'_{x-}(s, g(s)) = \lim_{t \rightarrow s-0} F'_x(t, g(s)). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим тождество, которое также иногда называют дискретной формулой Ито для симметричного случайного блуждания Z_t :

$$\begin{aligned} F(t+1, Z_{t+1}) - F(t, Z_t) &= F(t+1, Z_t) - F(t, Z_t) \\ &+ \frac{F(t+1, Z_t+1) - F(t+1, Z_t-1)}{2} (Z_{t+1} - Z_t) \\ &+ \frac{F(t+1, Z_t+1) - 2F(t+1, Z_t) + F(t+1, Z_t-1)}{2}. \quad (2) \end{aligned}$$

В справедливости этой формулы легко убедиться простой подстановкой обоих возможных случаев: $Z_{t+1} = Z_t + 1$ и $Z_{t+1} = Z_t - 1$.

Заметим, что достаточно доказать формулу (1) для функции F с компактным носителем и для фиксированного t . Введем приближение

броуновского движения случайным блужданием. Для натурального n определим следующие моменты:

$$\begin{aligned}\tau_{n,0} &:= 0; \\ \tau_{n,i} &:= \inf \left\{ s > \tau_{n,i-1} : |W_s - W_{\tau_{n,i-1}}| = \frac{\sqrt{t}}{2^n} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

В силу строго марковского свойства броуновского движения эти моменты будут независимы и одинаково распределены.

Вспомним, что процессы W_s , $W_s^2 - s$ и $W_s^4 - 6sW_s^2 + 3s^2$ — мартингалы.

По теореме Дуба о преобразовании свободного выбора (Doob's optional sampling theorem) процессы

$$\begin{aligned}W_{s \wedge \tau_{n,1}}, \quad W_{s \wedge \tau_{n,1}}^2 - (s \wedge \tau_{n,1}), \\ W_{s \wedge \tau_{n,1}}^4 - 6(s \wedge \tau_{n,1})W_{s \wedge \tau_{n,1}}^2 + 3(s \wedge \tau_{n,1})^2\end{aligned}$$

также являются мартингалами. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E} W_{s \wedge \tau_{n,1}} &= 0, \quad \mathbf{E} s \wedge \tau_{n,1} = \mathbf{E} W_{s \wedge \tau_{n,1}}^2, \\ \mathbf{E} (s \wedge \tau_{n,1})^2 &= -\frac{1}{3} \mathbf{E} W_{s \wedge \tau_{n,1}}^4 + 2 \mathbf{E} [(s \wedge \tau_{n,1}) W_{s \wedge \tau_{n,1}}^2].\end{aligned}$$

Устремляя s к бесконечности, получаем:

$$\mathbf{E} W_{\tau_{n,1}} = 0, \quad \mathbf{E} \tau_{n,1} = \frac{t}{2^{2n}}, \quad \mathbf{E} (\tau_{n,1})^2 = \frac{5}{3} \frac{t^2}{2^{4n}}. \quad (3)$$

Значит, $\tau_{n,i} - it/2^{2n}$ — мартингал. Отсюда, из (3) и из неравенства Дуба для субмартингалов следует, что

$$\mathbf{P} \left[\sup_{1 \leq i \leq 2^{2n}} \left| \tau_{n,i} - i \frac{t}{2^{2n}} \right| > \varepsilon \right] \leq \varepsilon^{-2} \mathbf{E} (\tau_{n,2^{2n}} - t)^2 = \varepsilon^{-2} \frac{2}{3} \frac{t^2}{2^{4n}}. \quad (4)$$

Применяя лемму Бореля–Кантелли, получаем

$$\mathbf{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq 2^{2n}} \left| \tau_{n,i} - i \frac{t}{2^{2n}} \right| = 0 \right] = 1. \quad (5)$$

Из равенства (5) и равномерной непрерывности функции, определенной на компактном интервале, следует, что

$$\mathbf{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq 2^{2n}} |W_{\tau_{n,i}} - W_{it/2^{2n}}| = 0 \right] = 1. \quad (6)$$

Используя дискретную формулу Ито (2) и дискретную аппроксимацию броуновского движения, получаем

$$\begin{aligned}
 F(\tau_{n,2^{2n}}, W_{\tau_{n,2^{2n}}}) - F(0, 0) &= \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) \\
 &+ \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n) - F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)}{2\sqrt{t}/2^n} \\
 &\quad \times (W_{\tau_{n,i+1}} - W_{\tau_{n,i}}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \left(F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) - 2F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) \right. \\
 &\quad \left. + F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \right). \tag{7}
 \end{aligned}$$

Левая часть равенства согласно (5) и (6) стремится к $F(t, W_t) - F(0, 0)$. Рассмотрим правую часть.

Пусть A_n обозначает первое слагаемое в правой части (7). Тогда

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) \\
 &= \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})}{\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}} (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}).
 \end{aligned}$$

Обозначим множество тех i , для которых отрезок, соединяющий точки $(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}})$ и $(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})$, не пересекает границу $g(t)$ через U_1^n , а множество оставшихся через U_2^n . Тогда

$$A_n = \sum_{U_1^n} F'_t(\xi_i, W_{\tau_{n,i}})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) + \sum_{U_2^n} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})),$$

где ξ_i — точка на интервале $(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1})$ из теоремы Лагранжа.

Рассмотрим сумму по U_2^n . Воспользовавшись равномерной непрерывностью функции, непрерывной на компакте, получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{U_2^n} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) &< \sum_{U_2^n} c(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) \\
 &\leq c \max_i (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) \cdot \#\{i \in U_2^n\} \sim ct \frac{\#\{i \in U_2^n\}}{2^{2n}} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

(здесь $\#\{\cdot\}$ — количество элементов в множестве).

Рассмотрим сумму по U_1^n :

$$\sum_{U_1^n} F'_t(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) + \sum_{U_1^n} (F'_t(\xi_i, W_{\tau_{n,i}}) - F'_t(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}}))(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}).$$

Воспользуемся тем, что функция F'_t , непрерывная на каждой из двух областей непрерывности, равномерно непрерывна на них. Пусть c_j , $j = 1, 2$, — константы из условия равномерной непрерывности для этих областей. Если мы выберем $c = \max\{c_1, c_2\}$, то для любых двух точек из одной области непрерывности (не важно для какой)

$$|F(t_1, W_{t_1}) - F(t_2, W_{t_2})| < c|t_1 - t_2|.$$

Точки $\tau_{n,i}$ и ξ_i для $i \in U_1^n$ находятся в одной области непрерывности, поэтому, воспользовавшись последним неравенством, получим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{U_1^n} (F'_t(\xi_i, W_{\tau_{n,i}}) - F'_t(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}}))(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) \right| \\ & < \sum_{U_1^n} c(\xi_i - \tau_{n,i})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) < ct \max_i (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}), \end{aligned}$$

что стремится к нулю согласно (5).

Рассмотрим $\sum_{U_1^n} F'_t(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i})$. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда согласно (5) существует такое N , что для любого $n > N$

$$\begin{aligned} & \sum_{U_1^n} F'_t(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) I(\rho((\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}}), g) > \varepsilon) \\ & = \sum_{i=1}^{2^{2n}-1} F'_t(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) I(\rho((\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}}), g) > \varepsilon), \end{aligned}$$

где ρ есть расстояние от точки до графика.

Последняя сумма есть риманова сумма для интеграла $\int_0^t F'_t(s, B_s) \times I(\rho((s, B_s), g) > \varepsilon) ds$.

Устремляя n к бесконечности и ε к нулю, получаем

$$\sum_{U_1^n} F'_t(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) \rightarrow \int_0^t F'_t(s, B_s) I(B_s \neq g(s)) ds.$$

Перейдем ко второму слагаемому в правой части (7). Обозначим

$$\begin{aligned} H_n(s) &:= \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n) - F((\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)}{2(\sqrt{t}/2^n)} \\ & \quad \times I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s), \\ K_n(s) &:= \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{F(s, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n) - F(s, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)}{2(\sqrt{t}/2^n)} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s). \end{aligned}$$

Пусть U_3^n обозначает множество тех $0 \leq i < 2^{2n}$, для которых график $x = g(t)$ не пересекает квадрат между точками $(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^{2n})$ и $(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^{2n})$. Множество оставшихся i обозначим U_4^n .

Используя введенные множества, разобьем $K_n(s)$ на две части:

$$K_n^{(1)}(s) := \sum_{U_3^n} \frac{F(s, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n) - F(s, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)}{2(\sqrt{t}/2^n)} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s),$$

$$K_n^{(2)}(s) := \sum_{U_4^n} \frac{F(s, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n) - F(s, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)}{2(\sqrt{t}/2^n)} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s).$$

Таким образом, второе слагаемое формулы (7) может быть перепи-
сано как $\int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} H_n(s) dW_s$.

Выберем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} p_n &:= \mathbf{P} \left[\left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} H_n(s) dW_s - \int_0^t F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| > \delta \right] \\ &\leq \mathbf{P} \left[\left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} K_n dW_s - \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} H_n dW_s \right| > \frac{\delta}{6} \right] + \mathbf{P} \left[\left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} K_n^{(2)} dW_s \right| > \frac{\delta}{6} \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[\left\{ \left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} K_n^{(1)}(s) dW_s - \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| > \frac{\delta}{3} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cap \{ |\tau_{n,2^{2n}} - t| \leq \varepsilon \} \right] \\ &\quad + 2\mathbf{P}[|\tau_{n,2^{2n}} - t| > \varepsilon] + \mathbf{P} \left[\left\{ \left| \int_t^{\tau_{n,2^{2n}}} F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| > \frac{\delta}{3} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cap \{ 0 \leq \tau_{n,2^{2n}} - t \leq \varepsilon \} \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[\left\{ \left| \int_t^{\tau_{n,2^{2n}}} F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| > \frac{\delta}{3} \right\} \cap \{ -\varepsilon \leq t - \tau_{n,2^{2n}} \leq 0 \} \right] \\ &\leq \mathbf{P} \left[\left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} (K_n - H_n) dW_s \right| > \frac{\delta}{6} \right] + \mathbf{P} \left[\left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} K_n^{(2)} dW_s \right| > \frac{\delta}{6} \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t+\varepsilon} \left| \int_0^\tau (K_n^{(1)}(s) - F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s))) dW_s \right| > \frac{\delta}{3} \right] \\ &\quad + 2\mathbf{P}[|\tau_{n,2^{2n}} - t| > \varepsilon] + \mathbf{P} \left[\sup_{t \leq \tau \leq t+\varepsilon} \left| \int_t^\tau F'_x(s, W_s) dW_s \right| > \frac{\delta}{3} \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[\left| \int_{t-\varepsilon}^t F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| > \frac{\delta}{6} \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[\sup_{t-\varepsilon \leq \tau \leq t} \left| \int_{t-\varepsilon}^\tau F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| > \frac{\delta}{6} \right]. \end{aligned}$$

Применяя к слагаемым предыдущего выражения максимальное неравен-
ство для субмартингалов, неравенства Чебышёва, Иенсена и изометрию
Интеграла Ито, получим

$$p_n \leq \frac{6}{\delta} \mathbf{E} \left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} (K_n(s) - H_n(s)) dW_s \right| + \frac{6}{\delta} \mathbf{E} \left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} K_n^{(2)}(s) dW_s \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{\delta} \mathbf{E} \left| \int_0^{t+\varepsilon} (K_n(s) - F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s))) dW_s \right| + \frac{2}{\varepsilon} \mathbf{E} |\tau_{n,2^{2n}} - t| \\
& + \frac{3}{\delta} \mathbf{E} \left| \int_t^{t+\varepsilon} F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| \\
& + \frac{12}{\delta} \mathbf{E} \left| \int_{t-\varepsilon}^t F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s \right| \\
& \leq \frac{6}{\delta} \left(\mathbf{E} \left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} (K_n(s) - H_n(s))^2 ds \right| \right)^{1/2} \\
& + \frac{6}{\delta} \left(\mathbf{E} \left| \int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} (K_n^{(2)}(s))^2 ds \right| \right)^{1/2} \\
& + \frac{3}{\delta} \left(\mathbf{E} \left| \int_0^{t+\varepsilon} (K_n^{(1)}(s) - F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)))^2 ds \right| \right)^{1/2} \\
& + \frac{2}{\varepsilon} (\mathbf{E} (\tau_{n,2^{2n}} - t)^2)^{1/2} + \frac{3}{\delta} \left(\mathbf{E} \left| \int_t^{t+\varepsilon} F'_x(s, W_s)^2 I(W_s \neq g(s)) ds \right| \right)^{1/2} \\
& + \frac{12}{\delta} \left(\mathbf{E} \left| \int_{t-\varepsilon}^t F'_x(s, W_s)^2 I(W_s \neq g(s)) ds \right| \right)^{1/2}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Воспользовавшись ограниченностью $F'_x \cdot I(W_s \neq g(s))$ для последних двух слагаемых, равномерной непрерывностью F (для разности $K_n(s) - H_n(s)$) и оценкой (4) (для четвертого слагаемого), получаем, что при стремлении n к бесконечности, а ε к нулю эти слагаемые будут стремиться к нулю. Второе слагаемое также стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности. Для доказательства воспользуемся равномерной ограниченностью F (знаменатель сократится) и получим выражение, к которому можно применить рассуждения, использованные при работе с первым слагаемым суммы (7).

Осталось разобраться с третьим слагаемым в (8).

Применим к $K_n^{(1)}$ теорему Лагранжа (о среднем значении):

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \int_0^{t+\varepsilon} \left(K_n^{(1)}(s) - F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) \right)^2 ds \\
& = \mathbf{E} \int_0^{t+\varepsilon} \left(\sum_{U_3^n} F'_x \left(s, W_{\tau_{n,i}} + \theta \frac{\sqrt{t}}{2^n} \right) I(W_s \neq g(s)) I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) \right. \\
& \quad \left. - F'_x(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) \right)^2 ds \text{ (здесь } \theta = \theta(W_{\tau_{n,i}}) \text{ и } |\theta| < 1) \\
& = \sum_{U_3^n} \mathbf{E} \int_0^{t+\varepsilon} \left(F'_x \left(s, W_{\tau_{n,i}} + \theta \frac{\sqrt{t}}{2^n} \right) - F'_x(s, W_s) \right)^2 I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) ds \\
& + \sum_{U_4^n} \mathbf{E} \int_0^{t+\varepsilon} F'_x(s, W_s)^2 I(W_s \neq g(s)) I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) ds \\
& + \mathbf{E} \int_0^{t+\varepsilon} F'_x(s, W_s)^2 I(W_s \neq g(s)) I_{(\tau_{n,2^{2n}}, \infty)}(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{U_3^n} \mathbf{E} \left[\left(\sup_{\tau_{n,i} \leq s \leq \tau_{n,i+1}} \left| F'_x \left(s, W_{\tau_{n,i}} + \theta \frac{\sqrt{t}}{2^n} \right) - F'_x(s, W_s) \right| \right)^2 (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) \right] \\
&\quad + M^2 \sum_{U_4^n} \mathbf{E} \int_0^{t+\varepsilon} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) ds + M^2 \mathbf{E} |\tau_{n,2^{2n}} - t - \varepsilon| \\
&\quad \quad \quad (\text{здесь } M \text{ — максимум } |F'_x| I(W_s \neq g(s))) \\
&\leq \sum_{U_3^n} \left(\mathbf{E} \left(\sup_{\tau_{n,i} \leq s \leq \tau_{n,i+1}} \left| F'_x \left(s, W_{\tau_{n,i}} + \theta \frac{\sqrt{t}}{2^n} \right) - F'_x(s, W_s) \right| \right)^4 \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \times \mathbf{E} (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i})^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + M^2 \sum_{U_4^n} \frac{t}{2^{2n}} + M^2 \mathbf{E} (\tau_{n,2^{2n}} - t)^2 + M^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

При последнем переходе было использовано второе равенство в (3). Применяя третье равенство в (3), получаем, что последнее выражение не превосходит

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{5}{3}} t \left(\mathbf{E} \left(\sup \left\{ |F'_x(s, u) - F'_x(s, v)| : |u - v| \right. \right. \right. \\
&\quad \leq \sup_{\substack{0 \leq i \leq 2^{2n}-1 \\ \tau_{n,i} \leq s \leq \tau_{n,i+1}}} \left| W_{\tau_{n,i}} + \theta \frac{\sqrt{t}}{2^n} - W_s \right|, t \in \bigcup_{i \in U_3^n} (\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}) \left. \left. \right\} \right)^4 \Big)^{1/2} \\
&\quad + M^2 t \frac{\# \{U_4^n\}}{2^{2n}} + M^2 \mathbf{E} (\tau_{n,2^{2n}} - t)^2 + M^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Согласно (5),

$$\sup_{\substack{0 \leq i \leq 2^{2n}-1 \\ \tau_{n,i} \leq s \leq \tau_{n,i+1}}} |s - \tau_{n,i}| = \sup_{0 \leq i \leq 2^{2n}-1} |\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}| \leq 2 \sup_{1 \leq i \leq 2^{2n}} \left| \tau_{n,i} - i \frac{t}{2^{2n}} \right| + \frac{t}{2^{2n}},$$

последнее выражение стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

В силу равномерной непрерывности непрерывной функции, определенной на компакте, равномерной непрерывности F'_x на каждой из областей (и выбора максимального коэффициента), получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |F'_x(s, u) - F'_x(s, v)| : |u - v| \leq \sup_{\substack{0 \leq i \leq 2^{2n}-1 \\ \tau_{n,i} \leq s \leq \tau_{n,i+1}}} \left| W_{\tau_{n,i}} + \theta \frac{\sqrt{t}}{2^n} - W_s \right| \right\} = 0.$$

Таким образом, мы получили желаемое для третьего слагаемого в (8) и, следовательно, для второй суммы в (7).

Перейдем к рассмотрению третьей суммы в правой части (7)

$$\sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \left(F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}) - 2F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) + F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n}) \right).$$

Аналогично тому, что мы делали для первого слагаемого в (7), пусть U_5^n обозначает множество тех i , для которых отрезок, соединяющий точки $(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)$ и $(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n)$, не пересекает границу $g(t)$, а U_6^n — множество остальных i . Тем самым мы разбили сумму на две части (по соответствующим подмножествам).

Рассмотрим сумму по U_5^n :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{U_5^n} \left(F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) - 2F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) + F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t F''_{xx}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds \right| \\ & \leq \left| \sum_{U_5^n} \left(F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) - 2F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \right) - \sum_{U_5^n} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{it/2^{2n}}) \frac{t}{2^{2n}} \right| \\ & \quad + \left| \sum_{U_5^n} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{it/2^{2n}}) \left(\frac{t}{2^{2n}} - (\tau(n, i+1) - \tau(n, i)) \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{U_5^n} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{it/2^{2n}}) \frac{t}{2^{2n}} - \int_0^t F''_{xx}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds \right|. \quad (9) \end{aligned}$$

Используя равномерную непрерывность, переходим от $F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}})$ к $F''_{xx}(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})$, после этого пользуемся интегрируемостью второй производной по Риману и получаем, что

$$\sum_{U_5^n} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i+1}})(\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) \rightarrow \int_0^t F''_{xx}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds$$

(действуем так же, как при разборе аналогичной суммы первого слагаемого в правой части (7))

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{U_5^n} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{it/2^{2n}}) \left(\frac{t}{2^{2n}} - (\tau(n, i+1) - \tau(n, i)) \right) \right| \\ & \leq M \left| \sum_{U_5^n} \left(\frac{t}{2^{2n}} - (\tau(n, i+1) - \tau(n, i)) \right) \right| \leq M |t - \tau_{n,2^{2n}}|. \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю (это доказано при разборе второго слагаемого суммы (7)).

К первому слагаемому в правой части (9) (обозначим его R_3^n) применим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

(остаточный член второго порядка, разложение по x):

$$\begin{aligned}
 R_3^n \leq & \sum_{U_5^n} \left| \int_{W_{\tau_{n,i}}}^{W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, x) \left(W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n} - x \right) dx \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) \frac{t}{2^{2n}} \right| \\
 & + \sum_{U_5^n} \left| \int_{W_{\tau_{n,i}}}^{W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, x) \left(W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n} - x \right) dx \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} F''_{xx}(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) \frac{t}{2^{2n}} \right| \\
 & + t \sup \left\{ |F''_{xx}(s, u) - F''_{xx}(s, v)| : \right. \\
 & \left. 0 \leq u - v \leq \sup_{1 \leq i \leq 2^{2n}} |W_{\tau_{n,i}} - W_{it/2^{2n}}|, x \neq g(s) \forall x \in (u, v) \right\}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что для действительных x и y и дважды непрерывно-дифференцируемой функции f

$$\left| \int_x^y f''(s)(y-s) ds - \frac{1}{2} f''(x)(y-x)^2 \right| \leq (y-x)^2 \sup_{|u-v| \leq |x-y|} |f''(u) - f''(v)|.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 R_3^n \leq & 2t \sup \left\{ |F''_{xx}(s, u) - F''_{xx}(s, v)| : |u - v| \leq \frac{\sqrt{t}}{2^n}, x \neq g(s) \forall x \in (u, v) \right\} \\
 & + t \sup \left\{ |F''_{xx}(s, u) - F''_{xx}(s, v)| : |u - v| \leq \sup_{i \in U_5^n} |W_{\tau_{n,i}} - W_{it/2^{2n}}|, \right. \\
 & \left. x \neq g(s) \forall x \in (u, v) \right\}.
 \end{aligned}$$

Согласно равномерной непрерывности второй производной в каждой из областей непрерывности и формуле (6), правая часть последнего неравенства стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

Для завершения доказательства рассмотрим оставшиеся слагаемые (по U_6^n) третьей суммы.

Заметим, что если у нас образовалась одна «критическая» тройка (у которой соответствующий отрезок пересекает границу областей), то образуется и вторая, отличающаяся от нее на одну точку. Иными словами, на плоскости две тройки образуют «критическую» четверку точек, имеющих по оси t координату $\tau_{n,i+1}$, а по оси x координаты $W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n$, $W_{\tau_{n,i}}$, $W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n$ и $W_{\tau_{n,i}} + 2\sqrt{t}/2^n$. Индикаторы выбираем так, чтобы не считать образовавшиеся тройки по два раза (домножая выражение на 2).

Преобразуем оставшиеся слагаемые:

$$\begin{aligned}
& \sum_{U_6^n} \left(F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}) - 2F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) + F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{2^{2n}-2} \left(F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + 2\frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) - F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \right. \\
&\quad \left. - F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) + F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \right) \\
&\quad \times I\left(0 \leq g(\tau_{n,i+1}) - W_{\tau_{n,i}} < \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \\
&+ \sum_{i=0}^{2^{2n}-2} \left(F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + 2\frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) - F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \right. \\
&\quad \left. - F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) + F\left(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \right) \\
&\quad \times I\left(0 \leq W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n} - g(\tau_{n,i+1}) < \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

По теореме Лагранжа (о среднем значении) последнее выражение равно

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{2^{2n}-2} \left(F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{1,i}^n) \frac{\sqrt{t}}{2^n} - F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{2,i}^n) \frac{\sqrt{t}}{2^n} \right) \\
&\quad \times I\left(0 \leq g(\tau_{n,i+1}) - W_{\tau_{n,i}} < \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right) \\
&+ \sum_{i=0}^{2^{2n}-2} \left(F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{3,i}^n) \frac{\sqrt{t}}{2^n} - F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{4,i}^n) \frac{\sqrt{t}}{2^n} \right) \\
&\quad \times I\left(0 \leq W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n} - g(\tau_{n,i+1}) < \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

Обозначим $\varepsilon := (\sqrt{t}/2^{n+1})n$, тогда последнее выражение примет вид

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{2^{2n}-2} (F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{1,i}^n) - F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{2,i}^n)) \frac{1}{4\varepsilon} I(0 \leq g(\tau_{n,i+1}) - W_{\tau_{n,i}} < \varepsilon) \frac{t}{2^{2n}} \\
&+ \sum_{i=0}^{2^{2n}-2} (F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{3,i}^n) - F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{4,i}^n)) \\
&\quad \times \frac{1}{4\varepsilon} I\left(0 \leq W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n} - g(\tau_{n,i+1}) < \varepsilon\right) \frac{t}{2^{2n}}.
\end{aligned}$$

Так как из каждой «критической» четверки мы выбираем одну тройку, то хотя бы один из индикаторов будет равен нулю. Поэтому

введем пару $\eta_{5,i}^n$ и $\eta_{6,i}^n$ — равную либо паре $\eta_{1,i}^n, \eta_{2,i}^n$, либо паре $\eta_{3,i}^n, \eta_{4,i}^n$, — для которой индикатор не равен нулю (в случае, если оба индикатора равны нулю, можно выбрать любую пару).

Используя новые обозначения, перепишем последнее выражение в виде

$$\sum_{i=0}^{2^{2n}-2} (F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{5,i}^n) - F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{6,i}^n)) \frac{1}{4\varepsilon} I(|W_{\tau_{n,i}} - g(\tau_{n,i+1})| < \varepsilon) \frac{t}{2^{2n}}.$$

Рассуждения, аналогичные рассуждениям для суммы по U_5^n позволяют заменить предел этого выражение пределом следующего:

$$\sum_{i=0}^{2^{2n}-2} (F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{5,i}^n) - F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{6,i}^n)) \frac{1}{4\varepsilon} I(|W_{\tau_{n,i}} - g(\tau_{n,i+1})| < \varepsilon) (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}).$$

Разбиваем на две отдельные суммы и устремляем n к бесконечности. Каждая из них будет стремиться к интегралу, аналогичному локальному времени ($L_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_0^t I(|W_s| \leq \varepsilon) ds$). При этом $F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{5,i}^n)$ и $F'_x(\tau_{n,i+1}, \eta_{6,i}^n)$ перейдут соответственно в пределы производной справа и слева.

Таким образом, мы получили, что «оставшиеся» слагаемые третьей суммы стремятся к

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \frac{F'_{x+}(s, g(s)) - F'_{x-}(s, g(s))}{2} I(|W_s - g(s)| < \varepsilon) ds,$$

что вместе с предыдущими рассуждениями доказывает нашу формулу. Теорема 1 доказана.

Следствием теоремы 1 является формула Танака (предложение 2).

3. Случай разрывной функции.

Теорема 2. Пусть монотонная функция $g \in C^1$, $g(0) \neq 0$, является границей множества A в $\mathbf{R}^2$ и

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x) \in C^{1,2}(\bar{A}), \\ \phi(t, x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \setminus A). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(t, W_t) - F(0, 0) &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, W_s) ds \\ &+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (F_{(+)}(s, g(s)) - F_{(-)}(s, g(s))) I(0 < g^{-1}(W_s) - s < \varepsilon) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{F_+(s, g(s)) - F_-(s, g(s))}{2} I(|W_s - g(s)| < \varepsilon) dW_s \\
& + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \frac{F'_{x+}(s, g(s)) - F'_{x-}(s, g(s))}{2} I(|W_s - g(s)| < \varepsilon) ds \quad (10)
\end{aligned}$$

при существовании последних трех пределов.

Здесь и далее:

$$\begin{aligned}
F_+(s, g(s)) &= \lim_{t \rightarrow s+0} F(t, g(s)), & F_-(s, g(s)) &= \lim_{t \rightarrow s-0} F(t, g(s)), \\
F_{(+)}(s, g(s)) &= \lim_{x \rightarrow g(s)+0} F(s, x), & F_{(-)}(s, g(s)) &= \lim_{x \rightarrow g(s)-0} F(s, x).
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о построено аналогично доказательству теоремы 1. Преобразования третьего члена суммы (7) — те же, что были выполнены в ходе доказательства теоремы 1. Отличия будут в разборе двух первых членов суммы (7). Разобьем каждый член на две суммы, аналогично предыдущему доказательству (U_1^n и U_2^n , U_3^n и U_4^n). При рассмотрении сумм по U_1^n и U_3^n единственное изменение заключается в том, что надо воспользоваться равномерной непрерывностью не на всем отрезке $[0, t]$, а на каждой из областей непрерывности отдельно. Основное отличие — в разборе сумм по U_2^n и U_4^n .

Рассмотрим

$$\sum_{U_2^n} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) \quad (11)$$

(напомним, что U_2^n обозначает множество тех i , для которых отрезок, соединяющий точки $(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}})$ и $(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})$, пересекает границу $g(t)$).

Перепишем (11) в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{U_2^n} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) \\
&= \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) I(\tau_{n,i} < g^{-1}(W_{\tau_{n,i}}) < \tau_{n,i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}}) - F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) \\
&\quad \times I(0 < g^{-1}(W_{\tau_{n,i}}) - \tau_{n,i} < \tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}) \frac{1}{\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}} (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}).
\end{aligned}$$

Положим $\varepsilon = \tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}$ и разобьем сумму на разность двух:

$$\sum_{i=0}^{2^{2n}-1} (F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}})) I(0 < g^{-1}(W_{\tau_{n,i}}) - \tau_{n,i} < \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i})$$

и

$$\sum_{i=0}^{2^{2n}-1} (F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})) I(0 < g^{-1}(W_{\tau_{n,i}}) - \tau_{n,i} < \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} (\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}).$$

Перейдем к пределу. В силу равномерной непрерывности F на каждой из областей непрерывности можно перейти от $F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}})$ к $F_{(+)}(g^{-1}(W_{\tau_{n,i+1}}), W_{\tau_{n,i}})$, а от $F(\tau_{n,i}, W_{\tau_{n,i}})$ к $F_{(-)}(g^{-1}(W_{\tau_{n,i+1}}), W_{\tau_{n,i}})$ (надо воспользоваться интегрируемостью интеграла типа локального времени). Таким образом, переходя к пределу по n и суммируя полученные пределы, получаем, что выражение (11) при n , стремящемся к бесконечности, стремится к

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (F_{(+)}(s, g(s)) - F_{(-)}(s, g(s))) I(0 < g^{-1}(W_s) - s < \varepsilon) ds.$$

Осталось рассмотреть остаток второго слагаемого в (7). Мы можем записать его как интеграл от следующего выражения:

$$\sum_{U_4^n} \frac{F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n) - F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)}{2\sqrt{t}/2^n} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s).$$

(Здесь старое U_4^n заменено множеством U_4^n тех i , для которых кривая g пересекает дальнюю стенку квадрата.) Таким образом, мы получаем сумму

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n) - F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} - \sqrt{t}/2^n)}{2\sqrt{t}/2^n} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) \\ & \times I\left(W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n} < g(\tau_{n,i+1}) < W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Разобьем эту сумму на две части. Рассмотрим, например, первую:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n)}{2\sqrt{t}/2^n} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) \\ & I\left(W_{\tau_{n,i}} - \frac{\sqrt{t}}{2^n} < g(\tau_{n,i+1}) < W_{\tau_{n,i}} + \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы также будем пользоваться неравенством Иенсена и изометрией интеграла Ито, так что при равномерной сходимости подынтегрального выражения можно заменять выражение близким ему (в смысле равномерной сходимости).

Далее перейдем от $F(\tau_{n,i+1}, W_{\tau_{n,i}} + \sqrt{t}/2^n)$ к $F_+(\tau_{n,i+1}, g(\tau_{n,i+1}))$ (разность будет стремиться к нулю, данная процедура уже была проделана выше). В результате последняя сумма примет вид

$$\sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{F_+(\tau_{n,i+1}, g(\tau_{n,i+1}))}{2\sqrt{t}/2^n} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) I\left(|g(\tau_{n,i+1}) - W_{\tau_{n,i}}| < \frac{\sqrt{t}}{2^n}\right).$$

В силу равномерной непрерывности $F_+(s)$ можно перейти от $F_+(\tau_{n,i+1}, g(\tau_{n,i+1}))$ к $F_+(s, g(s))$.

Таким образом, последняя сумма может быть записана в виде

$$\int_0^{\tau_{n,2^{2n}}} F_+(s, g(s)) \left(\sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \frac{I(|g(\tau_{n,i+1}) - W_{\tau_{n,i}}| < \sqrt{t}/2^n)}{2\sqrt{t}/2^n} I_{(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]}(s) \right) dW_s.$$

Отсюда получаем, что требуемая сумма стремится к

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{F_+(s, g(s)) - F_-(s, g(s))}{2} I(|W_s - g(s)| < \varepsilon) dW_s.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fujita T., Kawanishi Y.* A Proof of Itô's formula using discrete Itô's formula. — *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2008, v. 45, № 2, p. 125–134.
2. *Peskir G.* A change-of-variable formula with local time on curves. — *J. Theoret. Probab.*, 2005, v. 18, № 3, p. 499–535.
3. *Peskir G., Shiryaev A.* Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. — Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
4. *Föllmer H., Protter P., Shiryaev A. N.* Quadratic covariation and an extension of Itô's formula. — *Bernoulli*, 1995, v. 1, № 1–2, p. 149–169.
5. *Cherny A. S.* Principal values of the integral functionals of Brownian motion: existence, continuity, and an extension of Itô's formula. — *Lecture Notes in Math.*, 2001, v. 1755, p. 348–370.
6. *Ghomrasni R., Peskir G.* Local time-space calculus and extensions of Itô's formula. — *High Dimensional Probability III (Sandbjerg 2002)*. Basel: Birkhäuser, 2003, p. 177–192. (*Progr. Probab.*, p. 55.)
7. *Itô K.* Stochastic integral. — *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1944, v. 20, p. 519–524.
8. *Tanaka H.* Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional Brownian path. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1963, v. 1, p. 251–257.
9. *Bouleau N., Yor M.* Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semimartingales. — *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1981, v. 292, № 9, p. 491–494.
10. *Eisenbaum N.* Integration with respect to local time. — *Potential Anal.*, 2000, v. 13, № 4, p. 303–328.

Поступила в редакцию
4.III.2011