Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Кашицын, Многомерная модель с коррелированными наблюдениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 3, 602–606

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 06:06:22

© 2011 г.

КАШИЦЫН П. А.*

МНОГОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Пусть мы наблюдаем p количественных характеристик в n временных точках. Таким образом, можно рассмотреть выборку из n случайных p -мерных векторов $X_1, \dots, X_n$. Относительно совместного распределения p -векторов делается предположение о том, что оно является нормальным и имеет ковариационную структуру, заданную в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц.

В данной работе предлагаются методы для проверки линейных гипотез в многомерной модели с описанной структурой.

Ключевые слова и фразы: линейная гипотеза, коррелированные наблюдения, ковариационная структура, матричное произведение Кронекера, гауссовский многомерный анализ.

1. Введение. Рассмотрим выборку p -мерных случайных векторов $X_1, \dots, X_n$. Из данных p -столбцов составим случайную $(p \times n)$ -матрицу

$$\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|. \quad (1)$$

Введем понятие векторизации матрицы, которое сопоставляет каждой $(p \times n)$ -матрице вектор длины pn , составленный из столбцов данной матрицы:

$$\text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(\|X_1, \dots, X_n\|) = (X_1^T, \dots, X_n^T)^T. \quad (2)$$

Будем предполагать, что совместное распределение случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ является нормальным и подчинено закону

$$\text{vec}(\mathbf{X}) = (X_1^T, \dots, X_n^T)^T \sim N_{p \times n}(\text{vec}(\mathbf{M}), \Psi \otimes \Sigma), \quad (3)$$

где параметры модели $\mathbf{M}$, Ψ и Σ определены следующим образом:

$$\mathbf{M} = \|\mathbf{E} X_1, \dots, \mathbf{E} X_n\|, \quad (4)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \psi_{ij}\Sigma, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Предполагается, что матрицы Ψ и Σ являются положительно определенными, причем матрица Ψ считается известной. В этом случае ковариационная матрица $\Lambda = \Psi \otimes \Sigma$ случайного вектора $\text{vec}(\mathbf{X})$, которая определяется через матричное произведение Кронекера:

$$\Lambda = \Psi \otimes \Sigma = \begin{pmatrix} \psi_{11}\Sigma & \dots & \psi_{1n}\Sigma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n1}\Sigma & \dots & \psi_{nn}\Sigma \end{pmatrix}, \quad (6)$$

также является положительно определенной матрицей.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: pavel.kash@gmail.com

2. Обобщенная линейная модель с коррелированными наблюдениями.

Рассмотрим левый алгебраический модуль $\mathbf{R}_n^p$, элементами которого являются $(p \times n)$ -матрицы над кольцом $(p \times p)$ -матриц. Таким образом, есть взаимно однозначное соответствие между элементами модуля и матрицами $\mathbf{X}$, которые построены в (1) по выборке $X_1, \dots, X_n$. Введем аналог скалярного произведения в построенном модуле, а также определим ряд объектов, обобщающих понятия, введенные в работе [1].

О п р е д е л е н и е 1. Скалярное произведение двух $(p \times n)$ -матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ есть $(p \times p)$ -матрица вида

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_Q = \mathbf{X}Q\mathbf{Y}^T,$$

где Q — положительно определенная $(n \times n)$ -матрица; таким образом, билинейная форма, определяющая введенное скалярное произведение, имеет матрицу Q .

Далее, определим линейное преобразование как умножение элементов модуля на $(n \times n)$ -матрицу справа.

О п р е д е л е н и е 2. Матрицей линейного преобразования назовем $(n \times n)$ -матрицу A , которая действует по следующему правилу:

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}A.$$

О п р е д е л е н и е 3. Ортогональным дополнением к подмодулю $\mathcal{L}$ назовем подмодуль $\mathcal{L}^\perp = \{\mathbf{Y} \mid \mathbf{Y} \in \mathbf{R}_n^p, \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle_Q = 0 \text{ для всякого } \mathbf{X} \in \mathcal{L}\}$.

О п р е д е л е н и е 4. Проекцией $(p \times n)$ -матрицы $\mathbf{X}$ на подмодуль $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}_n^p$ назовем $(p \times n)$ -матрицу $\mathbf{Z} = \text{proj}_{\mathcal{L}} \mathbf{X}$ такую, что

- а) $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}$,
- б) $\mathbf{X} - \mathbf{Z} \in \mathcal{L}^\perp$.

Теорема 1 (об ортогональном разложении). Пусть $\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|$ есть $(p \times n)$ -матрица, удовлетворяющая (3), для которой $\text{Cov}(X_i, X_j) = \psi_{ij}\Sigma$, $i, j = 1, \dots, n$, причем матрицы Ψ и Σ являются положительно определенными. Пусть $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ — попарно ортогональные подмодули введенного модуля $\mathbf{R}_n^p$ с матрицей скалярного произведения I_n , прямая сумма которых составляет $\mathbf{R}_n^p$:

$$\mathbf{R}_n^p = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_m.$$

Рассмотрим разложение $(p \times n)$ -матрицы $\mathbf{X}\Psi^{-1/2}$ на попарно ортогональные составляющие:

$$\mathbf{X}\Psi^{-1/2} = \text{proj}_{\mathcal{L}_1}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2}) + \dots + \text{proj}_{\mathcal{L}_m}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2}).$$

Тогда:

а) случайные $(p \times n)$ -матрицы $\text{proj}_{\mathcal{L}_i}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2})$, $i = 1, \dots, m$, независимы, распределены нормально и $\mathbf{E} \text{proj}_{\mathcal{L}_i}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2}) = \text{proj}_{\mathcal{L}_i} \mathbf{E}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2})$, где билинейная форма скалярного произведения, определяющего проекцию, имеет матрицу I_n ;

б) $\langle \text{proj}_{\mathcal{L}_i}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2}), \text{proj}_{\mathcal{L}_i}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2}) \rangle_{I_n} = W_p(\dim \mathcal{L}_i, \Sigma, \Delta_i)$, где случайная $(p \times p)$ -матрица $W_p(\dim \mathcal{L}_i, \Sigma, \Delta_i)$ распределена по Уишарту с параметром нецентральности

$$\Delta_i = \langle \text{proj}_{\mathcal{L}_i} \mathbf{E}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2}), \text{proj}_{\mathcal{L}_i} \mathbf{E}(\mathbf{X}\Psi^{-1/2}) \rangle_{I_n}.$$

Доказательство теоремы сводится к теореме 5 об ортогональном разложении, установленной в [1], с помощью лемм, которые приведены ниже.

Лемма 1. Для положительно определенной симметричной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ выполнено следующее равенство:

$$(A \otimes I_p)^{-1/2} = A^{-1/2} \otimes I_p. \quad (7)$$

Лемма 2. Для симметричной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и матрицы $\mathbf{X}$, определенной в условии теоремы, выполнено следующее равенство:

$$\text{vec}(\mathbf{X}A) = (A \otimes I_p) \text{vec}(\mathbf{X}). \quad (8)$$

Лемма 3. Для матрицы $\mathbf{X}$ из условия теоремы случайный вектор $\text{vec}(\Sigma^{-1/2} \times \mathbf{X} \Psi^{-1/2})$ имеет распределение $N_{p \times n}(\text{vec}(\Sigma^{-1/2} \mathbf{M} \Psi^{-1/2}), I_{np})$.

Следствие 1. Для матрицы $\mathbf{X}$ из условия теоремы случайный вектор $\text{vec}(\mathbf{X} \Psi^{-1/2})$ имеет распределение $N_{p \times n}(\text{vec}(\mathbf{M} \Psi^{-1/2}), I_n \otimes \Sigma)$.

Представим скалярное произведение двух элементов модуля как композицию линейного преобразования с матрицей преобразования $\Psi^{-1/2}$ и стандартного евклидова скалярного произведения с единичной билинейной формой, определяющей скалярное произведение. А именно,

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\Psi^{-1}} = \mathbf{X} \Psi^{-1} \mathbf{Y}^T = (\mathbf{X} \Psi^{-1/2})(\mathbf{Y} \Psi^{-1/2})^T.$$

Таким образом, поскольку столбцы матрицы $\mathbf{X} \Psi^{-1/2}$ независимы, что вытекает из следствия 1, то доказательство утверждения сводится к теореме 5 работы [1].

3. Проверка линейных гипотез.

О п р е д е л е н и е 5. Говорят, что матрица $\mathbf{X}$ из (1) со случайными элементами $X_1, \dots, X_n$ следует линейной гауссовской модели с ковариационной структурой в виде произведения Кронекера, если

- a) $\mathbf{E} \mathbf{X} \in \mathcal{U}$ для некоторого заданного подмодуля $\mathcal{U}$;
- b) $\text{vec}(\mathbf{X})$ имеет распределение $N_{p \times n}(\text{vec}(\mathbf{M}), \Psi \otimes \Sigma)$, где параметры задаются формулами (4) и (5).

Линейной гипотезой в линейной модели назовем гипотезу

$$H: \mathbf{E} \mathbf{X} \in \mathcal{U}_1, \quad (9)$$

где $\mathcal{U}_1$ — заданный подмодуль и $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$. Заметим, что данная гипотеза эквивалентна следующей:

$$H: \mathbf{E}(\mathbf{X} \Psi^{-1/2}) \in \mathcal{U}_1 \Psi^{-1/2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{L} = \mathcal{U} \Psi^{-1/2}, \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{U}_1 \Psi^{-1/2} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X} \Psi^{-1/2},$$

и разложим модуль $\mathcal{L}$ в ортогональную сумму подмодулей:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2.$$

Рассмотрим разложение модуля $\mathbf{R}_n^p$ на три попарно ортогональных подмодуля:

$$\mathbf{R}_n^p = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}^\perp.$$

В силу доказанной теоремы 1 случайные матрицы

$$S_1 := \langle \text{proj}_{\mathcal{L}^\perp} \mathbf{Y}, \text{proj}_{\mathcal{L}^\perp} \mathbf{Y} \rangle_{I_n}, \quad S_2 := \langle \text{proj}_{\mathcal{L}_2} \mathbf{Y}, \text{proj}_{\mathcal{L}_2} \mathbf{Y} \rangle_{I_n}$$

статистически независимы и распределены по Уишарту, где проекции и скалярный квадрат матриц определяются из теоремы 1.

Пусть $\dim \mathcal{L} = m$, $\dim \mathcal{L}_1 = m_1$ и $\dim \mathcal{L}_2 = m_2$, тогда

$$S_1 \sim W_p(n - m, \Sigma). \quad (10)$$

Если гипотеза H (9) верна, то

$$S_2 \sim W_p(m_2, \Sigma). \quad (11)$$

При нарушении гипотезы H распределение Уишарта статистики (11) становится нецентральной, приобретая параметр нецентральности

$$\Delta = \langle \text{proj}_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \mathbf{Y}, \text{proj}_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \mathbf{Y} \rangle_{I_n}, \quad (12)$$

который тем больше, чем сильнее нарушена гипотеза H в (9).

Рассмотрим матрицу $S_2 S_1^{-1}$, представляющую собой аналог «эф»-отношения. Распределение данной матрицы не свободно от параметра и имеет вид

$$\Sigma^{-1/2} W_p(m_2, I_p) W_p^{-1}(n - m, I_p) \Sigma^{-1/2}. \quad (13)$$

Поскольку матрица (13) подобна матрице

$$W_p(m_2, I_p) W_p^{-1}(n - m, I_p), \quad (14)$$

распределение которой свободно, то в качестве критических статистик могут быть использованы собственные значения матрицы (13), которые совпадают с собственными значениями матрицы (14) и являются корнями характеристического уравнения относительно λ :

$$\det(W_p(m_2, I_p) - \lambda W_p(n - m, I_p)) = 0.$$

4. Однофакторный дисперсионный анализ. Проиллюстрируем построенную линейную модель с зависимыми наблюдениями на примере однофакторного дисперсионного анализа. Рассмотрим k выборок, где $k \geq 2$ и в j -й выборке содержится n_j элементов. Обозначим элементы выборок через X_{ij} , где $i = 1, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, k$. Соответственно $n_1, \dots, n_k$ — объемы выборок, $N = \sum_{j=1}^k n_j$. Далее $X_{11}, \dots, X_{n_k k}$ — это p -мерные векторы и $X_{\cdot 1}, \dots, X_{\cdot k}$ — средние значения по столбцам. Пусть $\mathbf{X} = (X_{11}, \dots, X_{n_1 1}, \dots, X_{1k}, \dots, X_{n_k k})$.

Статистическая модель: наблюдения из одной выборки независимы, а наблюдения из разных выборок зависимы, причем $X_{ij} \sim N_p(M_j, \Sigma)$, $j = 1, \dots, k$, где векторы математических ожиданий $M_1, \dots, M_k$ и матрица Σ (общая для всех наблюдений) неизвестны. Будем считать, что Σ невырождена. Пусть $\text{Cov}(X_{ij}, X_{kl}) = \psi_{rs}$, где $r = i + \sum_{t=1}^{j-1} n_t$, $s = k + \sum_{t=1}^{l-1} n_t$, причем $\psi_{rs} = 0$ при $j = l$, так как наблюдения из одной выборки независимы. Пусть также матрица $\Psi_N = (\psi_{rs})$, $r, s = 1, \dots, N$, положительно определена и считается известной и $N > p + k - 1$.

Рассмотрим нулевую гипотезу о равенстве средних:

$$H_0: M_1 = \dots = M_k. \quad (15)$$

По-другому данную гипотезу можно записать следующим образом:

$$H_0: \mathbf{E} \mathbf{X} \in \mathcal{U}_1 = \left\{ \underbrace{(M, \dots, M)}_N \mid M \in \mathbf{R}^p \right\}.$$

Тогда согласно введенной ранее терминологии имеем:

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\underbrace{M_1, \dots, M_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{M_k, \dots, M_k}_{n_k} \right) \mid M_1, \dots, M_k \in \mathbf{R}^p \right\}.$$

Выполним линейное преобразование модуля с матрицей преобразования $\Psi_N^{-1/2}$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \Psi_N^{-1/2}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{U} \Psi_N^{-1/2}, \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{U}_1 \Psi_N^{-1/2}.$$

В результате преобразования по следствию 1 столбцы $\mathbf{Y}$ станут линейно-независимыми. Оператор проекции вида $(A^T (A A^T)^{-1} A)$ на подмодуль размерности r , где $(r \times n)$ -матрица A составлена из порождающих модуль n -строк (см., например, [1]), после преобразования примет вид

$$\Psi_N^{-1/2} A^T (A \Psi_N^{-1} A^T)^{-1} A \Psi_N^{-1/2}.$$

Пусть $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$. Таким образом,

$$S_1 = \langle \text{proj}_{\mathcal{L}^\perp} \mathbf{Y}, \text{proj}_{\mathcal{L}^\perp} \mathbf{Y} \rangle_{I_N}, \quad S_2 = \langle \text{proj}_{\mathcal{L}_2} \mathbf{Y}, \text{proj}_{\mathcal{L}_2} \mathbf{Y} \rangle_{I_N}.$$

При сделанном предположении $N > p + k - 1$ матрица S_1 невырождена с вероятностью 1. В качестве одной из критериальных статистик мы можем рассмотреть статистику Уилкса:

$$\Lambda = \frac{\det(S_1)}{\det(S_1 + S_2)}.$$

Данная статистика распределена как произведение p независимых случайных величин, следующих бета-распределениям с параметрами соответственно

$$\left(\frac{N - k - p + 1}{2}, \frac{k - 1}{2}\right), \left(\frac{N - k - p + 2}{2}, \frac{k - 1}{2}\right), \dots, \left(\frac{N - k}{2}, \frac{k - 1}{2}\right).$$

Гипотезу H_0 отвергаем при малых значениях статистики Λ .

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Ю. Н. Тюрину за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тюрин Ю. Н.* Многомерный статистический анализ: геометрическая теория. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 1, с. 36–58.
2. *Kashitsyn P. A.* Multivariate model with a Kronecker product covariance structure: S. N. Roy method of estimation. — Math. Methods Statist., 2011, v. 20, № 1, p. 75–78.
3. *Roy A., Khattree R.* On implementation of a test for Kronecker product covariance structure for multivariate repeated measures data. — Statist. Methodol., 2005, v. 2, № 4, p. 297–306.
4. *Srivastava M. S., von Rosen T., von Rosen D.* Models with a Kronecker product covariance structure: estimation and testing. — Math. Methods Statist., 2008, v. 17, № 4, p. 357–370.
5. *Srivastava M. S., Khatri C. G.* An Introduction to Multivariate Statistics. New York: North-Holland, 1979, 350 p.
6. *Votaw D. F.* Testing compound symmetry in a normal multivariate distribution. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, p. 447–473.

Поступила в редакцию
26.IX.2010

Исправленный вариант
06.VII.2011

© 2011 г.

МАСТИХИН А. В.*

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЭПИДЕМИИ БЕККЕРА

Получены интегральные представления для производящих функций переходных и финальных вероятностей марковского процесса двойной эпидемии. Используется предложенная в работах [8], [10] свертка первой системы дифференциальных уравнений Колмогорова с помощью экспоненциальной производящей функции для ветвящихся процессов с взаимодействием. Установлена предельная теорема для числа финальных частиц в эпидемии.

* Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 105005 Москва, Россия; e-mail: mastikhin@yandex.ru