Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 4, 627–655

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:16:54

© 2011 г.

БОРОВКОВ А. А.* , МОГУЛЬСКИЙ А. А.*

ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ. I¹⁾

Изучается случайное блуждание $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 0, 1, \dots$, в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, где $S_0 = 0$, ξ_k — независимые одинаково распределенные случайные векторы, удовлетворяющие моментному условию Крамера. Для случайных ломаных, построенных по узловым точкам

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{1}{x} S_k \right), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

найден при $n \rightarrow \infty$ логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений в различных пространствах траекторий, когда $x \sim \alpha_0 n$, $\alpha_0 > 0$. Получены так называемые локальный и расширенный принципы больших уклонений (п.б.у.) (см. [1]), которые справедливы и в тех случаях, когда «обычный» принцип больших уклонений отсутствует.

Работа состоит из 3 частей. Часть I содержит два раздела. В разделе 1 приводятся основные понятия и некоторые сведения о п.б.у. в произвольных метрических пространствах. В разделе 2 формулируются «усиленные» версии «обычных» п.б.у. в области больших уклонений, полученных ранее в [2], [3] в пространстве непрерывных функций. Кроме того, в разделе 2 приводится п.б.у. для вероятностей попадания траекторий случайных блужданий в выпуклые множества. Он получен на основе неравенств в [4] и не содержит каких-либо моментных условий.

В разделе 3 части II рассмотрен пример, поясняющий необходимость расширения постановки задачи и самого понятия «принцип больших уклонений». Введены новое расширенное пространство функций, метрика в нем и функционал (интеграл) уклонений более общего, чем ранее, вида, с помощью которых будет строиться «расширенный» п.б.у. В разделе 4 для траекторий одномерных случайных блужданий в пространстве $\mathbb{D}$ функций без разрывов второго рода приводятся и доказываются основные результаты работы: локальный и расширенный принципы больших уклонений. В разделе 5 все утверждения работы, сформулированные и доказанные в разделе 4, распространены на многомерный случай.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ (№ 11-01-00285), РНП.2.1.1.346.

Раздел 6 части III содержит изложение результатов, аналогичных тем, что получены в разделе 4, но теперь в пространстве функций ограниченной вариации с более сильной, чем в $\mathbb{D}$, метрикой. В разделе 7 получены так называемые условные принципы больших уклонений для траекторий одномерных случайных блужданий при локализованном положении блуждания в последний момент. В качестве следствия получена версия теоремы Санова о больших уклонениях эмпирических распределений.

Ключевые слова и фразы: условие Крамера, функция уклонений, случайное блуждание, функционал уклонений, интеграл уклонений, большие уклонения, принцип больших уклонений, локальный принцип больших уклонений, расширенный принцип больших уклонений, выпуклые множества, пространство функций без разрывов второго рода, пространство функций ограниченной вариации, интегро-локальные теоремы Гнеденко и Стоуна–Шеппа, теорема Санова, большие уклонения эмпирических распределений.

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных d -мерных случайных векторов,

$$S_0 := 0, \quad S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad n \geq 1. \quad (0.1)$$

Везде в дальнейшем будем предполагать, что распределение вектора ξ невырождено и удовлетворяет моментному условию Крамера в той или иной его форме (если не оговорено противное). Изучается грубая (логарифмическая) асимптотика вероятностей больших уклонений случайных траекторий $s_n = s_n(t)$, $t \in [0, 1]$, построенных по узловым точкам $(k/n, (1/x)S_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, при $n \rightarrow \infty$, когда $x \sim \alpha_0 n$, $\alpha_0 = \text{const} > 0$.²⁾ Траектории $s_n(t)$ будут рассматриваться как элементы тех или иных метрических пространств функций на $[0, 1]$. Эти пространства различаются как природой своих элементов, так и метрикой. В связи с этим нам понадобится ряд понятий и результатов, относящихся к принципам больших уклонений (п.б.у.) в произвольных метрических пространствах, полученных в [1].

1. О принципах больших уклонений в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой ρ и σ -алгеброй $\mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ борелевских множеств. Пусть, далее, $\{\eta_n; n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность случайных элементов в $\langle \mathbb{Y}, \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho) \rangle$. Если для некоторого множества $B_0 \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\eta_n \in (B_0)_\varepsilon) = 1, \quad (1.1)$$

²⁾ Умеренно большим уклонениям, когда $\mathbf{E}\xi = 0$ и $x = o(n)$, $x \gg \sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$, будет посвящена отдельная работа.

где $(B)_\varepsilon$ — ε -окрестность множества B , то для любого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ такого, что $(B_0)_\varepsilon \cap B = \emptyset$ при некотором $\varepsilon > 0$, вероятность $\mathbf{P}(\eta_n \in B)$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ и будет характеризовать распределение η_n в «области больших уклонений». Если η_n сходится по вероятности к неслучайному элементу y_0 : $\mathbf{P}(\eta_n \in (y_0)_\varepsilon) \rightarrow 1$ при любом $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$, где $(y)_\varepsilon = \{\tilde{y} \in \mathbb{Y}: \rho(y, \tilde{y}) < \varepsilon\}$ — ε -окрестность точки y , то (1.1) будет выполнено при $B_0 = \{y_0\}$.

В [1] было определено понятие локального принципа больших уклонений (л.п.б.у.). После того как работа [1] была сдана в печать, выяснилось, что удобнее пользоваться более широким и более естественным определением л.п.б.у., приведенным ниже (определение в [1] перегружено некоторыми излишними требованиями, в частности, требованием равномерности, не свойственным понятию «локальности», что сужает область применения определения). Новая версия определения имеет следующий вид.

О п р е д е л е н и е 1.1. Мы будем говорить, что *последовательность* $\{\eta_n\}$ *удовлетворяет локальному принципу больших уклонений в пространстве* $(\mathbb{Y}, \rho)$ *(л.п.б.у. в пространстве* $(\mathbb{Y}, \rho)$ *или просто л.п.б.у.)*, если существуют числовая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и функция $D = D(y): \mathbb{Y} \rightarrow [0, \infty]$ такие, что для любого $y \in \mathbb{Y}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) = -D(y). \quad (1.2)$$

Эквивалентом определению 1.1 является следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1.2 получается из определения 1.1, если вместо (1.2) потребовать, чтобы для любого $y \in \mathbb{Y}$ и любой последовательности ε_n , достаточно медленно сходящейся к нулю при $n \rightarrow \infty$, выполнялся бы соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{\varepsilon_n}) = -D(y). \quad (1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о эквивалентности определений 1.1 и 1.2. Обозначим

$$\Delta_{n,\varepsilon} := \left| [\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon)]^{1/z_n} - e^{-D(y)} \right|.$$

Тогда очевидно, что (1.2) эквивалентно соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_{n,\varepsilon} = 0. \quad (1.4)$$

Пусть выполнено (1.4). Тогда

$$\Delta_\varepsilon := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_{n,\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и, стало быть, для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon(\delta)$ такое, что $\Delta_{\varepsilon(\delta)} < \delta$. Это, в свою очередь, означает, что найдется $n(\delta)$ такое, что при всех $n \geq n(\delta)$ выполняется неравенство

$$\Delta_{n,\varepsilon} \leq 2\delta. \quad (1.5)$$

Не ограничивая общности, функции $\varepsilon(\delta)$ и $n(\delta)$ можно считать монотонными. Тогда, обозначая через $\delta(\varepsilon)$ и ε_n обобщенные решения уравнений $\varepsilon(\delta) = \varepsilon$ и $n(\delta(\varepsilon)) = n$ соответственно, мы можем переписать соотношение (1.5) в виде

$$\Delta_{n,\varepsilon_n} < 2\delta(\varepsilon_n)$$

при всех $n > n(\delta(\varepsilon))$. Так как $\delta(\varepsilon_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то мы получаем (1.3). Но в качестве $n(\delta)$ мы можем выбрать сколь угодно быстро растущую функцию. Поэтому «обратная» функция ε_n может быть сколь угодно медленно убывающей. Это доказывает (1.3).

Обратно, пусть теперь выполнено (1.3), т.е.

$$\Delta_{n,\varepsilon_n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

для всех ε_n таких, что $\varepsilon_n \downarrow 0$ достаточно медленно при $n \uparrow \infty$. Допустим противное, что при этом (1.4) не верно и, стало быть, существует последовательность $\{\varepsilon(k)\}$, $\varepsilon(k) \downarrow 0$ при $k \uparrow \infty$, такая, что $\Delta_{\varepsilon(k)} > 2c = \text{const}$ при всех k . Это означает, что при каждом $k \geq 1$ найдется неограниченно возрастающая по l последовательность $n(l, k)$, $l = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\Delta_{n(l,k),\varepsilon(k)} > c \quad \text{при всех} \quad l \geq 1, \quad k \geq 1.$$

Ясно, что из совокупности $\{n(l, k), \varepsilon(k); l \geq 1, k \geq 1\}$ всегда можно выбрать последовательность (n, ε_n) такую, что $\varepsilon_n \downarrow 0$ сколь угодно медленно с ростом n . Это противоречит (1.6). Эквивалентность доказана.

Определения 1.1, 1.2 поясняют вероятностный смысл произведения $z_n D(y)$: при малых ε значения $-\ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon)$ с ростом n растут приблизительно как $z_n D(y)$. Из (1.2) следует, что множители z_n и $D(y)$ в этом произведении определяются однозначно с точностью до положительного множителя. Свойство (1.2) в определении 1.1 было названо в [1] «предельным л.п.б.у.».

Отметим, что из определения 1.1 с необходимостью следует непрерывность функции $D(y)$ снизу, т.е. для любого $y \in \mathbb{Y}$ выполняется

$$\lim_{\rho(y_k, y) \rightarrow 0} D(y_k) \geq D(y). \quad (1.7)$$

Точнее, если выполнено второе соотношение в (1.2), то справедливо (1.7).

Действительно, при всех достаточно больших k

$$(y_k)_\varepsilon \subset (y_k)_{\varepsilon+\rho(y_k, y)} \subset (y_k)_{2\varepsilon}.$$

Поэтому для таких k в силу второго соотношения в (1.2) имеем

$$\begin{aligned} -D(y_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_\varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_\varepsilon) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{\varepsilon + \rho(y_k, y)}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{2\varepsilon}). \end{aligned}$$

Отсюда, вновь в силу второго соотношения в (1.2), получаем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (-D(y_k)) = -\lim_{k \rightarrow \infty} D(y_k) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{2\varepsilon}) = -D(y).$$

Это доказывает (1.7).

Определения 1.1, 1.2 эквивалентно еще одно определение.

О п р е д е л е н и е 1.3 получается из определения 1.1, если в последнем добавить предположение, что *функция $D(y)$ полунепрерывна снизу*, а свойство (1.2) заменить следующим свойством.

Для любого $y \in \mathbb{Y}$ существуют функции $\delta(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ такие, что $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \leq -D((y)_{\delta(\varepsilon)}) + \beta(\varepsilon), \quad (1.8)$$

где $D(B) := \inf_{y \in B} D(y)$. Кроме того, при любых $y \in \mathbb{Y}$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \geq -D(y). \quad (1.9)$$

Позже мы увидим, что в (1.8) с необходимостью $\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon$ (см. теорему 1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о эквивалентности определений 1.1 и 1.3. (i) Пусть имеет место равенство левых и правых частей соотношения (1.2). Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \leq -D(y) + \beta(\varepsilon) \leq -D((y)_{\delta(\varepsilon)}) + \beta(\varepsilon).$$

Если имеет место равенство средней и правой частей (1.2), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \geq -D(y) - \beta(\varepsilon).$$

Так как левая часть этого неравенства монотонно убывает при $\varepsilon \downarrow 0$, то, применяя это неравенство при ε/k , получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{\varepsilon/k}) \geq -D(y) - \beta\left(\frac{\varepsilon}{k}\right).$$

Поскольку k произвольно, то справедливо (1.9). Полунепрерывность снизу (1.7) функции D из определения 1.1 была установлена ранее.

(ii) Обратно, пусть верно (1.8). Тогда для любой последовательности $\{\varepsilon_k\}$ такой, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, существует последовательность $y_k \in (y)_{\delta(\varepsilon_k)}$ такая, что $D(y_k) \leq D((y)_{\delta(\varepsilon_k)}) + 1/k$. Стало быть, при любом k в силу (1.8)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{\varepsilon_k}) &\leq -D(y_k) + \frac{1}{k} + \beta(\varepsilon_k), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{\varepsilon_k}) &\leq -\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} D(y_k). \end{aligned}$$

Но $y_k \rightarrow y$ при $k \rightarrow \infty$ и, следовательно, в силу полунепрерывности снизу функции $D(y)$ получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{\varepsilon_k}) \leq -D(y).$$

Вместе с (1.9) это означает, что выполнено (1.2). Эквивалентность доказана.

Пусть (B) обозначает открытую внутренность множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ (т.е. совокупность всех точек, входящих в B вместе с некоторой окрестностью), а $[B] = \mathbb{Y} \setminus (\overline{B})$ обозначает замыкание B , где $\overline{B}$ — дополнение к B .

О п р е д е л е н и е 1.4. Мы будем говорить, что *последовательность* $\{\eta_n\}$ *удовлетворяет расширенному принципу больших уклонов* в пространстве $(\mathbb{Y}, \rho)$ (*р.п.б.у. в пространстве* $(\mathbb{Y}, \rho)$ *или просто р.п.б.у.*), если существуют числовая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и *полунепрерывная снизу функция* $D(y)$ такие, что для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ имеют место неравенства

$$L^*(B) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \leq -D(B+), \quad (1.10)$$

$$L_*(B) := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \geq -D((B)), \quad (1.11)$$

где

$$D(B) := \inf_{y \in B} D(y), \quad D(B+) := \lim_{\delta \rightarrow 0} D((B)_\delta). \quad (1.12)$$

В (1.12) принято, что $D(\emptyset) = \infty$, т.е. нижняя грань по пустому множеству равна ∞ .

Для того, чтобы несколько полнее характеризовать введенные в определениях 1.1–1.4 понятия, мы будем иногда писать: л.п.б.у. (или р.п.б.у.) с параметрами (z_n, D) или $(z_n, D(y))$.

Если $D(B+) = D([B])$, то в (1.10), (1.11) можно заменить правые части на $D(B)$ и написать знак равенства. Смысл этих равенств состоит в том, что асимптотика $\ln \mathbf{P}(\eta_n \in B)$ допускает факторизацию, т.е. представляется в виде произведения двух множителей z_n и $D(B)$, первый из которых зависит лишь от n , а второй — лишь от B .

Напомним, что в литературе под *принципом больших уклонений* (п.б.у.) для последовательности случайных элементов $\{\eta_n\}$ в метрическом пространстве $(\mathbb{Y}, \rho)$ понимается следующее (см., например, [5]–[7]).

(1) Пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$ предполагается *полным, сепарабельным*.

(2) Определена так называемая *функция уклонений* (rate function) $D = D(y)$, $y \in \mathbb{Y}$, со значениями в $[0, \infty]$, которая обладает двумя свойствами:

(2а) она *полунепрерывна снизу*;

(2б) множество $D_v := \{y: D(y) \leq v\}$ *компактно* в $(\mathbb{Y}, \rho)$ при любом $v \geq 0$.

(3) Выполнены соотношения (1.10), (1.11), при этом *правая часть* в (1.10) *заменена* на $D([B])$, а z_n *заменено* на n .

Некоторые из названных предположений п.б.у. (особенно (1), (2б) и условие $z_n = n$) весьма ограничительны и во многих важных задачах, связанных со случайными блужданиями, не выполняются (см. ниже и [1], [8]). С этими обстоятельствами и связано появление определения 1.4. В нем мы использовали термин «расширенный» и указание на пространство с метрикой (оно бывает разным даже в близких задачах; см. ниже) для того, чтобы подчеркнуть отличие р.п.б.у. от «обычного» п.б.у., рассматриваемого в литературе (см., например, [9], [7]). Отличие состоит в следующем.

1. В р.п.б.у. отсутствует предположение о том, что пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$ является полным и сепарабельным.

2. В р.п.б.у. отсутствует предположение о том, что множество D_v при любом $v \geq 0$ является компактом (см. ниже и [1], [8]).

3. В р.п.б.у. допускается любая скорость z_n роста $-\ln \mathbf{P}(\eta_n \in B)$ (как уже отмечалось, $z_n = n$ для «обычного» п.б.у.; см., например, [7]).

4. В «обычном» п.б.у. в правой части (1.10) стоит значение $D([B])$, а не $D(B+)$. Так как $[B] \subseteq (B)_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то $D([B]) \geq D(B+)$. Ниже в лемме 1.1 приведены условия, достаточные для выполнения равенства $D([B]) = D(B+)$.

Отметим также, что в определении р.п.б.у. мы указываем метрическое пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$, в котором лежат элементы η_n и иногда указываем параметры (z_n, D) . В дальнейшем для единообразия такая же информация при необходимости будет указываться и для п.б.у., т.е. мы будем писать «п.б.у. в $(\mathbb{Y}, \rho)$ с параметрами (z_n, D) ». Эта информация существенна, так как названные параметры могут быть разными даже при изучении очень близких объектов. В литературе при изучении п.б.у.

эта информация, как правило, опускается, так как пространство $\mathbb{Y}$ и $z_n = n$ бывают фиксированными.

Из сказанного выше следует, что п.б.у. в $(\mathbb{Y}, \rho)$ с параметрами (z_n, D) всегда влечет за собой р.п.б.у. в $(\mathbb{Y}, \rho)$ с теми же параметрами (z_n, D) , но не наоборот.

5. В силу названных выше в пп. 1-4 отличий, а также более широких условий, обеспечивающих выполнение р.п.б.у. (по сравнению с аналогичными условиями для п.б.у.; см. ниже), использование р.п.б.у. вместо п.б.у. позволяет существенно расширить как сам круг объектов, для которых имеют место утверждения типа п.б.у., так и условия, при которых для уже рассмотренных объектов неравенства (1.10), (1.11) будут справедливы.

Приведем теперь достаточные условия, обеспечивающие равенство

$$D([B]) = D(B+). \quad (1.13)$$

Лемма 1.1 ([1]). *Если при любом $v \geq 0$ множество D_v компактно, то справедливо равенство (1.13).*

Таким образом, для компактных D_v правые части в неравенствах (1.10), (1.11) для р.п.б.у. и п.б.у. совпадают.

Применительно к случайным блужданиям $\{S_n\}$, порожденным суммами $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_j , $\mathbf{E} \xi_j = 0$, $\mathbf{E} \xi_j^2 < \infty$, в качестве η_n можно рассматривать нормированные суммы S_n/x в фазовом пространстве $\mathbb{R}$, где $x = x(n)$, $x \gg \sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$, либо нормированные траектории $s_n(t) = S_{[nt]}/x$ (или их непрерывные версии) в каком-нибудь метрическом пространстве функций на $[0, 1]$, например, в пространстве функций без разрывов второго рода (или в пространстве $\mathbb{C}[0, 1]$ для непрерывных версий $s_n(t)$). Если выполнено моментное условие Крамера, то в качестве z_n можно брать либо последовательность $z_n = n$ (обычный п.б.у.), либо $z_n = x^2/n$ (принцип умеренно больших уклонений), либо $z_n \gg n$ (сверхбольшие уклонения; подробнее см. [1]). В фазовом пространстве $\mathbb{R}$ функцию D в (1.9) обычно называют *функцией уклонений* (deviation function, rate function). При изучении больших уклонений в функциональных пространствах функцию D иногда называют *функционалом действия* (action functional). Для единообразия терминологии и в связи с тем, что смысл последнего термина применительно к случайным блужданиям не совсем ясен, мы в этой работе будем называть функцию D *функцией (больших) уклонений*, если речь идет о фазовом пространстве, или *функционалом (больших) уклонений*, если речь идет о пространстве траекторий.

Рассмотрим теперь условия, позволяющие из л.п.б.у. получать р.п.б.у. Напомним, что множество $T \subset \mathbb{Y}$ называется *вполне ограниченным* (totally bounded) в $\mathbb{Y}$ (см., например, [10]), если для любого $\varepsilon > 0$

существует конечное ε -покрытие множества T (т.е. существует набор точек $y_1, \dots, y_R$ в $\mathbb{Y}$, $R = R(\varepsilon) < \infty$, такой, что $\bigcup_{j=1}^R (y_j)_\varepsilon \supset T$). Известно, что если вполне ограниченное множество в полном метрическом пространстве замкнуто, то оно компактно (см., например, [10]). Компакт всегда является вполне ограниченным множеством.

Нам понадобятся следующие условия на распределение $\{\eta_n\}$.

[К]. Существует семейство вложенных компактов K_v , $v > 0$, таких, что для любого $N > 0$ найдется $v > 0$, при котором для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \notin (K_v)_\varepsilon) \leq -N. \quad (1.14)$$

Достаточным для выполнения [К] является условие $[\mathbf{K}]_0$, которое получается, если в (1.14) заменить $(K_v)_\varepsilon$ на K_v .

Рассмотрим теперь более широкое условие

[ТВ]. Существует семейство вложенных вполне ограниченных множеств T_v , $v > 0$, таких, что для любого $N > 0$ найдется $v > 0$, при котором для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \notin (T_v)_\varepsilon) \leq -N. \quad (1.15)$$

Достаточным для выполнения [ТВ] является условие $[\mathbf{ТВ}]_0$, которое получается, если в (1.15) заменить $(T_v)_\varepsilon$ на T_v .

В последующих разделах условия [К] или [ТВ] будут выполнены для множеств $T_v = D_v := \{y: D(y) \leq v\}$.

Существуют по крайней мере два пути доказательства л.п.б.у. или р.п.б.у. с помощью л.п.б.у. Один из них основан на использовании л.п.б.у. и условия [К]. Второй — на использовании л.п.б.у. и условия [ТВ], но при этом в л.п.б.у. (см. определение 1.3) будет предполагаться равномерность оценок сверху на множествах T_v (ср. с замечанием перед определением 1.1).

Если удастся найти «высоковероятные» компакты, то, конечно же, надо использовать первый путь. Если нет — то следует искать «высоковероятные» вполне ограниченные множества (они существуют при более широких условиях) и доказывать равномерность на них оценок сверху в л.п.б.у.

Названные два пути реализуются в следующих утверждениях, поясняющих связь между л.п.б.у. и р.п.б.у.

Теорема 1.1. (i) Пусть выполнены л.п.б.у. и условие [К]. Тогда выполнено соотношение (1.10) (из р.п.б.у.).

(ii) Обратно, если выполнено соотношение (1.10), то справедливо соотношение (1.8) при $\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon$.

(iii) Неравенства (1.9) (из л.п.б.у.) и (1.11) из (р.п.б.у.) эквивалентны.

Таким образом, при выполнении условия $[K]$ л.п.б.у. и р.п.б.у. эквивалентны.

Теорема 1.2. (i) Пусть выполнено условие $[TB]$ и при любом $v > 0$ имеют место равномерные на множестве T_v оценки сверху в л.п.б.у. (функции $\delta(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ в (1.8) не зависят от y при $y \in T_v$). Тогда выполнено соотношение (1.10) (из р.п.б.у.).

(ii) Справедливы утверждения (ii), (iii) теоремы 1.1.

Таким образом, при выполнении условия $[TB]$ и наличии свойства равномерности в (1.8) л.п.б.у. и р.п.б.у. эквивалентны; при этом с необходимостью $\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon$.

Следствие 1.1. Если выполнены соотношения (1.10), (1.11) и

$$D((B)) = D(B+),$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) = -D(B).$$

З а м е ч а н и е 1.1. (i) Условие $[K]_0$ используется и для установления «обычного» п.б.у., однако там предполагается, что пространство (Y, ρ) является полным сепарабельным, и требуется дополнительно компактность множеств $D_v = \{y: D(y) \leq v\}$.

(ii) Все без исключения утверждения настоящей работы сохраняются и для «псевдометрического» пространства (Y, ρ) , когда ρ — псевдометрика. (В этом случае равенство $\rho(y, \tilde{y}) = 0$, вообще говоря, не влечет за собой равенство $y = \tilde{y}$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.1. (i) Для произвольного фиксированного $M < \infty$ положим $N := \min\{D(B+), M\}$ (число M вводится на случай, если $D(B+) = \infty$). Для этого N в силу условия $[K]$ построим компакт $K = K_v$, для которого выполняется соотношение (1.14). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Для каждого $y \in K$ в силу (1.2) мы можем выбрать $\varepsilon_y \in (0, \varepsilon)$ так, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{2\varepsilon_y}) \leq -\min\{D(y) - \delta, M\}. \quad (1.16)$$

Из открытого покрытия (y, ε_y) компакта K выберем конечное подпокрытие

$$(y_1, \beta_1), \dots, (y_R, \beta_R), \quad \text{где } \beta_k := \varepsilon_{y_k}, \quad k = 1, \dots, R.$$

Для $\varepsilon_0 := \min\{\beta_1, \dots, \beta_R\}$ получаем, что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^R (y_k)_{\beta_k}, \quad (K)_{\varepsilon_0} \subset \bigcup_{k=1}^R (y_k)_{2\beta_k}.$$

Поэтому

$$B \subset B(K)_{\varepsilon_0} + \overline{(K)_{\varepsilon_0}} \subset U_B + \overline{(K)_{\varepsilon_0}}, \quad \bigcup_{k \in \mathcal{R}} \{y_k\} \subset (B)_{2\varepsilon}, \quad (1.17)$$

где

$$U_B := \bigcup_{k \in \mathcal{R}} (y_k)_{2\beta_k}, \quad \mathcal{R} := \{k \in \{1, \dots, R\}: B \cap (y_k)_{2\beta_k} \neq \emptyset\};$$

$$\mathbf{P}(\eta_n \in B) \leq \sum_{k \in \mathcal{R}} \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{2\beta_k}) + \mathbf{P}(\eta_n \notin \overline{(K)_{\varepsilon_0}}). \quad (1.18)$$

В силу (1.16) и второго соотношения в (1.17) для всех $k \in \mathcal{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{2\beta_k}) &\leq -\min\{D(y_k) - \delta, M\} \\ &\leq -\min\{D((B)_{2\varepsilon}) - \delta, M\} =: -D_{\varepsilon, \delta, M}. \end{aligned}$$

Используя (1.14), получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \notin \overline{(K)_{\varepsilon_0}}) \leq -\min\{D(B+), M\} \leq -D_{\varepsilon, \delta, M}.$$

Так как $k \in \mathcal{R}$ принимает лишь конечное число R значений, то существует последовательность $\theta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, не зависящая от k , такая, что для всех $k \in \mathcal{R}$ и всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{2\beta_k}) &\leq \exp\{-z_n[D_{\varepsilon, \delta, M} - \theta_n]\}, \\ \mathbf{P}(\eta_n \notin \overline{(K)_{\varepsilon_0}}) &\leq \exp\{-z_n[D_{\varepsilon, \delta, M} - \theta_n]\}. \end{aligned}$$

Правые части этих неравенств от k не зависят. Поэтому в силу (1.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_n \in B) &\leq (R+1) \exp\{-z_n[D_{\varepsilon, \delta, M} - \theta_n]\}, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) &\leq -D_{\varepsilon, \delta, M} = -\min\{D((B)_{2\varepsilon}) - \delta, M\}. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε, δ, M отсюда получаем (1.10).

(ii) Обратно, если выполнено (1.10), то, полагая $B = (y)_{\varepsilon}$, получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{\varepsilon}) \leq -D((y)_{\varepsilon}+) \leq -D((y)_{\delta(\varepsilon)})$$

для любой функции $\delta(\varepsilon)$ такой, что $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta(\varepsilon) > \varepsilon$. Поэтому в силу полунепрерывности снизу функции $D(y)$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_{\varepsilon}) \leq -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D((y)_{\delta(\varepsilon)}) = -D(y).$$

(iii) Доказательство утверждения (iii) теоремы 1.1 повторяет доказательство утверждения (ii) теоремы 2.1 в [1]. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. (i) Пусть M — фиксировано, а v таково, что выполнено (1.15) при $N = \min\{M, D(B+)\}$. Тогда при всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}(\eta_n \in B) \leq e^{-z_n N} + \mathbf{P}(\eta_n \in B(T_v)_\varepsilon). \quad (1.19)$$

Множество T_v покроем ε -сетью с центрами в точках $y_k \in T_v$, $k = 1, \dots, R(\varepsilon)$. Тогда

$$B(T_v)_\varepsilon \subset \bigcup_{k \in \mathcal{R}} (y_k)_{2\varepsilon}, \quad \mathcal{R} := \{k \in \{1, \dots, R(\varepsilon)\} : B(y_k)_{2\varepsilon} \neq \emptyset\},$$

$$\mathbf{P}(\eta_n \in B(T_v)_\varepsilon) \leq \sum_{k \in \mathcal{R}} \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{2\varepsilon}). \quad (1.20)$$

В силу неравенств (1.8) и равномерности этих оценок сверху для $k \in \mathcal{R}$ выполняется

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{2\varepsilon}) \leq -D((y_k)_{\delta(2\varepsilon)}) + \beta(2\varepsilon) \leq -D(U_B) + \beta(2\varepsilon),$$

где $\delta(2\varepsilon)$ и $\beta(2\varepsilon)$ одни и те же для всех $y_k \in T_v$,

$$U_B := \bigcup_{k \in \mathcal{R}} (y_k)_{\delta(2\varepsilon)}.$$

Заметим, что множество U_B есть часть множества $(B)_{3\varepsilon + \delta(2\varepsilon)}$, поэтому $D(U_B) \geq D((B)_{3\varepsilon + \delta(2\varepsilon)})$. Так как k принимает лишь конечное число значений, то существует последовательность $\theta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, не зависящая от k , такая, что для всех $n \geq n(\varepsilon)$, $k \in \mathcal{R}$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\eta_n \in (y_k)_{2\varepsilon}) \leq \exp \left\{ -z_n \left[D((B)_{3\varepsilon + \delta(2\varepsilon)}) - \beta(2\varepsilon) - \theta_n \right] \right\}.$$

Поскольку правая часть от k не зависит, то в силу (1.20)

$$\mathbf{P}(\eta_n \in B(T_v)_\varepsilon) \leq R(\varepsilon) \exp \{ -z_n [D((B)_{3\varepsilon + \delta(2\varepsilon)}) - \beta(2\varepsilon) - \theta_n] \},$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B(T_v)_\varepsilon) \leq -D((B)_{3\varepsilon + \delta(2\varepsilon)}) + \beta(2\varepsilon).$$

Отсюда в силу (1.19) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \leq -\min \left\{ D((B)_{3\varepsilon + \delta(2\varepsilon)}) + \beta(2\varepsilon), \min\{M, D(B+)\} \right\}.$$

Переходя к пределу при $M \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получим (1.10).

(ii) Доказательство утверждения (ii) проводится точно так же, как в теореме 1.1. Теорема 1.2 доказана.

Сделаем теперь несколько замечаний, связанных с изучаемыми понятиями.

О п р е д е л е н и е 1.5. 1. Последовательность $y_k \in B$ назовем $D(B)$ -последовательностью, если $D(y_k) \rightarrow D(B)$ при $k \rightarrow \infty$.

2. Точку y_B назовем (асимптотически) ρ -наиболее вероятной для B , если существует $D(B)$ -последовательность y_k , сходящаяся к y_B при $k \rightarrow \infty$.

Ясно, что $D(B)$ -последовательности существуют всегда. Если для множества B существует $D(B)$ -последовательность y_k , сходящаяся к y_B при $k \rightarrow \infty$, и при этом y_B лежит в множестве B , то $D(y_B) \geq D(B)$. С другой стороны, в силу полунепрерывности снизу функции $D(y)$ выполняется

$$D(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} D(y_k) \geq D(y_B).$$

Поэтому $D(y_B) = D(B)$.

Если множества D_v компактны при любом $v \geq 0$, то для любого измеримого множества B существует ρ -наиболее вероятная точка $y_B \in [B]$. Действительно, пусть $\{y_n\}$ есть $D(B)$ -последовательность. Для заданного ε и всех достаточно больших k выполняется включение $y_k \in D_{v+\varepsilon}$ при $v = D(B)$. Так как $D_{v+\varepsilon}$ — компакт, то, не ограничивая общности, можно считать, что $y_k \rightarrow y_B \in [B]$.

Как показывает пример 3.1, приведенный ниже, в общем случае наиболее вероятные точки могут и не существовать. Применительно к случайным процессам наиболее вероятные точки естественно называть *наиболее вероятными траекториями*.

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 1.2. Пусть две последовательности η_n и $\bar{\eta}_n$ заданы на одном вероятностном пространстве таким образом, что для любого $h > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\rho(\eta_n, \bar{\eta}_n) > h) = -\infty.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Если последовательность η_n удовлетворяет оценкам сверху в л.п.б.у. с функциями $\delta(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$, то последовательность $\bar{\eta}_n$ также удовлетворяет оценкам сверху в л.п.б.у. с теми же параметрами и функциями $\bar{\delta}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon(1+\tau))$ и $\bar{\beta}(\varepsilon) = \beta(\varepsilon(1+\tau))$ при любом $\tau > 0$ (см. Определение 1.3).

(ii) Если последовательность η_n удовлетворяет оценкам сверху в р.п.б.у., то последовательность $\bar{\eta}_n$ также удовлетворяет оценкам сверху в р.п.б.у. с теми же параметрами.

(iii) Если последовательность η_n удовлетворяет оценкам снизу в л.п.б.у. (р.п.б.у.), то последовательность $\bar{\eta}_n$ также удовлетворяет оценкам снизу в л.п.б.у. (р.п.б.у.) с теми же параметрами.

Доказательство леммы почти очевидно и мы предоставляем его читателю.

З а м е ч а н и е 1.2. Не всегда оказывается возможным доказать тот или иной п.б.у., следуя в точности определениям 1.1–1.4. В ряде случаев соотношения (1.2) ((1.10), (1.11)) удастся доказать не для любого $y \in \mathbb{Y}$ ($B \in \mathfrak{B}$), а лишь для y (множеств B) из некоторых подклассов $\mathbb{Y}_0$ элементов из $\mathbb{Y}$ (подклассов $\mathfrak{B}_0$ множеств из $\mathfrak{B}$). Например, ниже в теореме 2.5 и следствии 2.1 соотношения (1.10) установлены лишь для классов выпуклых множеств или ограниченных множеств в соответствующем метрическом пространстве функций. В таком случае мы будем говорить, что *справедлив л.п.б.у. (р.п.б.у.) в пространстве $(\mathbb{Y}, \rho)$ с параметрами (z, D) в подклассе элементов $\mathbb{Y}_0$ (подклассе множеств $\mathfrak{B}_0$)*.

2. Принципы больших уклонений для непрерывных траекторий случайных блужданий. Усиленные версии.

2.1. Принцип больших уклонений для сумм случайных векторов. Пусть $\mathbb{R}^d$ есть d -мерное пространство Евклида со скалярным произведением $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha_{(1)}\beta_{(1)} + \dots + \alpha_{(d)}\beta_{(d)}$ и нормой $|\alpha| = \langle \alpha, \alpha \rangle^{1/2}$, где $\alpha_{(i)}$, $\beta_{(i)}$ — координаты α , β соответственно. Будем везде предполагать, что случайный вектор ξ имеет невырожденное распределение в $\mathbb{R}^d$, т.е. удовлетворяет следующему условию: для любых $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| \neq 0$, и $u \in \mathbb{R}$ справедливо $\mathbf{P}(\langle \lambda, \xi \rangle = u) < 1$.

Как правило, в дальнейшем мы будем предполагать, что скачки ξ_j случайного блуждания $\{S_n\}$ (см. (0.1)), удовлетворяют моментному условию Крамера:

[C]. Существует вектор $\mu \in \mathbb{R}^d$ такой, что

$$\varphi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\langle \lambda, \xi \rangle} < \infty$$

в некоторой окрестности точки μ .

Условие [C] означает, что внутренность $(\mathcal{A})$ множества

$$\mathcal{A} = \{\lambda : A(\lambda) := \ln \varphi(\lambda) < \infty\}$$

не пуста и функция $A(\lambda)$ аналитична в области $(\mathcal{A})$. Нам понадобится также «центральное» условие Крамера, совпадающее с [C] при $\mu = 0$:

[C₀]. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi(\lambda) < \infty$ для всех $|\lambda| < \varepsilon$.

Ясно, что условие [C₀] является усилением условия [C]. Наряду с условиями [C], [C₀] введем в рассмотрение условие Крамера в его наиболее сильной форме:

[C_∞]. $\varphi(\lambda) < \infty$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Таким образом, верны соотношения $[C_\infty] \subset [C_0] \subset [C]$.

Положим при $\alpha \in \mathbb{R}^d$

$$\eta_n = \frac{S_n}{n}, \quad z_n = n,$$

$$L^*(\alpha) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L^*((\alpha)_\varepsilon), \quad L_*(\alpha) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_*((\alpha)_\varepsilon),$$

где функции $L^*(B)$, $L_*(B)$ определены в (1.10), (1.11).

Хорошо известно (см., например, [11], [12]), что функции $L^*(\alpha)$, $L_*(\alpha)$ совпадают, т.е. справедлив л.п.б.у. для нормированных сумм случайных векторов:

$$L^*(\alpha) = L_*(\alpha) = -D(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^d,$$

так что функция $D(\alpha)$ является *функцией уклонений*, соответствующей последовательности случайных векторов $\{(1/n)S_n\}$. Замечательный факт (упомянутый еще в [13], [14]) состоит в том, что функция $D(\alpha)$ совпадает с преобразованием Лежандра

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda^{(\xi)}(\alpha) := \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda)\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1)$$

над $A(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$: при всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$

$$D(\alpha) = \Lambda(\alpha). \quad (2.2)$$

Ввиду (2.2) функцию $\Lambda(\alpha)$ в литературе также называют функцией уклонений (см. [2], [11]).

2.2. Усиленная версия «обычного» п.б.у. для траекторий случайных блужданий.

2.2.1. Предварительные утверждения. Рассмотрим непрерывные случайные ломаные $s_n = \{s_n(t); t \in [0, 1]\}$, построенные по узловым точкам $(k/n, (1/x)S_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$s_n = s_n(t) := \frac{1}{x}(S_{[nt]} + \{nt\}\xi_{[nt]+1}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $[t]$ и $\{t\}$ — целая и дробная части вещественного числа t соответственно. Везде в дальнейшем в этой работе мы будем рассматривать значения $x \sim \alpha_0 n$ при $n \rightarrow \infty$, $\alpha_0 = \text{const} > 0$. Впоследствии, не ограничивая общности, мы будем считать, что $\alpha_0 = 1$. Таким образом, в этом и последующих разделах мы будем рассматривать «собственно» большие уклонения порядка n , что приводит к значениям $z_n = n$ в обозначениях раздела 1. Умеренно большие уклонения, когда $x = o(n)$, $z_n = o(n)$, $x \gg \sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$, будут рассматриваться в другой работе.

Пространство $\mathbb{C} := \mathbb{C}^d[0, 1]$ непрерывных функций $f = f(t)$ с равномерной метрикой $\rho_{\mathbb{C}}(f, g) := \sup_{1 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$ обозначим $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$;

σ -алгебру подмножеств из $\mathbb{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, обозначим $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$. Как известно (см., например, [15, гл. IX, § 1, замечание 2, с. 580]), σ -алгебра $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ совпадает с борелевской σ -алгеброй $\mathfrak{B}(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ множеств из $\mathbb{C}$, порожденной метрикой $\rho_{s\mathbb{C}}$.

В качестве *исходного вероятностного пространства* мы будем рассматривать пространство $\langle (\mathbb{R}^d)^n, (\mathfrak{B}^d)^n, \mathbf{P}_n \rangle$, где $\mathfrak{B}^d$ — σ -алгебра борелевских множеств в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{P}_n$ — распределение последовательности $0, S_1, \dots, S_n$. Функция s_n осуществляет измеримое отображение исходного вероятностного пространства на вероятностное пространство

$$\langle \mathbb{C}, \mathfrak{A}(\mathbb{C}), \mathbf{P} \rangle, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{P}$ — распределение на $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$, отвечающее процессу s_n . Вероятностное пространство (2.3) в настоящем пункте мы будем считать основным.

Важную роль в дальнейшем будет играть функционал $J(f)$, отображающий то или иное функциональное пространство в расширенную полупрямую $[0, \infty]$; он будет играть роль функционала уклонений. Мы определим этот функционал с помощью интегральных сумм и функции уклонений Λ (см. (2.1)). Для этого нам понадобятся разбиения $\mathbf{t}_R = \{t_1, \dots, t_R\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_R < t_{R+1} = 1$, отрезка $[0, 1]$ на непересекающиеся полуинтервалы

$$\Delta_k[t_k] := [t_k, t_k + \Delta_k),$$

где $\Delta_k := t_{k+1} - t_k$, $k = 0, \dots, R$. Последовательность таких разбиений при $R \rightarrow \infty$ мы будем называть *плотной*, если

$$\max_{k \leq R} \Delta_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Мы будем говорить, что *существует интеграл уклонений* $J(f)$ от функции f , $f(0) = 0$, если для любой плотной последовательности разбиений $\mathbf{t}_R$ существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^R \Delta_k \Lambda \left(\frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta_k} \right) =: J(f) \quad (2.4)$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности разбиений. Если $f(0) \neq 0$, то мы положим $J(f) = \infty$.

Если f принадлежит пространству $\mathbb{C}_a \subset \mathbb{C}$ абсолютно непрерывных функций, то $J(f)$ естественно записать в виде

$$J(f) = \int_0^1 \Lambda(g(t)) dt, \quad g(t) = f'(t).$$

По определению $J(f)$ является пределом специальных «римановых» интегральных сумм, построенных по *средним значениям* функции g на интервалах $\Delta_k[t_k]$:

$$\frac{1}{\Delta_k} \int_{t_k}^{t_k + \Delta_k} g(u) du = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta_k}.$$

Так как $f'(t)$ для абсолютно непрерывной функции $f(t)$ есть измеримая суммируемая на отрезке $[0, 1]$ функция, для которой

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^t f'(u) du, \quad t \geq t_0,$$

то функция $\Lambda(f'(t))$ также измерима и для нее всегда существует интеграл Лебега

$$I(f) := \int_0^1 \Lambda(f'(t)) dt, \quad f(0) = 0$$

($I(f) = \infty$, если $f(0) \neq 0$). Конструкция интеграла уклонений продиктована природой изучаемых явлений (см. ниже), а сам интеграл $J(f)$ есть интеграл Дарбу

$$\int F(t, u) := \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{k \leq R} F(t_k, t_{k+1})$$

от функции интервала

$$F(t, u) = (u - t) \Lambda\left(\frac{f(u) - f(t)}{u - t}\right),$$

изучавшийся в работах Римана и Дарбу (см., например, [16, гл. I, § 3, с. 27–36]). В ряде случаев существование интеграла $J(f)$ будет следовать из теоремы Дарбу (см. [17] и [16, гл. I, § 3, п. 14, с. 33]). В общем случае существование интеграла J установлено в [17].

Теорема 2.1. *Если $f \in \mathbb{C}$, то интеграл уклонений $J(f)$ (конечный или бесконечный) всегда существует, при этом*

$$J(f) = \sup I(f^{\mathbf{t}_R}), \quad (2.5)$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\mathbf{t}_R$ отрезка $[0, 1]$.

Для любого множества $B \in \mathbb{C}$ обозначим

$$J(B) := \inf_{f \in B} J(f), \quad I_a(B) := \inf_{f \in BC_a} I(f),$$

где нижняя грань по пустому множеству $\emptyset$ равна ∞ . В [17] содержится следующее утверждение, описывающее свойства интеграла уклонений в пространстве $\mathbb{C}$.

Теорема 2.2. (i) Функционал $J(f)$ является выпуклым:

$$J(pf_1 + (1-p)f_2) \leq pJ(f_1) + (1-p)J(f_2), \quad p \in [0, 1], \quad f_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2.$$

(ii) Функционал $J(f)$ полунепрерывен снизу относительно метрики $\rho_{\mathbb{C}}$:

$$\lim_{\rho_{\mathbb{C}}(f_n, f) \rightarrow 0} J(f_n) \geq J(f).$$

(iii) Если выполнено условие $[\mathbf{C}]$ и $\text{Var } f = \infty$, то $J(f) = \infty$. Если выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, то существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что

$$J(f) \geq c_1 \text{Var } f - c_2.$$

(iv) Если $f \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_a$ и выполнено условие $[\mathbf{C}_\infty]$, то $J(f) = \infty$.

(v) Для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$ выполнено равенство $J(f) = I(f)$.

(vi) Для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$

$$J(B) \leq I_a(B).$$

Для любого открытого в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ множества B выполнен равенство

$$J(B) = I_a(B).$$

(vii) Если выполнено условие $[\mathbf{C}_\infty]$, то для любого $v \geq 0$ множество $J_v := \{f \in \mathbb{C}: J(f) \leq v\}$ компактно в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$.

Утверждения (i), (iv), (vii) и частично (iii) получены ранее в [2], [3].

Для произвольного множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ через $(B)_{\mathbb{C}}$, $[B]_{\mathbb{C}}$ обозначим соответственно внутренность и замыкание множества B в метрике $\rho_{\mathbb{C}}$. Следующее утверждение устанавливает связь между функционалами J и I .

Лемма 2.1. (i) Для любого $f \in \mathbb{C}$

$$J(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_a((f)_{\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J((f)_{\varepsilon}). \quad (2.6)$$

(ii) Если множество B выпукло и $I_a((B)_{\mathbb{C}}) < \infty$, то

$$I_a(B) = I_a([B]_{\mathbb{C}}) = I_a((B)_{\mathbb{C}}) = J(B) = J([B]_{\mathbb{C}}) = J((B)_{\mathbb{C}}). \quad (2.7)$$

Доказательство. (i) Первое равенство в (2.6) доказано в [17, следствие 2.1]. Второе равенство в (2.6) вытекает из утверждения (vi) теоремы 2.2.

(ii) Первые два равенства в (2.7) вытекают из леммы 2.1 в [4]. В силу утверждения (vi) теоремы 2.2 выполняется $I_a((B)_{\mathbb{C}}) = J((B)_{\mathbb{C}})$, поэтому $J((B)_{\mathbb{C}}) < \infty$, и последние два равенства в (2.7) вытекают из следствия 1.1 в [4]. Лемма 2.1 доказана.

2.2.2. Локальный п.б.у. Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что $\alpha = x/n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что более общий случай, когда $\alpha = x/n \rightarrow \alpha_0$, $\alpha_0 > 0$, при $n \rightarrow \infty$ сводится к случаю $\alpha_0 = 1$ с помощью преобразования сжатия над случайными величинами и множеством B .

Теорема 2.3 (усиленная версия л.п.б.у.). (i) Для любых $f \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \leq -J((f)_{\varepsilon(1+\tau)}). \quad (2.8)$$

Если $x = n$, то

$$\mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \leq e^{-nJ((f)_\varepsilon)}. \quad (2.9)$$

(ii) Для любых $f \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \geq -J(f). \quad (2.10)$$

Другими словами, справедлив (в усиленной форме) л.п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ с параметрами (n, J) при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon(1 + \tau)$ и $\beta(\varepsilon) = 0$. Отметим, что л.п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ справедлив всегда, без каких-либо ограничений.

Доказательство. (i) *Оценка сверху.* Воспользуемся следующим утверждением для выпуклых множеств, вытекающим из следствия 2.3 в [4] и из свойства (vi) в теореме 2.2.

Лемма 2.2. Пусть выпуклое множество B обладает хотя бы одним из следующих свойств:

- (a) оно открыто;
- (b) оно замкнуто;
- (c) $I_a((x/n)B)_{\mathbb{C}} < \infty$ (или $J((x/n)B)_{\mathbb{C}} < \infty$). Тогда при всех n

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq e^{-nI_a((x/n)B)} \leq e^{-nJ((x/n)B)}. \quad (2.11)$$

В случае (a) второе неравенство в (2.11) можно заменить на равенство.

В [4] получен также ряд других точных неравенств для выпуклых множеств.

Далее нам будет полезно следующее утверждение, которое позволяет ограничиться в доказательстве л.п.б.у. рассмотрением уклонений $x = n$ и в случае, когда среднее $\mathbf{E}\xi$ конечно, считать его равным 0.

Лемма 2.3. 1) Если при $x = n$ процесс s_n удовлетворяет л.п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ с функциями $\delta(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ (см. определение 1.3), то он удовлетворяет тому же принципу и при $x \sim n$, $n \rightarrow \infty$ с функциями $\delta(\varepsilon(1 + \tau))$, $\beta(\varepsilon(1 + \tau))$ при любом $\tau > 0$.

2) Пусть $x = n$. Если для процесса s_n , построенного по случайным векторам ξ_k , имеет место л.п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ с параметрами (n, J) и

функциями $\delta(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, то для процесса того же вида s_n , построенного по случайным векторам $\xi_k + m$, имеет место л.п.б.у. с параметрами (n, J_m) , где $J_m(f) := J(f - me)$, $e = e(t) := t$, и с теми же функциями $\delta(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$.

Доказательство. 1) **Оценка сверху.** Пусть процесс s_n построен при $\alpha := x/n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Положим $s_n^* = (x/n)s_n$, так что процесс s_n^* построен при $x = n$ и, стало быть, удовлетворяет л.п.б.у. с параметрами (z_n, J) . Далее, для $g \in \mathbb{C}$ имеем $|g| := \sup_{0 \leq t \leq 1} |g(t)| < \infty$,

$$\alpha g = g + (\alpha - 1)g \in (g)_\theta,$$

где $\theta \leq |\alpha - 1||g|$. Следовательно, для любого $\tau > 0$ и всех достаточно больших n будет выполняться неравенство $\theta < \tau\varepsilon$. Поэтому

$$\mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) = \mathbf{P}(s_n^* \in \alpha(f)_\varepsilon) \leq \mathbf{P}(s_n^* \in (f)_{\varepsilon(1+\tau)}), \quad (2.12)$$

где $\mathbf{P}(s_n^* \in (f)_{\varepsilon(1+\tau)})$ удовлетворяет оценке сверху в л.п.б.у. (см. определение 1.3). Стало быть, этой оценке удовлетворяет и левая часть неравенства (2.12), с заменой ε на $\varepsilon(1 + \tau)$.

Оценка снизу. Аналогично, при достаточно больших n

$$\mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \geq \mathbf{P}(s_n^* \in (f)_{\varepsilon/2}),$$

и левая часть этого неравенства удовлетворяет тем же оценкам (1.9), что и правая.

2) Процесс $s_n^{(m)} = s_n + me$, $e = e(t) := t$, $0 \leq t \leq 1$, снова является процессом вида s_n , для которого $s_n^{(m)}(k/n) = S_k^{(m)}/n$, где $S_k^{(m)} = \sum_{j=1}^k (\xi_j + m)$. Поэтому остается воспользоваться равенством $\mathbf{P}(s_n^{(m)} \in (f)_\varepsilon) = \mathbf{P}(s_n \in (f - me)_\varepsilon)$ и л.п.б.у. для s_n . Лемма 2.3 доказана.

Таким образом, в дальнейшем (при доказательстве л.п.б.у.) мы можем считать, что $x = n$ и $\mathbf{E}\xi = 0$ (если среднее $\mathbf{E}\xi$ конечно).

Продолжим доказательство теоремы 2.3. Так как множество $(f)_\varepsilon$ является выпуклым и открытым, то требуемые оценки сверху (2.8), (2.9) в утверждении (i) вытекают из лемм 2.2 и 2.3.

(ii) **Оценка снизу.** Доказательство оценки снизу (неравенства (2.10)) мы разобьем на три этапа.

1) Предположим сначала, что $d = 1$, величина ξ ограничена, а f есть непрерывная ломаная с узлами в точках $(t_k, f(t_k))$, $t_k = k\Delta$, $k = 0, \dots, R+1$, $R+1 = 1/\Delta$ — целое число.

Если $|\xi| \leq N$, то достаточно рассматривать лишь функции f , для которых $|f'(t)| \leq N$ при всех $t \neq t_k$, $k = 0, \dots, R$. Если допустить, например, что $f'(t) > N$ при $t \in (t_k, t_{k+1})$, то $\Lambda(f'(t)) = \infty$ на этом интервале, $J(f) \geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Lambda(f'(t)) dt = \infty$ и неравенство (2.10) выполнено.

Пусть для простоты Δ кратно $1/n$. Для заданных $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ рассмотрим события

$$A_\delta := \bigcap_{k=1}^R \left\{ |s_n(t_k) - f(t_k)| < k\delta \right\}, \quad B_\varepsilon := \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |s_n(t) - f(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Для фиксированных ломаной f , чисел $N < \infty$ и $\varepsilon > 0$ выберем сначала $\Delta = 1/(R+1)$, а затем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta < \frac{\varepsilon}{4N}, \quad R\delta < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.13)$$

Если

$$s_n(t_k) \in [f(t_k) - k\delta, f(t_k) + k\delta],$$

и, стало быть,

$$s_n(t_k) \in \left[f(t_k) - \frac{\varepsilon}{2}, f(t_k) + \frac{\varepsilon}{2} \right],$$

то в момент t_{k+1} траектория $s_n(t)$ в силу (2.13) будет находиться ниже уровня

$$f(t_k) + \frac{\varepsilon}{2} + N\Delta \leq f(t_{k+1}) + 2N\Delta + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(t_{k+1}) + \varepsilon.$$

Аналогично получаем, что

$$s_n(t_{k+1}) > f(t_k) - \frac{\varepsilon}{2} - N\Delta \geq f(t_{k+1}) - 2N\Delta - \frac{\varepsilon}{2} \geq f(t_{k+1}) - \varepsilon.$$

Это означает, что при выбранных Δ и δ

$$A_\delta \subset B_\varepsilon, \quad \mathbf{P}(B_\varepsilon) \geq \mathbf{P}(A_\delta). \quad (2.14)$$

Обозначим для краткости $f(t_{k+1}) - f(t_k) =: \Delta f(t_k)$ (здесь знак Δ , стоящий перед функцией, означает оператор приращения; это не приведет к недоразумениям). Тогда при $m = n\Delta$

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=0}^R \left\{ \Delta s_n(t_k) \in (\Delta f(t_k))_\delta \right\} &\subset A_\delta, \\ \mathbf{P}(A_\delta) &\geq \prod_{k=0}^R \mathbf{P}\left(s_n(\Delta) \in (\Delta f(t_k))_\delta\right) = \prod_{k=0}^R \mathbf{P}\left(S_m \in n(\Delta f(t_k))_\delta\right). \end{aligned}$$

Согласно л.п.б.у. для сумм S_m имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(A_\delta) &\geq \sum_{k=0}^R \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_m}{m} \in \frac{1}{\Delta}(\Delta f(t_k))_\delta\right) \\ &\geq - \sum_{k=0}^R \Delta \Lambda\left(\frac{\Delta f(t_k)}{\Delta}\right) = -I(f). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отсюда и из (2.14) вытекает требуемая оценка (2.10).

Если Δ не кратно $1/n$, то в качестве точек разбиения следует брать точки $t_{k,n} := [n\Delta k]/n \rightarrow t_k := \Delta k$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда приращения f на интервалах $(t_{k,n}, t_{k+1,n})$ будет отличаться от $\Delta f(t_k)$ на величину не большую, чем $2N/n$, а число независимых приращений $s_n(t)$ на интервалах $(t_{k,n}, t_{k+1,n})$ будет заключено в пределах $\Delta n \pm 1$. Поэтому при небольших очевидных изменениях в предшествующем тексте предельное соотношение (2.15) сохранится.

2) Избавимся теперь от предположения об ограниченности ξ . Воспользуемся срезками случайных величин ξ_i на уровнях $\pm N$, $N > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) &\geq \mathbf{P}\left(s_n \in (f)_\varepsilon, \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \leq N\right) \\ &= \mathbf{P}\left(s_n \in (f)_\varepsilon \mid \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \leq N\right) \mathbf{P}(|\xi| \leq N), \\ \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) &\geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(s_n \in (f)_\varepsilon \mid \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \leq N\right) \\ &\quad + \ln \mathbf{P}(|\xi| \leq N). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Обозначим $\xi^{(N)}$ случайную величину с распределением

$$\mathbf{P}(\xi^{(N)} \in B) := \mathbf{P}(\xi \in B \mid |\xi| \leq N).$$

Случайную ломаную, построенную по суммам $S_j^{(N)} = \xi_1^{(N)} + \dots + \xi_j^{(N)}$, где $\xi_i^{(N)}$ — независимые копии $\xi^{(N)}$, обозначим $s_n^{(N)}$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\left(s_n \in (f)_\varepsilon \mid \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \leq N\right) = \mathbf{P}(s_n^{(N)} \in (f)_\varepsilon),$$

поэтому неравенство (2.16) можно переписать в виде

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^{(N)} \in (f)_\varepsilon) + \ln \mathbf{P}(|\xi| \leq N). \quad (2.17)$$

Пусть $\Lambda^{(\xi^{(N)})}(\alpha)$ есть функция уклонений, соответствующая $\xi^{(N)}$. Нетрудно видеть (см. также [2], [3] или [11]), что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda^{(\xi^{(N)})}(\alpha) = \Lambda(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

В силу уже доказанного в этом случае неравенства (2.10) имеем

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \geq -I^{(N)}(f), \quad (2.19)$$

где (см. (2.15))

$$I^{(N)}(f) = \Delta \sum_{k=0}^{R-1} \Lambda^{(\xi^{(N)})}\left(\frac{\Delta f(t_k)}{\Delta}\right).$$

В силу (2.18) получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I^{(N)}(f) = I(f) = J(f). \quad (2.20)$$

Поскольку $\ln \mathbf{P}(|\xi| \leq N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то, применяя (2.20) и (2.19) к (2.17), получаем (2.10).

3) Пусть теперь f — произвольная непрерывная функция, $f(0) = 0$. Для целого $R \geq 1$ рассмотрим разбиение $\mathbf{t}_R = (t_0, \dots, t_{R+1})$, где $t_k = k/(R+1)$ при $k = 0, \dots, R+1$. Выберем R настолько большим, что

$$(f^{\mathbf{t}_R})_{\varepsilon/2} \subset (f)_{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(s_n \in (f)_{\varepsilon}) \geq \mathbf{P}(s_n \in (f^{\mathbf{t}_R})_{\varepsilon/2}).$$

Применяя к правой части этого неравенства оценку, найденную в разделе 2) для непрерывной ломаной $f^{\mathbf{t}_R}$, получим

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_{\varepsilon}) \geq -I(f^{\mathbf{t}_R}).$$

Остается воспользоваться неравенством $I(f^{\mathbf{t}_R}) \leq J(f)$ (см. (2.5)). Оценка снизу (2.10) установлена.

Переход к многомерному случаю $d \geq 2$ никаких изменений в доказательство не вносит. Теорема 2.3 доказана.

2.2.3. Усиленная версия п.б.у. Для траекторий s_n справедлив п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ в следующей форме.

Теорема 2.4. Пусть $\alpha = x/n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда:

(i) если выполнено условие $[\mathbf{C}_{\infty}]$, то для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \leq -J([B]_{\mathbb{C}}); \quad (2.21)$$

(ii) для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ всегда справедливо неравенство

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \geq -J((B)_{\mathbb{C}}). \quad (2.22)$$

Теорема 2.4 есть усиление «обычного» п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ с параметрами (z_n, D) при $z_n = n$, $D(f) = J(f)$, который при $d = 1$ и при выполнении условия $[\mathbf{C}_{\infty}]$ (для обоих утверждений (i), (ii)) был доказан в [2]. В работе [3] этот результат был распространен на многомерные случайные блуждания.

Отметим, что в случае, когда правые части неравенств (2.21), (2.22) не совпадают, оценка сверху (2.21) может оказаться «плохой». Например, для множества $B = B_v := \{f: J(f) \geq v\}$ она вообще теряет смысл,

поскольку замыкание $[B_v]_{\mathbb{C}}$ совпадает с $\mathbb{C}$ и, следовательно, $J([B]_{\mathbb{C}}) = 0$. Совпадение $[B_v]_{\mathbb{C}}$ с $\mathbb{C}$ вытекает из того, что для любых u, ε и $f \in \mathbb{C}$ легко построить такую «быстроколеблющуюся» функцию $g \in \mathbb{C}_a$, что $\rho(f, g) < \varepsilon$ и $\text{Var } g := \int_0^1 |g'(t)| dt \geq u$. Поскольку при выполнении условия $[\mathbf{C}_0]$ для некоторых $c_1 > 0, c_2 > 0$ и всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство (см., например, [11])

$$\Lambda(\alpha) \geq c_1 |\alpha| - c_2, \quad (2.23)$$

то $J(g) \geq c_1 u - c_2$. Таким образом, мы можем построить функцию g , сколь угодно близкую к f и такую, что выполнено неравенство $J(g) \geq v$ ($g \in B_v$ при $u \geq (v + c_2)/c_1$).

Оценка снизу в утверждении (ii) теоремы 2.4 справедлива без каких-либо моментных условий. Что касается оценок сверху, то для них в ряде случаев также можно получать утверждения без моментных условий. Речь идет о классе выпуклых множеств. Для них в работе [4] получены простые экспоненциально неухудшаемые оценки сверху для вероятностей $\mathbf{P}(s_n \in B)$ без каких-либо *моментных условий* и каких-либо ограничений на *порядок уклонений*. Это существенно упрощает формулировки и делает утверждения весьма общими (см. теорему 2.5 ниже).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.4. (i) Для доказательства теоремы 2.4 мы будем проверять условие $[\mathbf{K}]_0$ (см. раздел 1).

$[\mathbf{K}]_0$. Существует семейство вложенных компактов $K_v, v > 0$, в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ таких, что для любого $N > 0$ найдется $v > 0$, при котором

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \notin K_v) \leq -N. \quad (2.24)$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.4. Свойство $[\mathbf{K}]_0$ и условие $[\mathbf{C}_{\infty}]$ эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Покажем сначала, что из $[\mathbf{K}]_0$ вытекает $[\mathbf{C}_{\infty}]$. Свойство $[\mathbf{K}]_0$ означает, что для любого $N < \infty$ найдутся компакт K_v и число $n_v < \infty$ такие, что

$$\mathbf{P}(s_n \notin K_v) \leq e^{-Nn} \quad \text{при } n \geq n_v.$$

Обозначим $\Omega_v(\Delta) := \sup_{f \in K_v} \omega_f(\Delta)$ при $\Delta \geq 0$, где $\omega_f(\Delta) := \max\{|f(t) - f(u)| : t, u \in [0, 1], |t - u| \leq \Delta\}$ — модуль непрерывности f . Очевидно, что функция $\Omega_v(\Delta)$ непрерывна и не убывает по Δ , $\Omega_v(0) = 0$. При $n \geq n_v$ имеем

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n} |\xi_1| > \Omega_v\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathbf{P}\left(\left|s_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| > \Omega_v\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq \mathbf{P}(s_n \notin K_v) \leq e^{-Nn}.$$

Увеличим при необходимости n_v настолько, чтобы при $n \geq n_v$ выполнялось неравенство $\Omega_v(1/n) \leq 1$. Тогда при достаточно большом n получим неравенство

$$\mathbf{P}(|\xi_1| \geq n) \leq \mathbf{P}\left(\frac{1}{n} |\xi_1| > \Omega_v\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq e^{-nN},$$

которое, очевидно, влечет за собой $[\mathbf{C}_\infty]$.

(ii) Импликацию $[\mathbf{C}_\infty] \implies [\mathbf{K}]_0$ достаточно установить в одномерном случае $d = 1$. Действительно, если условие $[\mathbf{C}_\infty]$ выполнено для вектора $\xi = (\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(d)})$, то оно выполнено и для каждой координаты $\xi_{(i)}$. В силу справедливости импликации $[\mathbf{C}_\infty] \implies [\mathbf{K}]_0$ в случае $d = 1$ для каждого $i = 1, \dots, d$ можно выбрать семейство компактов $K_{i,v}$ в одномерном пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ так, что для заданного $N < \infty$ и некоторого $v_i = v_{i,N}$ компакт K_{i,v_i} удовлетворяет (2.24). Тогда прямое произведение $K_v := K_{i,1} \times \dots \times K_{i,d}$ будет искомым компактом в d -мерном пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$, поскольку для любого $N < \infty$ при $v := \max\{v_1, \dots, v_d\}$ компакт K_v удовлетворяет (2.24).

Итак, пусть $d = 1$. В силу утверждений (iv), (vii) теоремы 2.2 семейство $K_v := \{f \in \mathbb{C}_a: I(f) \leq v\}$ есть семейство вложенных компактов.

Докажем, что для любого $N < \infty$ найдется $v = v_N$ такое, что компакт K_v удовлетворяет (2.24). Для этого рассмотрим наряду с ξ случайную величину $\gamma := \Lambda(\xi)$ и для нее построим функцию уклонений

$$\Lambda^{(\gamma)}(t) := \sup_{\lambda} \{\lambda t - \ln \mathbf{E} e^{\lambda \gamma}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся следующим утверждением (см. [4, теорема 3.1]).

Лемма 2.5. Пусть для невырожденной случайной величины $\xi \in \mathbb{R}$ выполнено условие $[\mathbf{C}]$. Тогда для неотрицательной случайной величины $\gamma := \Lambda(\xi)$ выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$ и при этом $\Lambda^{(\gamma)}(t) \geq t - \mathbf{E} \gamma$ при всех t .

В силу экспоненциального неравенства Чебышёва и леммы 2.5 при $v \geq \mathbf{E} \gamma$ имеем

$$\mathbf{P}(s_n \notin K_v) = \mathbf{P}(I(s_n) > v) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda(\xi_i) > v\right) \leq e^{-n\Lambda^{(\gamma)}(v)} \leq e^{-n(v - \mathbf{E} \gamma)}.$$

Поэтому для $v = N + \mathbf{E} \gamma$ выполнено (2.24). Лемма 2.4 доказана.

Продолжим доказательство утверждения (i) теоремы 2.4. В силу теоремы 2.3 справедлива оценка сверху в л.п.б.у. для s_n (см. определение 1.1). Из леммы 2.4 вытекает, что выполнено условие $[\mathbf{K}]_0$. Поэтому в силу теоремы 1.1

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \leq -J(B+), \quad (2.25)$$

т.е. имеет место оценка сверху в р.п.б.у. с параметрами (n, J) в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$. Из утверждения (vii) теоремы 2.2 следует, что множество $J_v = \{g \in \mathbb{C}: J(g) \leq v\}$ компактно в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$. Стало быть, по лемме 2.1 выполняется равенство $J(B+) = J([B]_{\mathbb{C}})$, т.е. правую часть в (2.25) можно заменить на $-J([B]_{\mathbb{C}})$. Утверждение (i) теоремы 2.4 установлено.

(ii) В силу теоремы 1.1 утверждение (ii) теоремы 2.4 вытекает из утверждения (ii) теоремы 2.3.

Теорема 2.4 доказана.

2.2.4. П.б.у. для выпуклых множеств. Как мы видели, в п.б.у. для непрерывных траекторий s_n условие $[C_{\infty}]$ требуется только для оценок сверху. Для выпуклых множеств это моментное условие можно убрать или существенно ослабить, а само утверждение п.б.у. усилить.

Мы будем говорить, что множество B удовлетворяет условию $[B]$, если выполнено хотя бы одно из условий (a), (c) леммы 2.2.

$[B]$. (a) B открыто;

или

(c) $I_a((x/n)(B)_{\mathbb{C}}) < \infty$ (или $J((x/n)(B)_{\mathbb{C}}) < \infty$).

В дополнение к утверждению (ii) теоремы 2.4 имеют место следующие оценки сверху в п.б.у.

Теорема 2.5. Пусть $B \subset \mathbb{C}$ — выпуклое множество. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Для любого $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq e^{-nI_a((x/n)[B]_{\mathbb{C}})} \leq e^{-nJ((x/n)[B]_{\mathbb{C}})}. \quad (2.26)$$

Если дополнительно выполнено условие $[B]$, то $[B]_{\mathbb{C}}$ в (2.26) можно заменить на B .

(ii) Если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

(d) множество B ограничено;

(e) выполнено условие $[C_0]$, то для $\alpha = x/n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \leq -J(B+). \quad (2.27)$$

(iii) Если $x = n$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \leq -J([B]_{\mathbb{C}}). \quad (2.28)$$

Если дополнительно выполнено условие $[B]$, то $[B]_{\mathbb{C}}$ в правой части (2.28) можно заменить на B .

Следствие 2.1. Если множество B выпукло и удовлетворяет условию $[B]$, то для $x = n$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) = -J(B). \quad (2.29)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.5. (i) Первое неравенство в (2.26) вытекает из утверждения раздела (iii) теоремы 2.2 в [4]; второе — из утверждения раздела (vi) теоремы 2.2.

Пусть дополнительно множество B открыто. Тогда в силу леммы 2.2 и утверждения (vi) теоремы 2.2

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq e^{-nJ((x/n)B)},$$

где $J((x/n)B) = I_a((x/n)B)$.

Если для множества B выполнено условие $I_a((x/n)(B)_\mathbb{C}) < \infty$ или $J((x/n)(B)_\mathbb{C}) < \infty$, то в силу леммы 2.1

$$I_a\left(\frac{x}{n}[B]_\mathbb{C}\right) = I_a\left(\frac{x}{n}B\right) = J\left(\frac{x}{n}B\right) = J\left(\frac{x}{n}[B]\right).$$

Утверждение раздела (i) доказано.

(ii) Пусть B — ограниченное выпуклое множество. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n имеем $(x/n)[B]_\mathbb{C} \subset (B)_\varepsilon$. Поэтому в силу утверждения (i)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \leq -J\left(\frac{x}{n}[B]_\mathbb{C}\right) \leq -J((B)_\varepsilon).$$

Отсюда получаем (2.27).

Если выполнено условие $[C_0]$, то введем в рассмотрение множество $U_v = \{f: \rho_\mathbb{C}(0, f) \leq v\}$. Имеем

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq \mathbf{P}(s_n \in BU_v) + \mathbf{P}(\rho_\mathbb{C}(0, s_n) > v), \quad (2.30)$$

где к первому слагаемому в правой части применимы рассуждения, приведенные выше. Предположим, что для любого $N < \infty$ найдутся $u < \infty$ и $C < \infty$ такие, что

$$\mathbf{P}(\rho_\mathbb{C}(0, s_n) > u) \leq Ce^{-nN}, \quad n \geq 1. \quad (2.31)$$

Тогда утверждение (ii) будет вытекать из (2.30), (2.31). Таким образом, нам осталось доказать (2.31).

Пусть сначала $d = 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{E} \xi = 0$. Тогда для всех достаточно больших n (см., например, [11])

$$\mathbf{P}(\rho_\mathbb{C}(s_n, 0) \geq u) = \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq xu\right) \leq e^{-n\Lambda(xu/n)} + e^{-n\Lambda(-xu/n)}.$$

При выполнении условия $[C_0]$ для некоторого $c_1 > 0$ и всех достаточно больших n и u в силу (2.23) имеем

$$\mathbf{P}(\rho_\mathbb{C}(s_n, 0) \geq u) \leq 2e^{-nuc_1/2}.$$

Отсюда вытекает (2.31). Если $d \geq 2$, то следует воспользоваться приведенными выше неравенствами для каждой из координат траектории s_n .

Утверждение (ii) доказано.

(iii) Утверждение (iii) вытекает из утверждения (i) и леммы 2.2.

Теорема 2.5 доказана.

Доказательство следствия 2.1. Если выполнено условие $[\mathbf{B}]$ и $x = n$, то в силу утверждения (iii) теоремы 2.5 выполнено соотношение (2.28), в котором правую часть $-J([B]_{\mathbb{C}})$ можно заменить на $-J(B)$. Если воспользоваться также оценкой снизу в теореме 2.4 с заменой $J((B)_{\mathbb{C}})$ на $J(B)$, то мы получим (2.29). Следствие 2.1 доказано.

Утверждения этого пункта показывают, что условие $[\mathbf{C}_{\infty}]$ не является, вообще говоря, необходимым для выполнения оценки сверху (2.21) в теореме 2.4. В то же время условие $[\mathbf{C}_{\infty}]$ существенно используется при доказательстве (2.21) и не видно путей, как этого избежать. С другой стороны, нам неизвестны примеры, когда при выполнении, скажем, лишь условия $[\mathbf{C}_0]$ неравенство (2.21) было бы неверным. Таким образом, вопрос о существенности условия $[\mathbf{C}_{\infty}]$ в теореме 2.4 остается открытым.

2.3. П.б.у. в схеме серий. В [18] получено утверждение, аналогичное теореме 2.4, но в иной постановке задачи. Там распределение $\mathbf{F} = \mathbf{F}_n$ слагаемого $\xi \in \mathbb{R}$ блуждания $\{S_k; 0 \leq k \leq n\}$ зависит от n (так называемая схема серий), и это распределение выбирается следующим специальным образом:

$$\mathbf{F}_n(dy) = c_n \exp\{-N_n h(y)\} dy,$$

где c_n — нормирующий множитель, $N_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а в качестве функции $h(y)$ выбирается произвольная неотрицательная выпуклая на всей вещественной оси функция, $h(0) = 0$, растущая на бесконечности быстрее любой линейной функции: $h(t) \gg |t|$ при $|t| \rightarrow \infty$. Предположение $N_n \rightarrow \infty$ означает, что распределение $\mathbf{F}_n$ при $n \rightarrow \infty$ концентрируется в окрестности нуля. Функционал $Q(f)$, являющийся аналогом функционала $I(f)$, определяется соотношением

$$Q(f) = Q_h(f) := \begin{cases} \int_0^1 h(f'(t)) dt, & \text{если } f \text{ абсолютно непрерывна,} \\ f(0) = 0; \\ \infty & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

так что $I(f) = Q_{\Lambda}(f)$. Тогда при $x = n$ для любого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$, удовлетворяющего равенству $Q((B)) = Q([B])$, справедливо предельное соотношение (см. теорему 2.1 в [18])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nN_n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) = -Q(B), \quad (2.32)$$

т.е. траектории s_n удовлетворяют п.б.у. с параметрами (z_n, Q) в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ при $z_n = nN_n$.

Как уже отмечалось, распределение ξ при $N_n \rightarrow \infty$ концентрируется в окрестности нуля. Поэтому (2.32) на самом деле есть принцип *сверх-больших уклонений* (скажем, относительно $\mathbf{E}|\xi|$). На это указывает и скорость убывания

$$\mathbf{P}(s_n \in B) = \exp \left\{ -nN_n Q(B)(1 + o(1)) \right\},$$

которая выше экспоненциальной (ср. с теоремой 2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Могульский А. А. О принципах больших уклонений в метрических пространствах. — Сиб. матем. журн., 2010, т. 51, № 6, с. 1251–1269.
2. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 635–654.
3. Могульский А. А. Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 2, с. 309–323.
4. Боровков А. А., Могульский А. А. Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов и для траекторий случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 1, с. 3–27.
5. Varadhan S. R. S. Large Deviations and Applications. Philadelphia: SIAM, 1984, 75 p.
6. Puhalskii A. Large Deviations and Idempotent Probability. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001, 500 p.
7. Varadhan S. R. S. Large deviations. — Ann. Probab., 2008, v. 36, № 2, p. 397–419.
8. Боровков А. А. Принципы больших уклонений для случайных блужданий с правильно меняющимися распределениями скачков. — Сиб. матем. журн., 2011, т. 52, № 3, с. 512–521.
9. Пухальский А. А. К теории больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 3, с. 553–562.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968, 496 с.
11. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения и проверка статистических гипотез. — Новосибирск: Наука, 1992, 222 с.
12. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009, 652 с.
13. Chernoff H., A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, № 4, p. 493–507.
14. Боровков А. А. Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I. — Сиб. матем. журн., 1964, т. 5, № 2, с. 253–289.
15. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 654 с.
16. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954, 499 с.
17. Боровков А. А., Могульский А. А. Свойства функционала уклонений от траекторий, возникающего при анализе вероятностей больших уклонений случайных блужданий. — Сиб. матем. журн., 2011, т. 52, № 4, с. 777–795.
18. Varadhan S. R. S. Asymptotic probabilities and differential equations. — Comm. Pure Appl. Math., 1966, v. 19, № 3, p. 261–286.

Поступила в редакцию
2.VIII.2011