Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Бондарев, С. М. Козырь, О скорости сближения решения дифференциального уравнения, возмущенного “физическим” белым шумом, и решения соответствующего диффузионного уравнения. Экспоненциальное перемешивание, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 4, 656–675

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:28:47

© 2011 г. БОНДАРЕВ Б. В.*, КОЗЫРЬ С. М.

**О СКОРОСТИ СБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ,
ВОЗМУЩЕННОГО «ФИЗИЧЕСКИМ» БЕЛЫМ ШУМОМ,
И РЕШЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО
ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ.
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ¹⁾**

Установлена оценка скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного стационарным процессом с быстрым временем, который в свою очередь является решением стохастического дифференциального уравнения с коэффициентом сноса, удовлетворяющего условию А. Ю. Веретенникова, достаточного для экспоненциального перемешивания, с решением соответствующего уравнения Ито.

Ключевые слова и фразы: стохастическое дифференциальное уравнение, условие абсолютной регулярности, метод одного вероятностного пространства, уравнение Пуассона.

Введение. Рассмотрим последовательность X_t^ε , $\varepsilon > 0$, $0 \leq t \leq T$, решений дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_t^\varepsilon = a(t, X_t^\varepsilon) + b(t, X_t^\varepsilon)\dot{W}_t^\varepsilon, \quad X_0^\varepsilon = X_0, \quad (1)$$

где $\dot{W}_t^\varepsilon$ — последовательность «физических» белых шумов (см. [1, разд. II, § 4, с. 239]), т.е. таких стационарных процессов, для которых процесс

$$W_t^\varepsilon = \int_0^t \dot{W}_s^\varepsilon ds$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо сходится на промежутке $0 \leq t \leq T$ к некоторому винеровскому процессу W_t . Хорошо известно (см. [1]–[7]), что при некоторых условиях (слабой зависимости), налагаемых на интегрируемый процесс $\xi(s)$, $s \geq 0$, случайный процесс

$$W_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \xi(s) ds = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds, \quad t \in [0, T],$$

*Донецкий национальный университет, Университетская ул., 24, 83055 Донецк, Украина; e-mail: bondarev.mart@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта ДФФД Ф25 (для ВНЗ).

слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторому винеровскому процессу σW_t , $t \in [0, T]$. Таким образом, в качестве математической модели «физического» белого шума может быть взят процесс

$$\dot{W}_s^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right).$$

Установлено также [1], [8], что при некоторых ограничениях на функции $a(t, x)$, $b(t, x)$ и их производные имеет место слабая сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ процесса X_t^ε , $0 \leq t \leq T$, к решению стохастического дифференциального уравнения Ито

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left[a(s, X_s) + \frac{\sigma^2}{2} b_x(s, X_s) b(s, X_s) \right] ds + \int_0^t \sigma b(s, X_s) dW_s, \quad (2)$$

где W_t — некоторый стандартный винеровский процесс,

$$\sigma = \left\{ 2 \int_0^\infty \mathbf{E}(\xi(t)\xi(0)) dt \right\}^{1/2}.$$

Естественным образом встает вопрос о скорости сближения в некоторой функциональной метрике решений «предельной» и «допредельной» динамических систем. Несмотря на кажущуюся реальной возможность оценить эту скорость в метрике Леви–Прохорова практическое воплощение такой идеи весьма и весьма затруднительно. Поэтому был выбран метод построения случайных процессов на одном вероятностном пространстве — метод А. В. Скорохода. Целью настоящей работы является оценка скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения (1) и решения соответствующего уравнения Ито, а именно построение оценок вида

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon|^{2m} \leq \delta_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad m \geq 1,$$

где

$$Y_t^\varepsilon = X_0 + \int_0^t \left[a(s, Y_s^\varepsilon) + \frac{\sigma^2}{2} b_x(s, Y_s^\varepsilon) b(s, Y_s^\varepsilon) \right] ds - \int_0^t \sigma b(s, Y_s^\varepsilon) dW_\varepsilon(s), \quad (3)$$

а $W_\varepsilon(s)$ — семейство стандартных винеровских процессов, соответствующим образом построенных по процессу $\xi(t)$. Следует отметить, что для некоторых видов $\dot{W}_t^\varepsilon$ эта задача решалась в работах [9]–[11]. В настоящей работе в качестве процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, рассматривается стационарное решение однородного стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \alpha(\xi(t)) + \int_0^t \alpha(\xi(s)) ds + \int_0^t \beta(\xi(s)) dW(s), \quad (4)$$

где $W(s)$ — стандартный винеровский процесс. Относительно коэффициентов уравнения (4) будем предполагать выполнение условий

$$\begin{aligned} |\alpha(x) - \alpha(y)| + |\beta(x) - \beta(y)| &\leq L|x - y|, & 0 < L < +\infty, \\ 0 < \lambda \leq \beta^2(x) \leq \lambda_+ < +\infty, & |\alpha(x)| \leq C(1 + |x|) \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $x, y \in \mathbf{R}^1$, а также условий

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = \chi_1 > -r, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = \chi_2 > r, \quad 0 < r < +\infty, \quad (6)$$

достаточных для экспоненциально быстрого перемешивания решения $\xi(t)$, (см. [12], [13], [15]). В случае выполнения условий (5)–(6) у процесса $\xi(t)$ существует (см. [14, § 18]) эргодическое распределение $\pi(x)$ с плотностью

$$\rho(x) = \frac{1}{D\beta^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2\alpha(y) dy}{\beta^2(y)} \right\}, \quad (7)$$

где $D > 0$ — нормировочная постоянная. Будем предполагать, что распределение независимой случайной величины $\xi(0)$ совпадает с $\pi(x)$, т.е. процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, — стационарный марковский процесс. В качестве «физического» белого шума $\dot{W}_t^\varepsilon$ будет взят процесс

$$\dot{W}_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f} \right], \quad (8)$$

где $\bar{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \pi(dx)$, $f(x)$ — некоторая ограниченная ($|f(x)| \leq C_f < +\infty$) гёльдеровская функция. Везде далее считаем, что $0 < \varepsilon \leq 1$.

1. Оценка скорости сближения нормированных интегралов от диффузионных процессов с семейством непрерывных мартингалов. Для заданных $\alpha(x)$, $\beta(x)$ введем линейный оператор

$$\tilde{L}U = \frac{1}{2} \beta^2(x) \frac{d^2 U}{dx^2} + \alpha(x) \frac{dU}{dx}.$$

Имеет место следующее утверждение: если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ удовлетворяют условиям (5) и (6), то для любой ограниченной гёльдеровской функции $f(x)$ существует и единственна постоянная,

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (9)$$

такая, что уравнение Пуассона

$$\tilde{L}U = f - \bar{f} \quad (10)$$

имеет единственное [15] обобщенное решение, локально принадлежащее пространству Соболева $W^{2,p}(-\infty, +\infty)$ при каждом $p \in (1, +\infty)$.

Займемся решением задачи (10). Нетрудно убедиться в том, что решением (10) будет [15, с. 1061] функция

$$U(x) = - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - \bar{f}] P(x, t, dy) dt, \quad (11)$$

где $P(x, t, A)$ — вероятность перехода процесса $\xi(s)$, $s \geq 0$, из состояния x за время t во множество A . В силу теоремы 1 из [12] для каждого достаточно малого $c_3 > 0$ существуют $c_0 > 0$, $c_4 > 0$ такие, что

$$\text{var}(P(x, t, dy) - \pi(dy)) \leq c_0 \exp\{c_3|x| - c_4t\} \quad (12)$$

(мы сохраняем обозначения постоянных из [12], так как в [12] можно увидеть их связь). Из (11), с учетом (12) и того, что в данном случае существует $\rho(x, t, y)$ — плотность вероятности перехода $P(x, t, A)$, получаем

$$\begin{aligned} |U(x)| &\leq \left| \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) P(x, t, dy) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \pi(dy) \right] dt \right| \\ &\leq \sup_{-\infty < z < +\infty} |f(z)| \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho(x, t, y) - \rho(y)| dy dt \\ &\leq 2 \sup_{-\infty < z < +\infty} |f(z)| \int_0^{+\infty} c_0 \exp\{c_3|x| - c_4t\} dt \\ &\leq \exp\{c_3|x|\} C_1, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$C_1 = \frac{2c_0}{c_4} C_f \quad (14)$$

(мы использовали соотношение между расстоянием по вариации и метрикой пространства $L^1(-\infty, +\infty)$ для плотностей, см. [16, гл. 1, теорема 1, с. 11]).

Предположим, что на функцию f наложены условия

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq C_f < +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c_1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c_2, \\ |c_1| < +\infty, \quad |c_2| < +\infty \end{aligned} \quad (15)$$

и выполнены условия (6), достаточные для экспоненциального перемешивания.

Обозначая $\psi(x) = dU/dx$, перепишем (10) в виде

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{2\alpha(x)}{\beta^2(x)} \psi(x) = \frac{2[f(x) - \bar{f}]}{\beta^2(x)}. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться в том, что решение уравнения (16) на $(-\infty, +\infty)$ имеет вид

$$\psi(x) = V(x) \int_{-\infty}^x V^{-1}(y) \frac{2[f(y) - \bar{f}]}{\beta^2(y)} dy, \quad V^{-1}(x) = \exp \left\{ \int_0^x \frac{2\alpha(y)dy}{\beta^2(y)} \right\}. \quad (17)$$

Действительно, выберем в (13) постоянную $c_3 > 0$ настолько малой, чтобы выполнялось неравенство $c_3 < 2r/\lambda_+$. Нетрудно заметить, что в нашем случае найдутся постоянные R и $C(R, r)$ такие, что при $|x| \geq R > 0$ выполнено неравенство

$$V^{-1}(x) \leq C(R, r) \exp \left\{ -\frac{2r}{\lambda_+} |x| \right\},$$

а так как в силу (13) функция $\psi(x) = dU(x)/dx$ растёт не быстрее, чем $\exp\{c_3|x|\}$, то $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \psi(x)V^{-1}(x) = 0$.

Представление (17), в частности, показывает, что имеется согласование с тем фактом, что правая часть (16) ортогональна решению однородного сопряженного к (16) уравнения. Нетрудно показать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = \left| \frac{c_1 - \bar{f}}{\chi_1} \right|, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi(x)| = \left| \frac{c_2 - \bar{f}}{\chi_2} \right|. \quad (18)$$

Действительно, поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x [f(y) - \bar{f}] \rho(y) dy = 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| &= \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^x (2[f(y) - \bar{f}]/\beta^2(y)) V^{-1}(y) dy}{V^{-1}(x)} \right| \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2[f(x) - \bar{f}]/\beta^2(x)) V^{-1}(x)}{V^{-1}(x) 2\alpha(x)/\beta^2(x)} \right| \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \bar{f}}{\alpha(x)} \right| = \left| \frac{c_1 - \bar{f}}{\chi_1} \right|, \end{aligned} \quad (19)$$

и аналогично, поскольку $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x [f(y) - \bar{f}] \rho(y) dy = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = \left| \frac{c_2 - \bar{f}}{\chi_2} \right|.$$

Из (18) следует, что

$$|\psi(x)| \leq D_\psi < +\infty, \quad |U(x) - U(y)| \leq D_\psi |x - y|, \quad (20)$$

где $0 < D_\psi < +\infty$ — контролируемая постоянная. Заметим, что в скалярном случае решение задачи (10) в силу гёльдеровости коэффициентов оператора $\tilde{L}$ и правой части, будет принадлежать пространству C^2 . Если вместо условия (6) потребовать выполнения условий

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \leq \beta^2(x) \leq \lambda_+ < +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{x^\gamma} = \chi_1 \leq -r, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha(x)}{x^\gamma} = \chi_2 \geq r, \\ 0 < r < +\infty, \quad 0 < \gamma \leq 1 \end{aligned}$$

(случай $\gamma = 1$ соответствует сносу процесса Орнштейна–Уленбека), то очевидно, что $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = 0$. Является соблазном рассмотреть и $-1 \leq \gamma < 0$, что соответствует степенному либо субэкспоненциальному случаям перемешивания. Нетрудно заметить, что в этих случаях, чтобы получить конечные пределы функции $\psi(x)$ на бесконечности, необходимо соответствующее убывание на бесконечности функции $f(x) - \bar{f}$. Последнее возможно, например, при $\bar{f} = 0$ (что является, по мнению авторов, не очень естественным предположением) и соответствующей скорости убывания $f(x)$.

Применив формулу Ито к функции $U(\xi(t))$, имеем

$$dU(\xi(t)) = \tilde{L}U(\xi(t)) dt + \psi(\xi(t))\beta(\xi(t)) dW(t), \quad (21)$$

а с учетом (10) имеем

$$dU(\xi(t)) = [f(\xi(t)) - \bar{f}] dt + \beta(\xi(t))\psi(\xi(t)) dW(t). \quad (22)$$

Интегрируя (22), получаем

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [f(\xi(s)) - \bar{f}] ds \\ &= \sqrt{\varepsilon} \left[U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - U(\xi(0)) \right] - \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \beta(\xi(s))\psi(\xi(s)) dW(s). \end{aligned} \quad (23)$$

Нетрудно заметить, что представление (23) есть не что иное, как представление Д. О. Чикина [6]: в данном случае

$$\begin{aligned} \rho_t^\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon} \left[U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - U(\xi(0)) \right], \\ \mu_t^\varepsilon &= -\sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \beta(\xi(s)) \frac{dU(\xi(s))}{dx} dW(s). \end{aligned} \quad (24)$$

В силу (20) очевидно, что

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\rho_t^\varepsilon|^{2m} \leq \varepsilon^m D_\psi^{2m} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \xi(0) \right|^{2m}. \quad (25)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \xi(0) \right|^{2m} &\leq \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T/\varepsilon} |\xi(t) - \xi(0)|^{2m} \\ &\leq \sum_{i=0}^{[T/\varepsilon]-1} \mathbf{E} \sup_{i \leq t \leq i+1} |\xi(t) - \xi(0)|^{2m} \\ &\leq 2^{2m-1} \left(\frac{T}{\varepsilon} + 1 \right) \left(\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi(t)|^{2m} + \mathbf{E} |\xi(0)|^{2m} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку в данном случае $r_0 = +\infty$ (см. [15, с. 1063]), то имеет место оценка

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi(t)|^{2m} \leq CC_{2m} + C(1 + [C_{2m}]^{(4m-1)/(4m)}), \quad (27)$$

где

$$\mathbf{E} |\xi(0)|^{2m} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \rho(x) dx = C_{2m}. \quad (28)$$

Из (25)–(27) следует оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\rho_t^\varepsilon|^{2m} &\leq \varepsilon^{m-1} (T+1) D_\psi^{2m} \\ &\times 4^m \left[(C+1)C_{2m} + C(1 + [C_{2m}]^{(4m-1)/(4m)}) \right]. \end{aligned}$$

Резюмируя выкладки, приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. Пусть выполняются условия (15), стационарный диффузионный процесс задан как решение уравнения (4), начальное распределение которого совпадает с инвариантным, и пусть выполняются условия (6) и (5). Тогда при $m > 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [f(\xi(s)) - \bar{f}] ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \beta(\xi(s)) \psi(\xi(s)) dW(s) \right|^{2m} \\ \leq \varepsilon^{m-1} D_U(2m), \end{aligned} \quad (29)$$

функция $\psi(x)$ задается формулой (17), а плотность эргодического распределения $\rho(x)$ задается формулой (7), здесь

$$D_U(2m) = (T+1) D_\psi^{2m} \cdot 4^m \left[(C+1)C_{2m} + C(1 + [C_{2m}]^{(4m-1)/(4m)}) \right]. \quad (30)$$

2. Оценка скорости сближения нормированных стохастических интегралов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами с семейством винеровских процессов. Основным результатом этого пункта будет доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (15), $\rho(x)$ — плотность инвариантного распределения стационарного процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, и выполняются условия (5) и (6). Пусть также $m \geq 1$ и

$$A(2m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{2m}(x) \beta^{2m}(x) \rho(x) dx \leq D_\psi^{2m} \lambda_+^m. \quad (31)$$

Тогда для любых $0 < \chi < 1/4$ справедлива оценка

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \beta(\xi(s)) \psi(\xi(s)) dW(s) - \sqrt{A(2)} \widetilde{W}_\varepsilon(t) \right| > \delta_\varepsilon \right\} \leq \gamma_\varepsilon, \quad (32)$$

где $\widetilde{W}_\varepsilon(t)$ — некоторое семейство стандартных винеровских процессов,

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon &= 5\varepsilon^\chi + 12(T+1)\sqrt{c_0} \exp\left\{-\frac{c_4}{2\varepsilon^{1/4-\chi}}\right\}, \\ \gamma_\varepsilon &= 12\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}} + 1\right) \exp\left\{-\frac{1}{4\lambda_+ D_\psi^2 \varepsilon^{1/2-2\chi}}\right\} \\ &\quad + 8 \exp\left\{-\frac{1}{2T\lambda_+ D_\psi^2 \varepsilon^{1/2} - \chi}\right\} \\ &\quad + \exp\left\{-\frac{\alpha_0}{64\varepsilon^{1/4} - \chi}\right\} \left(1 + \alpha_0 \sqrt{\lambda_+ D_\psi^2} \left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}} + 1\right)^{1/2}\right) \\ &\quad + 12\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}} + 1\right) \sqrt{c_0} \exp\left\{-\frac{c_4}{2\varepsilon^{1/4-\chi}}\right\},\end{aligned}\quad (33)$$

постоянные $c_0 > 0$, $c_4 > 0$ — из оценки (12), функция $\psi(x)$ задается формулой (17), а плотность эргодического распределения $\rho(x)$ задается формулой (7), α_0 — контролируемая постоянная (см. комментарий после формулы (50)).

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений из работ [3], [4]. Имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \leq \tau \leq t+h} \left|\int_t^\tau \sqrt{\varepsilon} \psi(\xi(s)) \beta(\xi(s)) dW(s)\right| > x\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{x^2}{2\varepsilon h \lambda_+ D_\psi^2}\right\}.\quad (34)$$

В справедливости (34) нетрудно убедиться, если воспользоваться экспоненциальной оценкой для супремума непрерывного мартингала $\mu(t)$ [17, гл. 3, § 2, теорема 4, с. 173], заметив, что в нашем случае выполнено неравенство $\langle \sqrt{\varepsilon} \mu, \sqrt{\varepsilon} \mu \rangle_t^{t+h} \leq \varepsilon h \lambda_+ D_\psi^2$. Далее, пусть временные отрезки l_ε , b_ε , h_ε таковы, что $l_\varepsilon = o(1/\varepsilon)$, $T/\varepsilon = nl_\varepsilon + r_\varepsilon$, $l_\varepsilon = b_\varepsilon + h_\varepsilon$, $h_\varepsilon = o(l_\varepsilon)$, где $n = [T/(\varepsilon l_\varepsilon)]$, $[\cdot]$ — целая часть. Введем обозначения

$$\begin{aligned}\nu_k &= \int_{(k-1)l_\varepsilon}^{(k-1)l_\varepsilon + b_\varepsilon} \psi(\xi(s)) \beta(\xi(s)) dW(s), \\ \lambda_k &= \int_{(k-1)l_\varepsilon + b_\varepsilon}^{(k-1)l_\varepsilon + b_\varepsilon + h_\varepsilon} \psi(\xi(s)) \beta(\xi(s)) dW(s)\end{aligned}$$

при $k = 1, \dots, n$ и

$$\nu_{n+1} = \int_{nl_\varepsilon}^{T/\varepsilon} \psi(\xi(s)) \beta(\xi(s)) dW(s).$$

Пусть $\eta_\varepsilon^1(t)$ — случайная ломаная с узлами

$$\begin{aligned}\left(k\varepsilon l_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} \int_0^{kl_\varepsilon} \psi(\xi(s)) \beta(\xi(s)) dW(s)\right), \quad k = 0, \dots, n, \\ \left(T, \sqrt{\varepsilon} \int_0^{T/\varepsilon} \psi(\xi(s)) \beta(\xi(s)) dW(s)\right),\end{aligned}$$

и пусть

$$\eta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s)) dW(s).$$

Тогда на временном отрезке $[k\varepsilon l_\varepsilon, (k+1)\varepsilon l_\varepsilon]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon l_\varepsilon} |\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon^1(t)| \\ & \leq \sqrt{\varepsilon} \sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon l_\varepsilon} \left| \int_{kl_\varepsilon}^{t/\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s)) dW(s) \right. \\ & \quad \left. - \frac{t - k\varepsilon l_\varepsilon}{\varepsilon l_\varepsilon} \int_{kl_\varepsilon}^{(k+1)l_\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s)) dW(s) \right| \\ & \leq 2\sqrt{\varepsilon} \sup_{kl_\varepsilon \leq \tau \leq (k+1)l_\varepsilon} \left| \int_{kl_\varepsilon}^\tau \psi(\xi(s))\beta(\xi(s)) dW(s) \right|. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (35), с учетом оценки (34), следует оценка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon l_\varepsilon} |\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon^1(t)| > x_1 \right\} \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{kl_\varepsilon \leq \tau \leq (k+1)l_\varepsilon} \left| \int_{kl_\varepsilon}^\tau \sqrt{\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s)) dW(s) \right| > \frac{x_1}{2} \right\} \\ & \leq 2 \exp \left\{ - \frac{x_1^2}{4\varepsilon l_\varepsilon D_\psi^2 \lambda_+} \right\}, \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon^1(t)| > x_1 \right\} \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq k \leq n} \sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon l_\varepsilon} |\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon^1(t)| > x_1 \right\} \\ & \leq 2 \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1 \right) \exp \left\{ - \frac{x_1^2}{4\varepsilon l_\varepsilon \lambda_+ D_\psi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть $\eta_\varepsilon^2(t)$ — случайная ломаная с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \nu_i \right), \quad k = 0, \dots, n, \quad \left(T, \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \nu_i + \sqrt{\varepsilon} \nu_{n+1} \right),$$

тогда, опираясь на оценку (34), имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon^2(t) - \eta_\varepsilon^1(t)| > x_2 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k |\sqrt{\varepsilon} \lambda_i| > x_2 \right\} \\ & \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{(i-1)l_\varepsilon + b_\varepsilon}^{(i-1)l_\varepsilon + b_\varepsilon + h_\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s)) dW(s) \right| > x_2 \right\} \\ & \leq 2 \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1 \right) \exp \left\{ - \frac{x_2^2}{4\varepsilon h_\varepsilon \lambda_+ D_\psi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть $\eta_\varepsilon^3(t)$ — случайная ломаная с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \tilde{\nu}_i\right), \quad k = 0, \dots, n, \quad \left(T, \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \tilde{\nu}_i + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\nu}_{n+1}\right),$$

где вектор $\{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_{n+1}\}$ состоит из независимых случайных величин и имеет то же распределение, что и вектор $\{\nu_1, \dots, \nu_{n+1}\}$. Напомним определение абсолютной регулярности [19, гл. 4, § 1, с. 156].

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть процесс $\xi(t)$ абсолютно регулярным, если

$$\beta_\tau = \mathbf{E} \sup_{A \in \mathfrak{I}_{t+\tau}^{+\infty}} |\mathbf{P}\{A | \mathfrak{I}_0^t\} - \mathbf{P}\{A\}| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (38)$$

где σ -алгебры $\mathfrak{I}_0^t$ и $\mathfrak{I}_{t+\tau}^{+\infty}$ порождены процессом $\xi(t)$ на интервалах $[0, t]$ и $[t + \tau, +\infty)$ соответственно; величина β_τ называется коэффициентом абсолютной регулярности.

Условия (5) и (6) достаточны (см. [12], [13]) для того, чтобы стационарный процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, обладал свойством абсолютной регулярности, причем коэффициент абсолютной регулярности удовлетворял неравенству

$$\beta_\tau \leq c_0 e^{-c_4 \tau}, \quad c_0 > 0. \quad (39)$$

В силу того, что случайные величины $\{\nu_1, \dots, \nu_{n+1}\}$ отстоят друг от друга не менее чем на величину h_ε , имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{|\nu_k - \tilde{\nu}_k| \geq 6\sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}\} \leq 6\sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}, \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (40)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть случайная мера P_1 определена формулой

$$\mathbf{P}_1\{A\} = \mathbf{P}\{A | \mathfrak{I}_0^t\}, \quad A \in \mathfrak{I}_{t+\tau}^{+\infty}.$$

Из (38) в силу неравенства Чебышёва следует оценка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\sup_{A \in \mathfrak{I}_{t+\tau}^{+\infty}} |\mathbf{P}_1\{A\} - \mathbf{P}\{A\}| > \sqrt{\beta_\tau}\right) \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\beta_\tau}} \mathbf{E} \sup_{A \in \mathfrak{I}_{t+\tau}^{+\infty}} |\mathbf{P}\{A | \mathfrak{I}_0^t\} - \mathbf{P}\{A\}| = \sqrt{\beta_\tau} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (41)$$

Пусть $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P})$ — расстояние Леви–Прохорова между мерами $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}$, тогда, если $|\mathbf{P}_1\{A\} - \mathbf{P}\{A\}| \leq \varepsilon_k$, то $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}) \leq 2\varepsilon_k$ и можно построить независимую величину $\tilde{\nu}_k$ так (см. [20, с. 35]), чтобы выполнялось неравенство

$$\mathbf{P}\{|\nu_k - \tilde{\nu}_k| \geq 6\varepsilon_k\} \leq 4\varepsilon_k. \quad (42)$$

Из (41) и (42) следует оценка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{|\nu_k - \tilde{\nu}_k| \geq 6\sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{|\nu_k - \tilde{\nu}_k| \geq 6\sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}, \sup_{A \in \mathcal{I}_{kl_\varepsilon}^{+\infty}} |\mathbf{P}_1\{A\} - \mathbf{P}\{A\}| > \sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}\right\} \\ &+ \mathbf{P}\left\{|\nu_k - \tilde{\nu}_k| \geq 6\sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}, \sup_{A \in \mathcal{I}_{kl_\varepsilon}^{+\infty}} |\mathbf{P}_1\{A\} - \mathbf{P}\{A\}| \leq \sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{A \in \mathcal{I}_{kl_\varepsilon}^{+\infty}} |\mathbf{P}_1\{A\} - \mathbf{P}\{A\}| > \sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}\right\} + 4\sqrt{\beta_{h_\varepsilon}} \leq 6\sqrt{\beta_{h_\varepsilon}}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы. Из (39) и (40) имеем оценку

$$\mathbf{P}\left\{|\nu_k - \tilde{\nu}_k| \geq 6\sqrt{c_0}e^{-1/(2c_4h_\varepsilon)}\right\} \leq 6\sqrt{c_0}e^{-1/(2c_4h_\varepsilon)}, \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (43)$$

Используя оценку (43), получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon^2(t) - \eta_\varepsilon^3(t)| \geq 12\sqrt{\varepsilon}\sqrt{c_0}e^{-c_4/(2h_\varepsilon)}\left(\frac{\varepsilon T}{l_\varepsilon} + 1\right)\right\} \\ &\leq P\left\{\max_{1 \leq k \leq n+1} \left|\sum_{i=1}^k \sqrt{\varepsilon}\nu_i - \sum_{i=1}^k \sqrt{\varepsilon}\tilde{\nu}_i\right| \geq 12\sqrt{\varepsilon}\sqrt{c_0}e^{-c_4/(2h_\varepsilon)}(n+1)\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} |\nu_i - \tilde{\nu}_i| \geq 12\sqrt{c_0}e^{-c_4/(2h_\varepsilon)}(n+1)\right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}\left\{|\nu_i - \tilde{\nu}_i| \geq 12\sqrt{c_0}e^{-c_4/(2h_\varepsilon)}(n+1)\right\} \\ &\leq \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right) \cdot 12\sqrt{c_0}e^{-c_4/(2h_\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Пусть $\{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_{n+1}\}$ — вектор из независимых случайных величин, а вектор $\{\phi_1, \dots, \phi_{n+1}\}$ состоит из независимых нормально распределенных случайных величин, имеющих, как и величины $\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_{n+1}$, нулевое среднее и те же вторые моменты, т.е.

$$\mathbf{E} \phi_i = 0, \quad \mathbf{E} \phi_i^2 = \mathbf{E} \tilde{\nu}_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, n+1.$$

А. И. Саханенко в [21], [22] доказал следующее утверждение.

Лемма 3. Если при некотором $\alpha > 0$ справедливы неравенства

$$\alpha \mathbf{E} |\tilde{\nu}_k|^3 \exp\{\alpha |\tilde{\nu}_k|\} \leq \mathbf{D} \tilde{\nu}_k, \quad k = 1, \dots, n+1, \quad (45)$$

то по вектору $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\}$ можно построить вектор $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}\}$, имеющий такое же распределение, как и $\{\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \dots, \tilde{\nu}_n, \tilde{\nu}_{n+1}\}$, таким образом, что

$$\mathbf{E} \exp\{8c\alpha \Delta_n\} \leq 1 + \alpha B_n, \quad (46)$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная постоянная (без потери общности можно считать, что $0 < c \leq 1/64$) и

$$\Delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \xi_i - \sum_{i=1}^k \phi_i \right|, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{D} \xi_k.$$

В построениях А. И. Саханенко по вектору из независимых нормально распределенных величин строился вектор из независимых величин, имеющий то же самое фиксированное распределение, что и исходный вектор, но наиболее близкий к вектору из независимых нормально распределенных величин. Имеется и обратное построение — из [23, лемма 1.5] вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $\{\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \dots, \tilde{\nu}_n, \tilde{\nu}_{n+1}\}$ — вектор из независимых случайных величин, которые имеют нулевые средние и конечные моменты второго порядка, и справедливы неравенства (45). Тогда можно задать случайные величины $\{\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \dots, \tilde{\nu}_n, \tilde{\nu}_{n+1}\}$, вообще говоря, на более богатом вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{I}', \mathbf{P}')$, и по этому вектору на вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{I}', \mathbf{P}')$ построить вектор $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\}$ из независимых нормально распределенных случайных величин таких, что

$$\mathbf{E}' \tilde{\nu}_i = \mathbf{E} \phi_i = 0, \quad \mathbf{D}' \tilde{\nu}_i = \mathbf{D} \phi_i$$

для всех i и для любого $x > 0$ верно неравенство (46).

Заметим, что в наших предположениях условие (45) выполняется. Действительно, поскольку имеет место оценка (см. [24, гл. 3, § 4, лемма 5, с. 71–72])

$$\mathbf{P} \left\{ 2 \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \geq x \right\} \leq 2 \exp \left\{ - \frac{x^2}{4\lambda_+ D_\psi^2 b_\varepsilon / l_\varepsilon} \right\} \leq 2 \exp \left\{ - \frac{x^2}{4\lambda_+ D_\psi^2} \right\}$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left\{ 2\alpha \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \right\} &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} d\mathbf{P} \left\{ 2 \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| < x \right\} \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{2\alpha x} d\mathbf{P} \left\{ 2 \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \geq x \right\} \\ &= -e^{\alpha x} \mathbf{P} \left\{ 2 \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \geq x \right\} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha e^{\alpha x} \mathbf{P} \left\{ 2 \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \geq x \right\} dx \\ &\leq 1 + 2\alpha \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \exp \left\{ - \frac{x^2}{4D_\psi^2 \lambda_+} \right\} dx \\ &\leq 1 + 4\alpha \sqrt{2\pi D_\psi^2 \lambda_+} \exp \{ 4\alpha^2 \lambda_+ D_\psi^2 \}. \end{aligned} \quad (47)$$

Нетрудно также убедиться в том, что верна оценка

$$\mathbf{E} \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right|^6 \leq (15)^3 D_\psi^6 \lambda_+^3 \quad (48)$$

(для этого достаточно воспользоваться оценкой для моментов стохастических интегралов Ито — см., например, [14, гл. 1, теорема 6]). Из (47), (48) при $0 < \alpha \leq \alpha_0$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{E} \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right|^3 \exp \left\{ \alpha \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \right\} &\leq \alpha \left(\mathbf{E} \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right|^6 \right)^{1/2} \left(\mathbf{E} \exp \left\{ 2\alpha \left| \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \right\} \right)^{1/2} \\ &\leq \alpha [15 D_\psi^6 \lambda_+^3]^{3/2} \left[1 + 4\alpha \sqrt{2\pi \lambda_+ D_\psi^2} \exp\{4\alpha^2 \lambda_+ D_\psi^2\} \right]^{1/2} \\ &\leq \mathbf{D} \frac{\tilde{\nu}_k}{\sqrt{l_\varepsilon}} = \varepsilon \frac{\beta_\varepsilon}{l_\varepsilon} \lambda_+ D_\psi^2, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (49)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{E} \left| \frac{\tilde{\nu}_{n+1}}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right|^3 \exp \left\{ \alpha \left| \frac{\tilde{\nu}_{n+1}}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| \right\} &\leq \alpha (\mathbf{E} |\tilde{\nu}_{n+1}|^6)^{1/2} \left(\mathbf{E} \exp \{2\alpha |\tilde{\nu}_{n+1}|\} \right)^{1/2} \\ &\leq \alpha [15 D_\psi^6 \lambda_+^3]^{3/2} \left[1 + 4\alpha \sqrt{2\pi \lambda_+ D_\psi^2} \exp\{4\alpha^2 \lambda_+ D_\psi^2\} \right]^{1/2} \\ &\leq \mathbf{D} \frac{\tilde{\nu}_{n+1}}{\sqrt{l_\varepsilon}} = \frac{T/\varepsilon - n l_\varepsilon}{l_\varepsilon} \lambda_+ D_\psi^2. \end{aligned} \quad (50)$$

В дальнейшем везде считаем α_0 таким, что для $0 < \alpha \leq \alpha_0$ выполняются неравенства (49), (50). Пусть $\eta_\varepsilon^4(t)$ — случайная ломаная с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \phi_i \right), \quad k = 0, \dots, n, \quad \left(T, \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \phi_i + \sqrt{\varepsilon} \phi_{n+1} \right),$$

тогда, воспользовавшись неравенством (46), имеем оценку

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon^4(t) - \eta_\varepsilon^3(t)| > x_3 \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{64} \max_{1 \leq k \leq n+1} \left| \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{\nu}_i}{\sqrt{l_\varepsilon}} - \sum_{i=1}^k \frac{\phi_i}{\sqrt{l_\varepsilon}} \right| > \frac{x_3}{64\sqrt{\varepsilon l_\varepsilon}} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\alpha_0 x_3}{64\sqrt{\varepsilon l_\varepsilon}} \right\} \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{\alpha}{16} \Delta_{n+1} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\alpha_0 x_3}{64\sqrt{\varepsilon l_\varepsilon}} \right\} \left(1 + \alpha_0 \sqrt{\lambda_+ D_\psi^2} \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1 \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \phi_k^2 &= \mathbf{E} \tilde{\nu}_k^2 = \varepsilon b_\varepsilon A(2), \quad k = 1, \dots, n, \\ \mathbf{E} \phi_{k+1}^2 &= \mathbf{E} \tilde{\nu}_{n+1}^2 = \varepsilon \left(\frac{T}{\varepsilon} - n l_\varepsilon \right) A(2) = (T - \varepsilon n l_\varepsilon) A(2), \end{aligned}$$

то, в силу результатов работы [25, с. 97], существует стандартный ви-
неровский процесс $W_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, такой, что для любого ϕ_i , $i = 1, \dots, n+1$,
справедливо представление

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon}\phi_i &= W_\varepsilon\left(\varepsilon \sum_{j=1}^i \mathbf{E} \phi_j^2\right) - W_\varepsilon\left(\varepsilon \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{E} \phi_j^2\right) \\ &= W_\varepsilon(i\varepsilon b_\varepsilon A(2)) - W_\varepsilon((i-1)\varepsilon b_\varepsilon A(2)), \\ \varepsilon \sum_{j=1}^0 \mathbf{M} \phi_j^2 &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sqrt{\varepsilon}\phi_{n+1} &= W_\varepsilon(T) - W_\varepsilon(n\varepsilon l_\varepsilon).\end{aligned}$$

Пусть $\eta_\varepsilon^5(t)$ — случайная ломаная с узлами

$$(k\varepsilon l_\varepsilon, W_\varepsilon(k\varepsilon b_\varepsilon A(2))), \quad k = 0, \dots, n, \quad (T, W_\varepsilon(TA(2))),$$

тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon^5(t) - \eta_\varepsilon^3(t)| > x_3\right\} \\ \leq \exp\left\{-\frac{\alpha_0 x_3}{64\sqrt{\varepsilon l_\varepsilon}}\right\} \left(1 + \alpha_0 \sqrt{\lambda_+ D_\psi^2} \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)^{1/2}\right).\end{aligned}\quad (52)$$

Пусть $\eta_\varepsilon^6(t)$ — случайная ломаная с узлами

$$(k\varepsilon l_\varepsilon, W_\varepsilon(k\varepsilon l_\varepsilon A(2))), \quad k = 0, \dots, n, \quad (T, W_\varepsilon(TA(2))).$$

Поскольку для нормальной, $N(0, 1)$, величины ξ справедливо неравен-
ство

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq x\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

то, воспользовавшись неравенством для сумм независимых симметрич-
ных случайных величин (см., например, [24, гл. 3, § 3, теорема 11, с. 67]),
имеем оценку

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon^5(t) - \eta_\varepsilon^6(t)| > x_4\right\} \\ \leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |W_\varepsilon(k\varepsilon b_\varepsilon A(2)) - W_\varepsilon(k\varepsilon l_\varepsilon A(2))| > x_4\right\} \\ \leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |W_\varepsilon(k\varepsilon h_\varepsilon A(2))| > x_4\right\} \leq 4\mathbf{P}\left\{|W_\varepsilon(n\varepsilon h_\varepsilon A(2))| > x_4\right\} \\ \leq 4\mathbf{P}\left\{\left|W_\varepsilon\left(\frac{Th_\varepsilon}{l_\varepsilon} A(2)\right)\right| > x_4\right\} \\ = 4\mathbf{P}\left\{|W_\varepsilon(1)| > x_4 \sqrt{\frac{l_\varepsilon}{Th_\varepsilon}}\right\} \leq 8 \exp\left\{-\frac{x_4^2}{2T\lambda_+ D_\psi^2 h_\varepsilon / l_\varepsilon}\right\}.\end{aligned}\quad (53)$$

Пусть $W_\varepsilon(tA(2)) = \sqrt{A(2)}\widetilde{W}_\varepsilon(t)$, где $\widetilde{W}_\varepsilon(t) = W_\varepsilon(tA(2))/\sqrt{A(2)}$ — стандартный винеровский процесс, тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{A(2)}\widetilde{W}_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon^6(t) \right| > x_5\right\} \\
& \leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \sup_{(k-1)\varepsilon l_\varepsilon \leq t \leq k\varepsilon l_\varepsilon} \left| W_\varepsilon(tA(2)) - W_\varepsilon((k-1)\varepsilon l_\varepsilon A(2)) \right| > x_5\right\} \\
& \quad + \mathbf{P}\left\{\sup_{n\varepsilon l_\varepsilon \leq t \leq T} \left| W_\varepsilon(tA(2)) - W_\varepsilon(n\varepsilon l_\varepsilon A(2)) \right| > x_5\right\} \\
& \leq n\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq \tau \leq \varepsilon l_\varepsilon} \left| W_\varepsilon(\tau A(2)) \right| > x_5\right\} \\
& \quad + \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq \tau \leq \varepsilon [T/\varepsilon - n l_\varepsilon]} \left| W_\varepsilon(\tau A(2)) \right| > x_5\right\} \\
& \leq \left[\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1 \right] \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq \tau \leq \varepsilon l_\varepsilon} \left| W_\varepsilon(\tau A(2)) \right| > x_5\right\} \\
& \leq 8 \left[\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1 \right] \exp \left\{ - \frac{x_5^2}{2\lambda_+ D_\psi^2 \varepsilon l_\varepsilon} \right\}. \tag{54}
\end{aligned}$$

Выбирая $x_i(\varepsilon) = \varepsilon^\chi$, $0 < \chi < 1/4$, $i = 1, \dots, 5$, $l_\varepsilon = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $h_\varepsilon = 1/\varepsilon^{1/4-\chi}$ и компилируя оценки (36), (37), (44), (51)–(54), получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \eta_\varepsilon(t) - \sqrt{A(2)}\widetilde{W}_\varepsilon(t) \right| > 5\varepsilon^\chi + 12(T+1)\sqrt{c_0} e^{-c_4/2\varepsilon^{1/4-\chi}}\right\} \\
& \leq 12(T\sqrt{\varepsilon} + 1) \exp \left\{ - \frac{1}{4\lambda_+ D_\psi^2 \varepsilon^{1/2-2\chi}} \right\} + 8 \exp \left\{ - \frac{1}{2T\lambda_+ D_\psi^2 \varepsilon^{1/4-\chi}} \right\} \\
& \quad + \exp \left\{ - \frac{\alpha_0}{64\varepsilon^{1/4-\chi}} \right\} \left(1 + \alpha_0 \sqrt{\lambda_+ D_\psi^2} \left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right)^{1/2} \right) \\
& \quad + 12 \left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) \sqrt{c_0} e^{-c_4/(2\varepsilon^{1/4-\chi})}. \tag{55}
\end{aligned}$$

Отсюда следует (32). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \eta_\varepsilon(t) - \sqrt{A(2)}\widetilde{W}_\varepsilon(t) \right|^{2m} \\
& \leq \delta_\varepsilon^{2m} + \sqrt{\gamma_\varepsilon} \left[\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \eta_\varepsilon(t) - \sqrt{A(2)}\widetilde{W}_\varepsilon(t) \right|^{4m} \right]^{1/2} \\
& \leq \delta_\varepsilon^{2m} + 4^m \sqrt{2\gamma_\varepsilon} T^m \left(\frac{4m}{4m-1} \right)^{8m^2} (2m(4m-1))^m A^m(2). \tag{56}
\end{aligned}$$

Действительно,

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \eta_\varepsilon(t) - \sqrt{A(2)}\widetilde{W}_\varepsilon(t) \right|^{2m}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta_\varepsilon^{2m} + \sqrt{\gamma_\varepsilon} \left[\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon(t) - \sqrt{A(2)} \widetilde{W}_\varepsilon(t)|^{4m} \right]^{1/2} \\
&\leq \delta_\varepsilon^{2m} + 4^m \sqrt{\gamma_\varepsilon} \left[\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_\varepsilon(t)|^{4m} + A^{2m}(2) \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\widetilde{W}(t)|^{4m} \right]^{1/2}. \quad (57)
\end{aligned}$$

Поскольку в нашем случае справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \sup_{0 \leq \tau \leq T} \left| \int_0^{\tau/\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \psi(\xi(s)) \beta(\xi(s)) dW(s) \right|^{4m} \\
&\leq T^{2m} \left(\frac{4m}{4m-1} \right)^{8m^2} (2m(4m-1))^{2m} A^{2m}(2) \quad (58)
\end{aligned}$$

(в справедливости (58) нетрудно убедиться, если воспользоваться оценкой для моментов супремума непрерывного мартингала [17, гл. 3, § 2, теорема 5, с. 174]), то из (57) с учетом (58) имеем (56).

Следствие 2. Из (56) и оценки (29) при $m > 1$ следует оценка

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [f(\xi(s)) - \bar{f}] ds + \sqrt{A(2)} \widetilde{W}_\varepsilon(t) \right|^{2m} \leq \alpha_\varepsilon^{2m}, \quad (59)$$

где

$$\alpha_\varepsilon^{2m} = 4^m \left[\varepsilon^{m-1} D_U(2m) + \delta_\varepsilon^{2m} + \sqrt{2\gamma_\varepsilon} T^m \left(\frac{4m}{4m-1} \right)^m (2m(2m-1))^m D_\psi^m \lambda_+^{m/2} \right]. \quad (60)$$

3. Оценка скорости сближения решения дифференциального уравнения, возмущенного стационарным марковским процессом, с решением соответствующего уравнения Ито. Рассмотрим последовательность X_t^ε , $\varepsilon > 0$, $0 \leq t \leq T$, решений дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_t^\varepsilon = \dot{a}(t, X_t^\varepsilon) + b(t, X_t^\varepsilon) \dot{W}_t^\varepsilon, \quad X_0^\varepsilon = X_0, \quad (61)$$

где $\dot{W}_t^\varepsilon$ — последовательность «физических» белых шумов, представляемая в виде

$$\dot{W}_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f} \right], \quad (62)$$

и семейство процессов

$$\begin{aligned}
Y_t^\varepsilon &= X_0 + \int_0^t \left[a(s, Y_s^\varepsilon) + \frac{A(2)}{2} b'_x(s, Y_s^\varepsilon) b(s, Y_s^\varepsilon) \right] ds \\
&\quad - \sqrt{A(2)} \int_0^t b(s, Y_s^\varepsilon) d\widetilde{W}_\varepsilon(s). \quad (63)
\end{aligned}$$

Изложим один способ оценки скорости сближения решений в метрике

$$\rho(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) = \left(\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon|^{2n} \right)^{1/(2n)}, \quad n > 1.$$

Поскольку в дальнейшем нам понадобятся конкретные постоянные в полученных оценках скорости сближения решений, мы не будем отсылать читателя к источникам (см., например, [9, теорема 3]), где этот вопрос рассматривался, а тезисно изложим доказательство применительно к нашему случаю

Предположим, что $b(t, x) > 0$, причем $b(t, x)$, $b'_x(t, x)$ непрерывны. Тогда [14, гл. 2, § 5, с. 34] всегда возможна замена, в результате которой получим уравнение с единичным коэффициентом при «шуме», т.е., положив $Z_t^\varepsilon = f(t, X_t^\varepsilon)$, где

$$f(t, x) = \int_0^x \frac{dy}{b(t, y)}, \quad (64)$$

имеем уравнение

$$Z_t^\varepsilon = X_0 + \int_0^t \bar{a}(s, Z_s^\varepsilon) ds + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f} \right] ds, \quad (65)$$

где

$$\bar{a}(t, x) = f'_t(t, g(t, x)) + f'_x(t, g(t, x))a(t, g(t, x)), \quad (66)$$

функция $g(t, x)$ — обратная по x к функции $f(t, x)$, т.е. функция, для которой $f(t, g(t, x)) = x$, $g(t, f(t, x)) = x$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) $a(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных и ограничена вместе со своей частной производной $a'_x(t, x)$;

2) $b(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных и ограничена вместе со своими частными производными $b'_t(t, x)$, $b'_x(t, x)$, $b''_{tx}(t, x)$, $b''_{xx}(t, x)$;

3) функция $b(t, x)$ отделена от нуля: $b(t, x) \geq \delta > 0$; (будем считать, что функции $a(t, x)$, $b(t, x)$ и их частные производные ограничены постоянной $C > 0$);

4) выполнены условия леммы 1 и теоремы 1.

Тогда справедлива оценка

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq \tau \leq T} |X_\tau^\varepsilon - Y_\tau^\varepsilon|^{2m} \leq \alpha_\varepsilon^{2m} C^{2m} \exp \left\{ 2mTC^2 \frac{1+2C}{\delta^2} \right\}, \quad (67)$$

где выражение для α_ε^{2m} дано в (60).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно заметить, что в условиях теоремы функция $\bar{a}(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица равномерно по $t \geq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}\bar{a}'_x(t, x) &= [f''_{tx}(t, g(t, x)) + f''_{xx}(t, g(t, x))a(t, g(t, x)) \\ &\quad + f'_x(t, g(t, x))a'_x(t, g(t, x))]g'_x(t, x) \\ &= b(t, g(t, x)) \left[-\frac{b'_t(t, g(t, x))}{b^2(t, g(t, x))} - \frac{b'_x(t, g(t, x))}{b^2(t, g(t, x))} a(t, g(t, x)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a'_x(t, g(t, x))}{b(t, g(t, x))} \right]\end{aligned}\quad (68)$$

(мы воспользовались тем, что производная от обратной к $f(t, x)$ по x функции $g(t, x)$ равна $b(t, g(t, x))$). Из (68) имеем оценку

$$|\bar{a}'_x(t, x)| \leq C^2 \frac{1 + 2C}{\delta^2}. \quad (69)$$

Наряду с (65) рассмотрим уравнение

$$\zeta_t^\varepsilon = X_0 + \int_0^t \bar{a}(s, \zeta_s^\varepsilon) ds - \sqrt{A(2)} \widetilde{W}_\varepsilon(t). \quad (70)$$

Воспользовавшись условием Липшица, из (65) и (70) получаем оценку

$$\begin{aligned}\sup_{0 \leq \tau \leq t} |Z_\tau^\varepsilon - \zeta_\tau^\varepsilon| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f} \right] ds + \sqrt{A(2)} \widetilde{W}_\varepsilon(t) \right| \\ &\quad \times \exp \left\{ C^2 \frac{1 + 2C}{\delta^2} \right\}.\end{aligned}\quad (71)$$

Из (71) с учетом оценки (59) получаем оценку

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq \tau \leq T} |Z_\tau^\varepsilon - \zeta_\tau^\varepsilon|^{2m} = \alpha_\varepsilon^{2m} \exp \left\{ 2mTC^2 \frac{1 + 2C}{\delta^2} \right\}, \quad (72)$$

где выражение для α_ε^{2m} дано в (60). Случайный процесс $Y_t^\varepsilon = g(t, \zeta_t^\varepsilon)$, $t \geq 0$, является решением уравнения (63). Из (72) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \sup_{0 \leq \tau \leq T} |X_\tau^\varepsilon - Y_\tau^\varepsilon|^{2m} &= \mathbf{E} \sup_{0 \leq \tau \leq T} |g(t, Z_\tau^\varepsilon) - g(t, \zeta_\tau^\varepsilon)|^{2m} \\ &\leq C^{2m} \mathbf{E} \sup_{0 \leq \tau \leq T} |Z_\tau^\varepsilon - \zeta_\tau^\varepsilon|^{2m} = \alpha_\varepsilon^{2m} C^{2m} \exp \left\{ 2mTC^2 \frac{1 + 2C}{\delta^2} \right\}.\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

4. Выводы. В [1, разд. II, § 4, теорема 4.39, с. 240] для доказательства сходимости решения дифференциального уравнения, возмущенного некоторым «физическим» белым шумом, к решению соответствующего уравнения Ито в качестве одного из приемов предлагалось использовать идею виброкорректности М. А. Красносельского и А. В. Покровского [26], заключающуюся в том, что решения как допредельной, так и предельной задач являются непрерывными отображениями интегралов от возмущений. Сделанной в последнем пункте заменой мы добились непрерывной, в сильном смысле, зависимости решения от проинтегрированного возмущения. Возникает соблазн воспользоваться для оценки скорости сближения решений идеями виброкорректности. К сожалению, функции, участвующие в построении вибропреобразования, удовлетворяют лишь локальному условию Липшица, т.е. построение «сильной» оценки сближения решений этим методом вряд ли возможно! Таким образом, актуален поиск других методов, годящихся для построения оценок скоростей сближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов. — Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр., т. 45. М.: ВИНТИ, 1989, с. 159–251.
2. *Бондарев Б. В.* О неравенстве Колмогорова–Гаека–Реньи для нормированных интегралов от процессов со слабой зависимостью. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 225–238.
3. *Бондарев Б. В., Зубко М. Л.* Про оцінку швидкості збіжності в принципі інваріантності. — Вісник Київського університету. Сер. Фізико-математичні науки, 2001, № 4, с. 104–113.
4. *Утев С. А.* Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности. — Труды Ин-та матем. СО АН СССР, 1984, т. 3, с. 50–77.
5. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. 13, в. 4, с. 730–737.
6. *Чикин Д. О.* Функциональная предельная теорема для стационарных процессов: мартингалный подход. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 731–741.
7. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов, т. 2. М.: Физматлит, 1994, 368 с.
8. *Скорозод А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1987, 328 с.
9. *Bondarev B. V., Zoobko M. L.* The application of the invariance principle for stationary sequences with mixing. — Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, 2001, № 1, с. 49–59.
10. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом, и решения соответствующего уравнения Ито. I. — Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, 2006, № 2, с. 63–91.
11. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом, и

- решения соответствующего уравнения Ито. П. — Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, 2007, № 1, с. 54–82.
12. Веретенников А. Ю., Клоков С. А. О субэкспоненциальной скорости перемешивания для марковских процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 21–35.
 13. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 299–308.
 14. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 с.
 15. Pardoux E., Veretennikov A. Yu. On the Poisson equation and diffusion approximation. I. — Ann. Probab., 2001, v. 29, № 3, p. 1061–1085.
 16. Деврой Л., Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1 -подход. М.: Мир, 1988, 408 с.
 17. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982, 612 с.
 18. Бондарев Б. В., Ковтун Е. Е. Оценка скорости сближения в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем. — Укр. матем. журн., 2005, т. 57, № 4, с. 435–457.
 19. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970, 384 с.
 20. Berkes I., Philipp W. Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors. — Ann. Probab., 1979, v. 1, № 1, p. 29–54.
 21. Саханенко А. И. Скорость сходимости в принципе инвариантности для разно-распределенных величин с экспоненциальными моментами. — Тр. Ин-та матем. СО АН СССР, 1984, т. 3, с. 4–49.
 22. Саханенко А. И. Оценки в принципе инвариантности. — Тр. Ин-та матем. СО АН СССР, 1985, т. 5, с. 27–44.
 23. Бондарев Б. В., Колосов А. А. К вопросу о принципе инвариантности для слабо-зависимых случайных величин. — Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, 2002, № 2, с. 63–71.
 24. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
 25. Колосов А. А. О построении винеровского процесса по конечной последовательности независимых гауссовских величин. — Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, 2007, № 1, с. 97–100.
 26. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983, 272 с.

Поступила в редакцию
11.II.2008

Исправленный вариант
23.VII.2010