Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Мاستихин, Финальные вероятности марковского процесса эпидемии Беккера, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 3, 606–612

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:02:59

При сделанном предположении $N > p + k - 1$ матрица S_1 невырождена с вероятностью 1. В качестве одной из критериальных статистик мы можем рассмотреть статистику Уилкса:

$$\Lambda = \frac{\det(S_1)}{\det(S_1 + S_2)}.$$

Данная статистика распределена как произведение p независимых случайных величин, следующих бета-распределениям с параметрами соответственно

$$\left(\frac{N - k - p + 1}{2}, \frac{k - 1}{2}\right), \left(\frac{N - k - p + 2}{2}, \frac{k - 1}{2}\right), \dots, \left(\frac{N - k}{2}, \frac{k - 1}{2}\right).$$

Гипотезу H_0 отвергаем при малых значениях статистики Λ .

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Ю. Н. Тюрину за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тюрин Ю. Н.* Многомерный статистический анализ: геометрическая теория. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 1, с. 36–58.
2. *Kashitsyn P. A.* Multivariate model with a Kronecker product covariance structure: S. N. Roy method of estimation. — Math. Methods Statist., 2011, v. 20, № 1, p. 75–78.
3. *Roy A., Khattree R.* On implementation of a test for Kronecker product covariance structure for multivariate repeated measures data. — Statist. Methodol., 2005, v. 2, № 4, p. 297–306.
4. *Srivastava M. S., von Rosen T., von Rosen D.* Models with a Kronecker product covariance structure: estimation and testing. — Math. Methods Statist., 2008, v. 17, № 4, p. 357–370.
5. *Srivastava M. S., Khatri C. G.* An Introduction to Multivariate Statistics. New York: North-Holland, 1979, 350 p.
6. *Votaw D. F.* Testing compound symmetry in a normal multivariate distribution. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, p. 447–473.

Поступила в редакцию
26.IX.2010

Исправленный вариант
06.VII.2011

© 2011 г.

МАСТИХИН А. В.*

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЭПИДЕМИИ БЕККЕРА

Получены интегральные представления для производящих функций переходных и финальных вероятностей марковского процесса двойной эпидемии. Используется предложенная в работах [8], [10] свертка первой системы дифференциальных уравнений Колмогорова с помощью экспоненциальной производящей функции для ветвящихся процессов с взаимодействием. Установлена предельная теорема для числа финальных частиц в эпидемии.

* Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 105005 Москва, Россия; e-mail: mastikhin@yandex.ru

Ключевые слова и фразы: процесс эпидемии, ветвящийся процесс с взаимодействием частиц, уравнения для двойной производящей функции, метод Фурье, точные решения.

1. Процесс двойной эпидемии. На фазовом пространстве $N^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}$. Пусть при $\Delta t \rightarrow 0+$ переходные вероятности имеют вид $(\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \rho_1 > 0, \rho_2 > 0)$

$$\begin{aligned} P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) &= (\mu_1 \alpha_1 \alpha_3 + \mu_2 \alpha_2 \alpha_3) \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) &= \rho_1 \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t), \quad P_{(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) = \rho_2 \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\Delta t) &= 1 - (\mu_1 \alpha_1 \alpha_3 + \mu_2 \alpha_2 \alpha_3 + \rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Марковский процесс $\xi(t)$ интерпретируется как процесс распространения в некоторой популяции двух различных эпидемий. Состояние процесса $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ означает наличие α_1 частиц типа T_1 (переносчики инфекции), α_2 частиц типа T_2 (переносчики другой инфекции) и α_3 частиц типа T_3 (здоровые особи). Через случайное время τ_α^1 , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^1 < t\} = 1 - e^{-\alpha_1 \alpha_3 \mu_1 t}$, пара частиц типа T_1 и типа T_3 взаимодействует и превращается в частицу типа T_1 (переход процесса в состояние $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1)$). Через случайное время τ_α^2 , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^2 < t\} = 1 - e^{-\alpha_2 \alpha_3 \mu_2 t}$, пара частиц типа T_2 и типа T_3 взаимодействует и превращается в частицу типа T_2 (переход процесса в состояние $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1)$). Кроме того, через случайное время τ_α^3 , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^3 < t\} = 1 - e^{-\alpha_1 \rho_1 t}$, частица типа T_1 умирает (переход процесса в состояние $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3)$); через случайное время τ_α^4 , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^4 < t\} = 1 - e^{-\alpha_2 \rho_2 t}$, частица типа T_2 умирает (переход процесса в состояние $(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3)$). Предполагается, что случайные величины $\tau_\alpha^1, \tau_\alpha^2, \tau_\alpha^3, \tau_\alpha^4$ независимы. В состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^1, \tau_\alpha^2, \tau_\alpha^3, \tau_\alpha^4\}$. Отметим отсутствие взаимодействия между частицами типа T_1 и типа T_2 .

Первыми детально рассмотренными в математической литературе марковскими процессами эпидемии были процесс эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика [1] и процесс эпидемии Вейса [2]; оба этих марковских процесса определяются на фазовом пространстве N^2 . В процессе эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика при взаимодействии переносчика инфекции и здоровой особи появляются два переносчика инфекции. Такой процесс сложен для изучения; ряд результатов получен асимптотическими методами (см. [4], [5] и др.)

В процессе эпидемии Вейса при взаимодействии переносчика инфекции и здоровой особи остается только переносчик инфекции, т.е. здоровая особь после контакта с переносчиком инфекции удаляется из популяции. Марковский процесс эпидемии Вейса более доступен для изучения; имеются многочисленные обобщения процесса Вейса на случай фазового пространства N^n . Например, определенный Гани [13] марковский процесс на N^3 интерпретируется как двустадийный процесс распространения СПИД (см. обзор литературы в [13]). Рассматриваемый в настоящей работе марковский процесс $\xi(t)$ ввел Беккер ([3]; определение дано при $\rho_1 = \rho_2$) как обобщение процесса Вейса. Согласно данной выше интерпретации процесса $\xi(t)$ через частицы типов T_1 , T_2 , T_3 , в такой двойной эпидемии предполагается, что популяция находится под наблюдением, но первоначальные переносчики инфекции не могут быть выявлены.

2. Задача о финальных вероятностях. Для процесса $\xi(t)$ определим *финальные вероятности* для поглощающих состояний $(0, 0, \gamma_3)$, $\gamma_3 = 0, 1, 2, \dots$ (т.е. исчезли все переносчики),

$$q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t), \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in N^3; \quad \sum_{\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 1. \quad (1)$$

Задача вычисления финального распределения вероятностей для марковского процесса на N^2 решалась в работе [6] в специальном случае *ветвящегося процесса*, когда переходные вероятности связаны нелинейным соотношением и известно нелинейное уравнение для одночастичной производящей функции переходных вероятностей [7]. Процесс $\xi(t)$ является частным случаем определенного Б. А. Севастьяновым в работе [8] класса марковских процессов на N^n . Для процессов класса [8] нахождение финального распределения сводится к решению стационарного первого (линейного) уравнения Колмогорова для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей (см. [10, обзор в гл. 3]; [9]).

По точным решениям уравнений различных марковских процессов эпидемии и способам их вывода имеется обширная литература (см. [1]–[4] и др.). В настоящей работе получено решение в виде ряда Фурье для системы из первого и второго (нестационарных) уравнений Колмогорова. Это решение суммировано к интегральному представлению для экспоненциальной (двойной) производящей функции переходных вероятностей (теорема 1) [10], [11], [12]. Полученная затем производящая функция финальных вероятностей имеет интегральный вид (теорема 2), легко используемый для вывода предельных теорем.

Асимптотические свойства финального распределения (1) рассматриваются при $\alpha_3 \rightarrow \infty$, поскольку для приложений представляет интерес случай, когда при $t = 0$ число инфицированных особей мало, а здоровых велико. Предельная теорема 3 относится к теоремам «порогового» типа (см. [4], [13]), которые применяются для определения пороговой численности инфицированных особей, превышение которой означает начало эпидемии.

3. Интегральное представление решения системы уравнений Колмогорова. Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию ($|s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1, |s_3| \leq 1$)

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}.$$

Первая (обратная) и вторая (прямая) системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t)$ записываются для рассматриваемого процесса в виде уравнений в частных производных второго порядка (см. [8], [10])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = & \mu_1 z_1 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} \right) + \mu_2 z_2 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_2 \partial z_3} \right) \\ & + \rho_1 z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \right) + \rho_2 z_2 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = & \mu_1 (s_1 - s_1 s_3) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_3} + \mu_2 (s_2 - s_2 s_3) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_2 \partial s_3} \\ & + \rho_1 (1 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \rho_2 (1 - s_2) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2 + z_3 s_3}$.

Применение к системе линейных уравнений (2), (3) метода разделения переменных (ср. [11], [12]) приводит к решению

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = & \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} e^{z_1 \rho_1 / (\mu_1 \alpha_3 + \rho_1) + z_2 \rho_2 / (\mu_2 \alpha_3 + \rho_2) + z_3} \\ & \times \left(s_1 - \frac{\rho_1}{\mu_1 \alpha_3 + \rho_1} \right)^{\alpha_1} \left(s_2 - \frac{\rho_2}{\mu_2 \alpha_3 + \rho_2} \right)^{\alpha_2} \end{aligned}$$

$$\times (s_3 - 1)^{\alpha_3} e^{-(\mu_1 \alpha_1 \alpha_3 + \mu_2 \alpha_2 \alpha_3 + \rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2)t}. \quad (4)$$

Абсолютная сходимость ряда (4) при любых $z_1, z_2, z_3, s_1, s_2, s_3$ и $t \in [0, \infty)$ очевидна. Далее потребуется функция ($x > 0, y > 0$)

$$H(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux}) J_0(2\sqrt{vy}) {}_0F_2(1, 1; -uv) du dv,$$

где $J_0(z) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (z/2)^{2k} / (k!k!)$ — функция Бесселя порядка нуль, ${}_0F_2(1, 1; z) = \sum_{k=0}^\infty z^k / (k!)^3$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Теорема 1. Для марковского процесса $\xi(t)$ двойная производящая функция переходных вероятностей равна

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_1 s_1 e^{-(\mu_1 x + \rho_1)t} + z_2 s_2 e^{-(\mu_2 x + \rho_2)t} + z_3} \\ &\times \left\{ e^{z_3(s_3-1)e^{-y}} + \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty e^{-u + z_3(s_3-1)e^{-y - \frac{\mu_i}{\rho_i}u}} \sqrt{\frac{z_i}{u} (1 - e^{-(\mu_i x + \rho_i)t})} \right. \\ &\quad \times I_1\left(2\sqrt{z_i u (1 - e^{-(\mu_i x + \rho_i)t})}\right) du \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v + z_3(s_3-1)e^{-y - \frac{\mu_1}{\rho_1}u - \frac{\mu_2}{\rho_2}v}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{z_1 z_2}{uv} (1 - e^{-(\mu_1 x + \rho_1)t}) (1 - e^{-(\mu_2 x + \rho_2)t})} \\ &\quad \times I_1\left(2\sqrt{z_1 u (1 - e^{-(\mu_1 x + \rho_1)t})}\right) \\ &\quad \times I_1\left(2\sqrt{z_2 v (1 - e^{-(\mu_2 x + \rho_2)t})}\right) du dv \Big\} H(x, y) dx dy, \quad (5) \end{aligned}$$

где $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Доказательство. Для получения решения (5) системы уравнений (2), (3) используется представление экспоненты (см. [14, ч. 2, (3.5); ч. 1, гл. 2, § 12])

$$e^{-(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) \alpha_3 t} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2)tx - \alpha_3 y} H(x, y) dx dy. \quad (6)$$

После подстановки (6) в (4) и перестановки знаков суммирования получаем (изменение порядка интегрирования и суммирования допустимо, так как интеграл сходится абсолютно)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^\infty \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} e^{z_1 \rho_1 / (\mu_1 \alpha_3 + \rho_1) + z_2 \rho_2 / (\mu_2 \alpha_3 + \rho_2) + z_3} \\ &\times \left(s_1 - \frac{\rho_1}{\mu_1 \alpha_3 + \rho_1}\right)^{\alpha_1} \left(s_2 - \frac{\rho_2}{\mu_2 \alpha_3 + \rho_2}\right)^{\alpha_2} (s_3 - 1)^{\alpha_3} e^{-(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2)t} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2)tx - \alpha_3 y} H(x, y) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_3} \left\{ \sum_{\alpha_3=0}^\infty \frac{z_3^{\alpha_3}}{\alpha_3!} e^{z_1 \rho_1 / (\alpha_3 \mu_1 + \rho_1) + z_2 \rho_2 / (\alpha_3 \mu_2 + \rho_2)} \right. \\ &\quad \times (s_3 - 1)^{\alpha_3} e^{-\alpha_3 y} \left\{ \sum_{\alpha_1=0}^\infty \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \left[\left(s_1 - \frac{\rho_1}{\mu_1 \alpha_3 + \rho_1}\right) e^{-(\mu_1 x + \rho_1)t} \right]^{\alpha_1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \left[\left(s_2 - \frac{\rho_2}{\mu_2 \alpha_3 + \rho_2} \right) e^{-(\mu_2 x + \rho_2)t} \right]^{\alpha_2} \Bigg\} H(x, y) dx dy \\
& = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{z_1 s_1 e^{-(\mu_1 x + \rho_1)t} + z_2 s_2 e^{-(\mu_2 x + \rho_2)t} + z_3} \left\{ \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{[z_3(s_3 - 1)e^{-y}]^{\alpha_3}}{\alpha_3!} \right. \\
& \quad \times e^{z_1 \rho_1 (1 - e^{-(\mu_1 x + \rho_1)t}) / (\alpha_3 \mu_1 + \rho_1) + z_2 \rho_2 (1 - e^{-(\mu_2 x + \rho_2)t}) / (\alpha_3 \mu_2 + \rho_2)} \Bigg\} \\
& \quad \times H(x, y) dx dy. \tag{7}
\end{aligned}$$

Для суммирования ряда в фигурных скобках воспользуемся формулами

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha}}{\alpha! (\alpha + \mu)^k} &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} u^{k-1} e^{-\mu u + b e^{-u}} du, \quad k = 1, 2, \dots, \\
\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha}}{\alpha! (\alpha + \mu)^k (\alpha + \rho)^l} &= \frac{1}{(k-1)! (l-1)!} \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{k-1} v^{l-1} e^{-\mu u - \rho v + b e^{-u-v}} du dv,
\end{aligned}$$

$k, l = 1, 2, \dots$, и функцией Бесселя

$$I_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

(делаем замену $a_1 = z_1 \rho_1 (1 - e^{-(\mu_1 x + \rho_1)t}) / \mu_1$, $a_2 = z_2 \rho_2 (1 - e^{-(\mu_2 x + \rho_2)t}) / \mu_2$, $b = z_3 (s_3 - 1) e^{-y}$):

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!} e^{a_1 / (\alpha_3 + \rho_1 / \mu_1) + a_2 / (\alpha_3 + \rho_2 / \mu_2)} \\
&= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{a_1^k a_2^l}{k! l!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3! (\alpha_3 + \rho_1 / \mu_1)^k (\alpha_3 + \rho_2 / \mu_2)^l} \\
&= \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1^k}{k!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3! (\alpha_3 + \rho_1 / \mu_1)^k} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_2^l}{l!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3! (\alpha_3 + \rho_2 / \mu_2)^l} \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_1^k a_2^l}{k! l!} \sum_{\alpha_3=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_3}}{\alpha_3! (\alpha_3 + \rho_1 / \mu_1)^k (\alpha_3 + \rho_2 / \mu_2)^l} \\
&= e^b + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_i^k}{k! (k-1)!} \int_0^{\infty} u^{k-1} e^{-\frac{\rho_i}{\mu_i} u + b e^{-u}} du \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_1^k}{k! (k-1)!} \frac{a_2^l}{l! (l-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{k-1} v^{l-1} e^{-\frac{\rho_1}{\mu_1} u - \frac{\rho_2}{\mu_2} v + b e^{-u-v}} du dv \\
&= e^b + \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{a_i}{u}} I_1(2\sqrt{a_i u}) e^{-\frac{\rho_i}{\mu_i} u + b e^{-u}} du \\
&\quad + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{a_1}{u}} \sqrt{\frac{a_2}{v}} I_1(2\sqrt{a_1 u}) I_1(2\sqrt{a_2 v}) e^{-\frac{\rho_1}{\mu_1} u - \frac{\rho_2}{\mu_2} v + b e^{-u-v}} du dv. \tag{8}
\end{aligned}$$

Подставляя (8) в (7), получаем (5) (после замены переменных u, v). Теорема 1 доказана.

Формула (5) позволяет вычислить математическое ожидание и дисперсию случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ (ср. [12]).

4. Распределение финальных вероятностей и предельная теорема. Для финальных вероятностей (1) имеем производящие функции ($|s| \leq 1$)

$$\begin{aligned}\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s) &= \sum_{\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} s^{\gamma_3}; \\ \Phi(z_1, z_2, z_3; s) &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s),\end{aligned}\quad (9)$$

Вычисление предела $\Phi(z_1, z_2, z_3; s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s)$ из (5) приводит к представлению

$$\begin{aligned}\Phi(z_1, z_2, z_3; s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_3} \left\{ e^{z_3(s-1)e^{-y}} + \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty e^{-u+z_3(s-1)\exp(-y-(\mu_i/\rho_i)u)} \right. \\ &\quad \times \sqrt{\frac{z_i}{u}} I_1(2\sqrt{z_i u}) du \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v+z_3(s-1)\exp(-y-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v)} \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\frac{z_1 z_2}{uv}} I_1(2\sqrt{z_1 u}) I_1(2\sqrt{z_2 v}) du dv \right\} H(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Раскладывая последнее выражение в ряд по степеням z_1, z_2, z_3 — согласно (9), получаем после вычисления интегралов, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для марковского процесса $\xi(t)$ производящая функция финальных вероятностей равна ($\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$)

$$\begin{aligned}\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s) &= \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!(\alpha_2 - 1)!} \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\alpha_1-1} v^{\alpha_2-1} \\ &\quad \times (1 - e^{-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v} + s e^{-(\mu_1/\rho_1)u-(\mu_2/\rho_2)v})^{\alpha_3} e^{-u-v} du dv.\end{aligned}\quad (10)$$

Раскладывая в ряд по степеням s выражение (10), получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Финальные вероятности для процесса эпидемии Беккера равны

$$q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = C_{\alpha_3}^{\gamma_3} \sum_{i=0}^{\alpha_3-\gamma_3} (-1)^i C_{\alpha_3-\gamma_3}^i \left(\frac{\rho_1}{\mu_1 i + \mu_1 \gamma_3 + \rho_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\rho_2}{\mu_2 i + \mu_2 \gamma_3 + \rho_2} \right)^{\alpha_2}.$$

В частном случае $\rho_1 = \rho_2$ выражения для переходных и финальных вероятностей получены в [3] другими методами.

В рассматриваемом случае частицы типа T_3 называются *финальными* [7]. Обозначим $\eta^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ случайное число частиц типа T_3 , которые останутся после того, как процесс эпидемии остановится, т.е. не останется частиц типов T_1 и T_2 . Случайная величина $\eta^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ имеет вероятностное распределение $\{q_{(0,0,\gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}, \gamma_3 = 0, \dots, \alpha_3\}$, которое определяется производящей функцией (10). Для математического ожидания получаем

$$\mathbf{E} \eta^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \Phi'_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1) = \alpha_3 \left(\frac{\rho_1}{\mu_1 + \rho_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\rho_2}{\mu_2 + \rho_2} \right)^{\alpha_2}.$$

Вычисление дисперсии $\mathbf{D} \eta^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \Phi''_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1) + \Phi'_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1) - (\Phi'_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(1))^2$ приводит к асимптотической формуле при $\alpha_3 \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{D} \eta^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \sim \alpha_3^2 \left(\left(\frac{\rho_1}{2\mu_1 + \rho_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\rho_2}{2\mu_2 + \rho_2} \right)^{\alpha_2} - \left(\frac{\rho_1}{\mu_1 + \rho_1} \right)^{2\alpha_1} \left(\frac{\rho_2}{\mu_2 + \rho_2} \right)^{2\alpha_2} \right).$$

Используя интегральное представление (10) для производящей функции вероятностного распределения на N , применив стандартным образом метод характеристических функций для вывода предельных теорем [7], получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $x \in [0, 1]$. Тогда ($\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$)

$$F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) = \lim_{\alpha_3 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_3} \leq x \right\} = 1 - \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!(\alpha_2 - 1)!} \times \int_0^{-(\rho_1/\mu_1) \ln x} \int_0^{-(\rho_2/\mu_2) \ln x - (\mu_1 \rho_2)/(\rho_1 \mu_2) u} u^{\alpha_1 - 1} v^{\alpha_2 - 1} e^{-u-v} du dv.$$

В частности, имеем при $\mu_1 \rho_2 \neq \mu_2 \rho_1$ или $\mu_1 \rho_2 = \mu_2 \rho_1$ соответственно

$$F_{(1,1)}(x) = \frac{\mu_1 \rho_2 x^{\rho_1/\mu_1} - \mu_2 \rho_1 x^{\rho_2/\mu_2}}{\mu_1 \rho_2 - \mu_2 \rho_1} \quad \text{или} \quad F_{(1,1)}(x) = x^{\rho_1/\mu_1} (1 - \frac{\rho_1}{\mu_1} \ln x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эпидемии процесс. Математическая энциклопедия, т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985, с. 1008.
2. Weiss G. On the spread of epidemics by carriers. — Biometrics, 1965, v. 21, № 2, p. 481–490.
3. Becker N. G. Interactions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models. — Rocky Mountain J. Math., 1973, v. 4, № 1, p. 53–68.
4. Старцев А. Н. О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, № 4, с. 827–839.
5. Мирзаев М., Старцев А. Н. Предельные теоремы для одной модели с взаимодействием частиц двух типов, обобщающей процесс эпидемии Бартлетта–Маккендрика. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, № 2, с. 385–391.
6. Колмогоров А. Н., Севастьянов Б. А. Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов. — Докл. АН СССР, 1947, т. 56, № 5, с. 783–786.
7. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
8. Севастьянов Б. А., Калинин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 2, с. 306–308.
9. Калинин А. В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, № 4, с. 773–780.
10. Калинин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, № 2, с. 23–84.
11. Калинин А. В., Мастихин А. В. Марковский процесс эпидемии Вейса и ветвящиеся процессы. — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, сер. «Естественные науки», 2006, № 2, с. 3–17.
12. Калинин А. В., Мастихин А. В. Метод разделения переменных для уравнения марковских процессов гибели. — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, сер. «Естественные науки», 2007, № 2, с. 45–64.
13. Мастихин А. В. Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Гани. — Матем. заметки, 2007, т. 82, № 6, с. 873–884.
14. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М.: Физматгиз, 1958, 180 с.

Поступила в редакцию
18.I.2010

Исправленный вариант
15.VII.2010