Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, Н. А. Харитонов, Е. В. Хиль, Расстояния между локальными максимумами в последовательностях случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 4, 690–703

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:04:19

© 2011 г.

ЗУБКОВ А. М.^{*}, ХАРИТОНОВА Н. А.^{**},
ХИЛЬ Е. В.^{**}РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ЛОКАЛЬНЫМИ МАКСИМУМАМИ
В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Найдены явные формулы для распределений расстояний между соседними локальными максимумами в последовательностях случайных величин (как независимых, так и зависимых). Доказана асимптотическая нормальность векторов частот промежутков разных длин между локальными максимумами в отрезке растущей длины. Показано, что распределения промежутков между локальными максимумами зависят от характера зависимости между элементами последовательности.

Ключевые слова и фразы: случайные последовательности, локальные максимумы, комбинаторные методы в теории вероятностей.

1. Введение. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ — последовательность действительных случайных величин, $\chi_n = I\{\xi_{n-1} < \xi_n > \xi_{n+1}\}$ ($n \in \mathbf{Z}$) — индикаторы локальных максимумов этой последовательности и $\{\tau_j, j \in \mathbf{Z}\} = \{n \in \mathbf{Z}: \chi_n = 1\}$ — возрастающая последовательность всех моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n\}$.

В [1] для независимых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$, имеющих одно и то же непрерывное распределение, изучалось распределение расстояний $\lambda_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ между соседними локальными максимумами: вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_j = k\}$, $k = 2, 3, \dots$, представлены в виде многократных интегралов, точные формулы для которых были получены в [7]. Легко видеть, что при этих условиях $\mathbf{P}\{\chi_n = 1\} = 1/3$.

В [1] предлагалось использовать несколько стандартных статистик, основанных на λ_j , для тестирования генераторов случайных чисел. Однако в теоремах о свойствах этих статистик обычно предполагается, что случайные величины λ_j независимы и одинаково распределены.

^{*}Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: zubkov@mi.ras.ru

^{**}Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: nexi_weasel@mail.ru, elena_hill@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00139).

В настоящей работе частично описана вероятностная структура последовательности $\{\lambda_j\}$; доказана асимптотическая нормальность векторов, образованных частотами значений $\{\lambda_j\}$ на отрезке последовательности $\{\xi_j\}$.

В качестве примеров рассмотрены частные классы последовательностей зависимых случайных величин, для которых также найдены либо распределения промежутков между локальными максимумами, либо вероятности того, что элемент ξ_k последовательности является локальным максимумом.

2. Формулировки результатов.

Теорема 1. Если случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda = k\} &= \frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}, \quad k = 2, 3, \dots, \\ \mathbf{E}\lambda &= 3, \quad \mathbf{D}\lambda \approx 1.167, \quad \mathbf{P}\{\lambda > 6\} \approx 0.0074. \end{aligned} \quad (1)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} &= \mathbf{P}\{\lambda_1 = l, \lambda_2 = k\} \\ &= \frac{3}{(k+l+3)!} \sum_{m=1}^{k+l+2} \sum_{n=1}^{k+2} C_{m-1}^{m-1} C_{k+l+3-m}^{k+3-n} P(k, n) Q(l, m-n+1), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} P(k, n) &= \begin{cases} k \cdot 2^k - (2k - n + 3) \cdot 2^{n-3}, & \text{если } n \geq 3, \\ k \cdot 2^k - (k + 1), & \text{если } n \in \{1, 2\}; \end{cases} \\ Q(l, d) &= \begin{cases} (2l - d - 1) \cdot 2^{d-3}, & \text{если } d \geq 3, \\ l - 1, & \text{если } d \in \{1, 2\}. \end{cases} \end{aligned}$$

З а м е ч а н и я. 1. В [1] были получены только формулы (1); приведенное ниже доказательство теоремы 1 (изложенное в дипломной работе Н. А. Харитоновой [2]) использует чисто комбинаторные методы.

2. Доказательство теоремы 1 дословно переносится на случай, когда последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ состоит из перестановочных случайных величин, удовлетворяющих условию $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$.

Формулы (2) упрощаются, если одно из расстояний равно 2 или 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\} &= \frac{(k^2 + 9k + 12)(k+4)(k-1) \cdot 2^k}{(k+5)!}, \\ \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 3\} &= \frac{(k+2)(k-1) \cdot 2^k}{(k+3)!} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = k\} \mathbf{P}\{\lambda_2 = 3\}. \end{aligned}$$

Таким образом, события $\{\lambda_j = k\}$ и $\{\lambda_{j+1} = 2\}$ зависимы, следовательно, случайные величины последовательности $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ зависимы; однако событие $\{\lambda_j = 3\}$ не зависит от значений λ_{j-1} и λ_{j+1} .

Теорема 2. События $\{\lambda_j = 3\}$ являются регенерирующими для последовательности $\{\lambda_j\}$, т.е. при условии $\{\lambda_j = 3\}$ последовательности $\lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}, \dots$ и $\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \dots$ независимы и одинаково распределены.

Числа появлений локальных максимумов в конечной последовательности $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ и частоты расстояний между ними можно использовать как статистики в критерии согласия с гипотезой H_0 : элементы последовательности $\{\xi_n\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение.

Кроме индикаторов локальных максимумов $\chi_t = I\{\xi_{t-1} < \xi_t > \xi_{t+1}\}$ введем индикаторы промежутков длины k между соседними локальными максимумами

$$\chi_t^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} I\{\chi_t = 1, \chi_{t+j} = 0 \ (j = 1, \dots, k-1), \chi_{t+k} = 1\};$$

положим

$$N_1(T) = \sum_{i=1}^{T-2} \chi_i, \quad N_k(T) = \sum_{i=1}^{T-k-2} \chi_i^{(k)}, \quad k \geq 2.$$

Теорема 3. При гипотезе H_0 распределения векторов $N^{(s)}(T) = (N_1(T), N_2(T), \dots, N_s(T))$, $s \geq 2$, при $T \rightarrow \infty$ асимптотически нормальны с параметрами $(A^{(s)}T, C_sT)$, где

$$A^{(s)} = (a_1, a_2, \dots, a_s) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = 2\}, \dots, \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = s\} \right),$$

а элементы матрицы ковариаций $C_s = \|c_{km}\|_{k,m=1}^s$ определяются формулами

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{2}{45}, \\ c_{1k} = c_{k1} &= \frac{2}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k\} - \frac{k-1}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\}, \quad k \geq 2, \\ c_{kk} &= \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\} - \frac{2k+5}{9} \mathbf{P}^2\{\lambda = k\} + \frac{2}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = k\} \\ &\quad + \frac{2}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\}, \quad k \geq 2, \\ c_{mk} = c_{km} &= -\frac{k+m+5}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \mathbf{P}\{\lambda = m\} + \frac{2}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\} \\ &\quad + \frac{2}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\}, \quad m > k \geq 2. \end{aligned}$$

Формулы для величин $\mathbf{P}\{\lambda = k\}$, $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\}$ содержатся в теореме 1, формула для $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\} = & \frac{3 \cdot 2^{k+m}}{(m+1)!(k+1)!(k+m+3)(k+m+5)} \\ & \times \left(\frac{km(k+m+5)^2 - (k+m+3)((k+m)^2 + 6(k+m) - 3)}{(k+3)(m+3)} \right. \\ & \left. + \frac{2(k+m+1)}{C_{k+m+2}^{m+1}} \right); \end{aligned}$$

ее доказательство не приводится ввиду громоздкости. Точные формулы для первых моментов величины, тесно связанной с $N_1(T)$ (максимальной длины альтернирующей подпоследовательности в случайной равновероятной перестановке) были получены в [8].

Как известно, если случайный вектор $Z = (z_1, \dots, z_s)$ имеет s -мерное нормальное распределение с вектором средних a и невырожденной ковариационной матрицей C , то случайный вектор $C^{-1/2}(Z - a)$ имеет s -мерное нормальное распределение с параметрами $(0, E)$, где E — единичная $(s \times s)$ -матрица, поэтому случайная величина

$$\|C^{-1/2}(Z - a)\|^2 = (C^{-1/2}(Z - a), C^{-1/2}(Z - a)) = (C^{-1}(Z - a), Z - a)$$

имеет распределение хи-квадрат с s степенями свободы. Отсюда и из теоремы 3 следует, что при $T \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$\frac{1}{T} (C_s^{-1}(N^{(s)}(T) - A^{(s)}T), N^{(s)}(T) - A^{(s)}T)$$

сходится к распределению хи-квадрат с s степенями свободы; это позволяет стандартным образом строить простые критерии согласия с гипотезой H_0 .

Приведем примеры, показывающие, что при некоторых альтернативных гипотезах распределения векторов $N^{(s)}(T)$ при $T \rightarrow \infty$ имеют асимптотики, отличные от указанных в теореме 3.

Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, а $\xi_n^* = \xi_n + \xi_{n+1}$, $n \in \mathbf{Z}$. Пусть $\chi_n^* = I\{\xi_{n-1}^* < \xi_n^* > \xi_{n+1}^*\}$ ($n \in \mathbf{Z}$) — индикаторы локальных максимумов в последовательности $\{\xi_n^*\}_{n \in \mathbf{Z}}$ и λ^* — длина промежутка между соседними локальными максимумами последовательности $\{\xi_n^*\}$, а

$$\chi_t^{*(k)} \stackrel{\text{def}}{=} I\{\chi_t^* = 1, \chi_{t+j}^* = 0 \ (j = 1, \dots, k-1), \chi_{t+k}^* = 1\}$$

— индикаторы промежутков длины k между соседними локальными максимумами. Положим

$$N_1^*(T) = \sum_{i=1}^{T-2} \chi_i^*, \quad N_k^*(T) = \sum_{i=1}^{T-k-2} \chi_i^{*(k)}, \quad k \geq 2.$$

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi_n^* = 1\} &= \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \mathbf{P}\{\lambda^* = 2k\} &= \frac{4}{[(k+2)!]^2} \left(k^2 - \frac{2}{k+2}\right) C_{2k+1}^k, \\ \mathbf{P}\{\lambda^* = 2k+1\} &= \frac{8k(k+1)}{(k+2)!(k+3)!} C_{2k+1}^k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \mathbf{E}\lambda^* &= 4, \quad \mathbf{D}\lambda^* \approx 2.117, \quad \mathbf{P}\{\lambda^* > 8\} \approx 0.0081. \end{aligned}$$

Следствие. *Для последовательности $\xi_n^* = \xi_n + \xi_{n+1}$, $n \in \mathbf{Z}$, построенной по независимым случайным величинам ξ_n , $n \in \mathbf{Z}$, с одними тем же непрерывным распределением, распределения векторов $(N_1^*(T), N_2^*(T), \dots, N_s^*(T))$, $s \geq 2$, при $T \rightarrow \infty$ асимптотически нормальны с вектором математических ожиданий*

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \mathbf{P}\{\lambda^* = 2\}, \dots, \frac{1}{4} \mathbf{P}\{\lambda^* = s\}\right).$$

Утверждение 1. *Если ξ_n , $n \in \mathbf{Z}$, — последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, а $\tilde{\xi}_n = \xi_n + c\xi_{n+1}$, $n \in \mathbf{Z}$, $c = \text{const}$, то*

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{n-1} < \tilde{\xi}_n > \tilde{\xi}_{n+1}\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{(c-1)^2}{2(c^2 - c + 1)}.$$

Утверждение 2. *Если ξ_n , $n \in \mathbf{Z}$, — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а $\xi'_n = \xi_n + c\xi_{n+1}$, $n \in \mathbf{Z}$, $c = \text{const}$, то*

$$\mathbf{P}\{\xi'_{n-1} < \xi'_n > \xi'_{n+1}\} = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{c}{12(c^2 - c + 1)}, & c < 0, \\ \frac{1}{3} - \frac{c + c^2 - c^3}{12}, & 0 \leq c < 1, \\ \frac{1}{3} - \frac{c^2 + c - 1}{12c^3}, & c \geq 1. \end{cases}$$

Теорема 4 и утверждения 1, 2 показывают, что описанные выше статистические критерии будут отличать гипотезу H_0 от ряда альтернатив.

3. Доказательства теорем. Хорошо известно, что если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то перестановка $\sigma = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ чисел $1, \dots, n$, в которой σ_k при каждом k равно порядковому номеру ξ_k в вариационном ряду $\xi_{(1)} < \xi_{(2)} < \dots < \xi_{(n)}$ (т. е. $\sigma_k = |\{j \in \{1, \dots, n\}: \xi_j \leq \xi_k\}|$),

имеет равномерное распределение на множестве всех $n!$ перестановок порядка n .

Тогда $\{\xi_i < \xi_j\} = \{\sigma_i < \sigma_j\}$ при любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому можно сводить вычисление вероятностей событий, определяемых неравенствами между величинами $\xi_1, \dots, \xi_n$, к подсчету количества перестановок, удовлетворяющих таким же условиям.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Найдем сначала вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_j = k\}$. Так как последовательность $\{\xi_i\}$ (и, значит, $\{\lambda_j\}$) однородна по времени, то можно считать, что $j = 0$ и $\tau_0 = 2$. Пользуясь тем, что $\{\chi_t = 0\} = \{\xi_t < \max\{\xi_{t-1}, \xi_{t+1}\}\}$, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda = k\} &= \frac{\mathbf{P}\{\chi_2 = 1, \chi_3 = \dots = \chi_{k+1} = 0, \chi_{k+2} = 1\}}{\mathbf{P}\{\chi_2 = 1\}} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3, \xi_{k+1} < \xi_{k+2} > \xi_{k+3}, \xi_i < \max(\xi_{i-1}, \xi_{i+1}), 3 \leq i \leq k+1\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3\}} \\ &= \frac{Q(k+3)}{(k+3)!(1/3)} = \frac{Q(k+3) \cdot 3}{(k+3)!}, \end{aligned}$$

где $Q(k+3)$ – количество перестановок порядка $k+3$, обладающих ровно двумя локальными максимумами: в точках 2 и $k+2$.

Найдем $Q(k+3)$. Заметим, что число $k+3$ — глобальный максимум — может находиться только в одном из двух локальных максимумов, причем эти варианты симметричны. Следовательно, $Q(k+3)$ в 2 раза больше числа таких перестановок с $\sigma_2 = k+3$, $\sigma_{k+1} < \sigma_{k+2} > \sigma_{k+3}$, что между этими двумя локальными максимумами элементы σ_j перестановки сначала строго убывают, потом строго возрастают, образуя «овраг».

Лемма 1. *Количество перестановок порядка n , последовательность элементов которых образует сначала один убывающий участок, а затем один возрастающий участок (возможно, один из них пуст), равно 2^{n-1} .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в такой перестановке элемент 1 всегда располагается на стыке двух участков, и перестановка полностью задается выбором чисел для участка убывания, т.е. выбором некоторого подмножества из $\{2, \dots, n\}$. Таким образом искомое число перестановок равно количеству подмножеств $(n-1)$ -элементного множества, т.е. 2^{n-1} .

Вернемся к доказательству теоремы 1 и рассмотрим возможные значения σ_{k+2} .

1. $\sigma_{k+2} = k+2$. В этом случае перестановка определяется выбором значений σ_1, σ_{k+3} , а оставшиеся числа должны образовать «овраг». Получаем $(k+1)k \cdot 2^{k-2}$ перестановок.

2. $\sigma_{k+2} = t$, $3 < t < k + 2$. Здесь для значения σ_{k+3} возможны $t - 1$ вариантов. Далее, если $\sigma_1 \in \{1, \dots, t - 1\} \setminus \{\sigma_{k+3}\}$ ($t - 2$ вариантов), то $\sigma_3 = k + 2 > \sigma_4 = k + 1 > \dots > \sigma_{k-t+4} = t + 1$, а оставшиеся $t - 3$ чисел образуют «овраг», что в итоге дает $(t - 1)(t - 2) \cdot 2^{t-4}$ перестановок. Если же $\sigma_1 \in \{t + 1, \dots, k + 2\}$ ($k - t + 2$ вариантов), то $\sigma_3 > \dots > \sigma_{k-t+3}$ и $\{\sigma_3, \dots, \sigma_{k-t+3}\} = \{t + 1, \dots, k + 2\} \setminus \{\sigma_1\}$, а оставшиеся числа, меньшие t ($t - 2$ чисел), образуют «овраг», что дает еще $(t - 1)(k - t + 2) \cdot 2^{t-3}$ перестановок. Значит, всего в рассматриваемом случае имеется $(t - 1)(2k - t + 2) \cdot 2^{t-4}$ перестановок. (Заметим, что эта формула дает правильный результат и при $t = k + 2$.)

3. $\sigma_{k+2} = 3$. В этом случае для σ_{k+3} возможны 2 варианта, для σ_1 возможны $(k - 1)$ вариантов, а остальные числа выстраиваются в цепочку по убыванию. Получаем $2(k - 1)$ перестановок, что совпадает со значением $(t - 1)(2k - t + 2) \cdot 2^{t-4} - 1$ при $t = 3$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q(k + 3) &= 2 \left(\sum_{t=3}^{k+2} (t - 1)(2k - t + 2) \cdot 2^{t-4} - 1 \right) \\ &= \sum_{t=3}^{k+2} (t - 1)(2k - t + 2) \cdot 2^{t-3} - 2. \end{aligned}$$

Докажем по индукции, что

$$Q(k + 3) = (k + 2)(k - 1) \cdot 2^k. \quad (3)$$

Действительно, при $k = 2$ получаем $Q(5) = 16 = (2 + 2)(2 - 1) \cdot 2^2$. Далее,

$$\begin{aligned} Q(k + 4) - Q(k + 3) &= \sum_{t=3}^{k+2} (t - 1)2^{t-2} + (k + 2)(k + 1) \cdot 2^k \\ &= \frac{d}{ds} \frac{s^{k+2} - s^2}{s - 1} \Big|_{s=2} + (k + 2)(k + 1) \cdot 2^k = (k^2 + 5k + 2) \cdot 2^k, \end{aligned}$$

что совпадает с разностью правых частей (3):

$$(k + 3)k \cdot 2^{k+1} - (k + 2)(k - 1) \cdot 2^k = (2k^2 + 6k - (k^2 + k - 2)) \cdot 2^k = (k^2 + 5k + 2) \cdot 2^k.$$

Тем самым формула (3) доказана.

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\lambda = k\} = \frac{Q(k + 3) \cdot 3}{(k + 3)!} = \frac{3(k + 2)(k - 1) \cdot 2^k}{(k + 3)!}.$$

Математическое ожидание и дисперсия λ вычисляются непосредственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\lambda &= \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{3(k + 2)(k - 1) \cdot 2^k}{(k + 3)!} = 3, \\ \mathbf{D}\lambda &= \sum_{k=2}^{\infty} (k - 3)^2 \frac{3(k + 2)(k - 1) \cdot 2^k}{(k + 3)!} = 3(e^2 - 7) \approx 1.167. \end{aligned}$$

Вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}$, т.е. совместное распределение двух соседних расстояний, тоже находятся перечислением перестановок, в которых $\sigma_2, \sigma_{k+2}, \sigma_{l+k+2}$ и только они являются локальными максимумами. Формула (2) фактически представляет собой формулу полной вероятности по значениям $\sigma_{k+3} = m, m = 1, \dots, k+l+2$, и по рангу n (порядковому номеру в вариационном ряду) этого значения среди $\sigma_1, \dots, \sigma_{k+3}$.

Найдем количество подходящих перестановок при фиксированных m и n : для значений $\sigma_1, \dots, \sigma_{k+2}$ нужно выбрать $n-1$ чисел из $m-1$ чисел, меньших m , и $k+3-n$ чисел из $k+l+3-m$ чисел, больших m . Такой выбор можно осуществить $C_{m-1}^{n-1} \cdot C_{k+l+3-m}^{k+3-n}$ способами. Далее, необходимо, чтобы в последовательности $\sigma_1, \dots, \sigma_{k+2}, \sigma_{k+3} = m$ значения σ_2 и σ_{k+2} были локальными максимумами с «оврагом» между ними. Количество таких перестановок порядка $k+3$ обозначим $P(k, n)$. Кроме того, последовательность $\sigma_{k+3} = m, \sigma_{k+4}, \dots, \sigma_{k+l+3}$ должна содержать единственный локальный максимум σ_{k+l+2} . Количество таких перестановок порядка $l+1$ обозначим $Q(l, m-n+1)$, где $m-n+1$ — порядковый номер числа m среди значений $\sigma_{k+3}, \dots, \sigma_{k+l+3}$.

Вычисление множителей $P(k, n)$ и $Q(l, m-n+1)$ производится аналогично доказательству первой части теоремы.

Чтобы вычислить $P(k, n)$, необходимо найти число таких перестановок порядка $k+3$, что $\sigma_{k+3} = n$, элементы σ_2 и σ_{k+2} — локальные максимумы, и других локальных максимумов нет. Рассмотрим возможные значения σ_{k+2} при $3 \leq n \leq k+1$.

1. $\sigma_{k+2} = k+3$. Число таких перестановок равно $Q(k+3)/(2(k+2)) = (k-1) \cdot 2^{k-1}$. Деление на 2 возникает из-за того, что фиксировано место расположения глобального максимума, деление на $k+2$ — так как фиксировано одно из $k+2$ возможных значений σ_{k+3} .

2. $\sigma_{k+2} = k+2$. Тогда $\sigma_2 = k+3$, и число подходящих перестановок равно $k \cdot 2^{k-2}$, где k — количество возможных значений σ_1 (отличных от $k+2, k+3, \sigma_{k+3} = n$), а 2^{k-2} — число способов образования «оврага» между σ_2 и σ_{k+2} .

3. $\sigma_{k+2} = t, n+1 \leq t \leq k+1$. Тогда $\sigma_2 = k+3$, и число подходящих перестановок определяется так же, как в случае 2 вычисления $Q(k)$, с учетом того, что значение σ_{k+3} фиксировано. Таким образом, получается $(t-2) \cdot 2^{t-4} + (k-t+2) \cdot 2^{t-3} = (2k-t+2) \cdot 2^{t-4}$ перестановок.

Итак, при $3 \leq n \leq k+1$

$$\begin{aligned} P(k, n) &= (k-1) \cdot 2^{k-1} + k \cdot 2^{k-2} + \sum_{t=n+1}^{k+1} (2k-t+2) \cdot 2^{t-4} \\ &= k \cdot 2^k - (2k-n+3) \cdot 2^{n-3}. \end{aligned}$$

Если $n = k+2$, то возможен только случай 1, и $P(k, k+2) = (k-1) \cdot 2^{k-1}$, что соответствует полученной ранее формуле.

Если $n = 2$, то справедливы те же рассуждения, но в случае 3 при $t = 3$ не будет первого слагаемого. Поэтому

$$P(k, 2) = k \cdot 2^k - (2k - n + 3) \cdot 2^{n-3} - (n - 1) \cdot 2^{n-3} = k \cdot 2^k - (k + 1).$$

Если $n = 1$, то случай 3 при $t = 2$ невозможен, а при $t = 3$ сумма не включает первое слагаемое. Получаем

$$\begin{aligned} P(k, 1) &= (k - 1) \cdot 2^{k-1} + \sum_{t=4}^{k+2} (t - 2) \cdot 2^{t-4} + \sum_{t=3}^{k+2} (k - t + 2) \cdot 2^{t-3} \\ &= k \cdot 2^k - (k + 1). \end{aligned}$$

Чтобы вычислить $Q(l, d)$, нужно найти число перестановок чисел $1, \dots, l + 1$ с $\sigma_1 = d$, имеющих единственный локальный максимум σ_l (σ_1 не считается локальным максимумом, даже если $\sigma_1 > \sigma_2$).

Рассмотрим возможные значения σ_1 .

1. $\sigma_1 = d = l + 1$. В этом случае $\sigma_l \in \{3, \dots, l\}$. Если $\sigma_l = u$, то σ_{l+1} может принимать любое из $u - 1$ значений, меньших u , и «овраг» между 1-м и l -м элементами перестановки полностью определяется выбором подмножества значений, образующих монотонно возрастающий участок от $\min_{2 \leq r < l} \sigma_r$ до σ_l . Количество таких подмножеств равно 2^{u-3} , значит, при $d = l + 1$

$$Q(l, d) = \sum_{u=3}^l (u - 1) \cdot 2^{u-3} = (l - 2) \cdot 2^{l-2} = (2l - d - 1) \cdot 2^{d-3}.$$

2. $\sigma_1 = d \in \{3, \dots, l\}$. Тогда $\sigma_l = l + 1$, $\sigma_{l+1} = u \in \{1, \dots, l\} \setminus \{d\}$ и перестановка однозначно определяется выбором подмножества значений, образующих монотонно убывающий участок от σ_1 до $\min_{2 \leq r < l} \sigma_r$. Количество таких подмножеств равно 2^{d-2} при $u > d$ и 2^{d-3} при $u < d$. Значит, при $d \in \{3, \dots, l\}$

$$Q(l, d) = \sum_{u=d+1}^l 2^{d-2} + \sum_{u=1}^{d-1} 2^{d-3} = 2^{d-3}(2l - d - 1).$$

3. $\sigma_1 = d \in \{1, 2\}$. В этих случаях $\sigma_l = l + 1$ и перестановка однозначно определяется выбором значения $\sigma_{l+1} \in \{1, \dots, l\} \setminus \{\sigma_1\}$, поэтому

$$Q(l, d) = l - 1.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как $\{\lambda_j = 3\} = \{\exists t: \tau_j = t - 1, \tau_{j+1} = t + 2\}$ и $\{\tau_j = t - 1, \tau_{j+1} = t + 2\} = \{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t, \xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}$, а последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна в

узком смысле, то теорема 2 следует из более общего утверждения: *при условии* $\{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t, \xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}$ *любые события* $A_- \in \mathcal{F}_{-\infty}^t$, $A_+ \in \mathcal{F}_{t+1}^\infty$ *независимы* (здесь $\mathcal{F}_a^b$ обозначает σ -алгебру событий, порожденную случайными величинами $\{\xi_t\}_{t=a}^b$).

Действительно, события $\{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\}$ и $\{\xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}$ независимы, события $A_- \cap \{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\} \in \mathcal{F}_{-\infty}^t$ и $A_+ \cap \{\xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\} \in \mathcal{F}_{t+1}^\infty$ тоже независимы. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{A_- \cap A_+ | \exists j: \tau_j = t-1, \tau_{j+1} = t+2\} \\ &= \mathbf{P}\{A_- \cap A_+ | \{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\} \cap \{\xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{A_- \cap \{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\} \cap A_+ \cap \{\xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}\}}{\mathbf{P}\{\{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\} \cap \{\xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}\}} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{A_- \cap \{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\}\} \mathbf{P}\{A_+ \cap \{\xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}\}}{\mathbf{P}\{\xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\} \mathbf{P}\{\xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\}} \\ &= \mathbf{P}\{A_- | \xi_{t-2} < \xi_{t-1} > \xi_t\} \cdot \mathbf{P}\{A_+ | \xi_{t+1} < \xi_{t+2} > \xi_{t+3}\} \\ &= \mathbf{P}\{A_- | \tau_j = t-1, \tau_{j+1} = t+2\} \cdot \mathbf{P}\{A_+ | \tau_j = t-1, \tau_{j+1} = t+2\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Асимптотическая нормальность распределений векторов $(N_1(T), N_2(T), \dots, N_s(T))$, $s \geq 2$, при $T \rightarrow \infty$ следует из того, что случайные величины $N_k(T)$ являются суммами конечно-зависимых индикаторов, а для сумм конечно-зависимых ограниченных величин центральная предельная теорема доказана, например, в [3], [6]. Перенос этой теоремы на векторный случай обосновывается теоремой Крамера–Вольда [4].

Асимптотики математических ожиданий и ковариаций аппроксимирующих многомерных нормальных распределений совпадают с асимптотиками математических ожиданий и ковариаций случайных величин $N_k(T)$.

Из определения случайных величин $N_k(T)$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}N_1(T) &= (T-2) \mathbf{P}\{\chi_1 = 1\} = \frac{T-2}{3}, \\ \mathbf{E}N_k(T) &= (T-k-2) \mathbf{P}\{\chi_1^{(k)} = 1\} = \frac{T-k-2}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Выведем формулы для вторых моментов. Пользуясь соотношениями

$$\text{Cov}(\chi_i, \chi_j) = \begin{cases} \mathbf{D}\chi_i = \frac{2}{9}, & i = j, \\ -(\mathbf{P}\{\chi_i = 1\})^2 = -\frac{1}{9}, & |i-j| = 1, \\ \mathbf{P}\{\chi_i = 1\} \mathbf{P}\{\lambda = 2\} - \mathbf{P}^2\{\chi_i = 1\} = \frac{1}{45}, & |i-j| = 2, \\ 0, & |i-j| \geq 3, \end{cases}$$

находим:

$$\mathbf{D}N_1(T) = \mathbf{D} \sum_{i=1}^{T-2} \chi_i = \sum_{i=1}^{T-2} \sum_{j=1}^{T-2} \text{Cov}(\chi_i, \chi_j) = \frac{2T+2}{45}.$$

Далее, так как при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(\chi_i, \chi_j^{(k)}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\} - \frac{1}{3} \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\} = \frac{2}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\}, & i \in \{j, j+k\}, \\ -\frac{1}{3} \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\}, & i \in \{j-1, \dots, j+k+1\} \setminus \{j, j+k\}, \\ \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k\} - \frac{1}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\}, & i \in \{j-2, j+k+2\}, \\ 0, & i \leq j-3, i \geq j+k+3, \end{cases} \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_1(T), N_k(T)) &= \sum_{i=1}^{T-2} \sum_{j=1}^{T-k-2} \text{Cov}(\chi_i, \chi_j^{(k)}) \\ &= \frac{2(T-k-4)}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k\} - \frac{T(k-1) - k^2 + 13k - 4}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \\ &= (1 + o(1))T \left(\frac{2}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k\} - \frac{k-1}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \right), \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично, при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_j^{(k)}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \left(1 - \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \right), & i = j, \\ \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = k\} - \frac{1}{9} (\mathbf{P}\{\lambda = k\})^2, & |i-j| = k, \\ -\frac{1}{9} (\mathbf{P}\{\lambda = k\})^2, & |i-j| \leq k+1, i \neq j, |i-j| \neq k, \\ \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\} - \frac{1}{9} (\mathbf{P}\{\lambda = k\})^2, & |i-j| = k+2, \\ 0, & |i-j| \geq k+3, \end{cases} \end{aligned}$$

и поэтому при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}N_k(T) &= \mathbf{D} \sum_{i=1}^{T-k-2} \chi_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{T-k-2} \sum_{j=1}^{T-k-2} \text{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_j^{(k)}) \\ &= \frac{T-k-2}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\} - \frac{T(2k+5) - (k+2)(3k+8)}{9} \mathbf{P}^2\{\lambda = k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(T-2k-2)}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = k\} \\
 & + \frac{2(T-2k-4)}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\} \\
 & = \frac{T(1+o(1))}{3} \left(\mathbf{P}\{\lambda = k\} - \frac{2k+5}{3} \mathbf{P}^2\{\lambda = k\} \right. \\
 & \quad \left. + 2\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = k\} + 2\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\} \right).
 \end{aligned}$$

Наконец, при $m > k \geq 2$, $k \neq m$,

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_j^{(m)}) \\
 & = \begin{cases} -\frac{1}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \mathbf{P}\{\lambda = m\}, \\ \quad j \in \{i-m-1, \dots, i+k+1\} \setminus \{i-m, i+k\}, \\ \\ \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\} - \frac{1}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \mathbf{P}\{\lambda = m\}, \\ \quad j \in \{i-m, i+k\}, \\ \\ \frac{1}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\} - \frac{1}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \mathbf{P}\{\lambda = m\}, \\ \quad j \in \{i-m-2, i+k+2\}, \\ \\ 0, \quad j \notin \{i-m-2, \dots, i+k+2\}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(N_k(T), N_m(T)) & = \sum_{i=1}^{T-k-2} \sum_{j=1}^{T-m-2} \text{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_j^{(m)}) \\
 & = -\frac{T(k+m+5) - (k^2 + km + m^2 + 7k + 7m + 16)}{9} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \mathbf{P}\{\lambda = m\} \\
 & \quad + \frac{2(T-k-m-2)}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\} \\
 & \quad + \frac{2(T-k-m-4)}{3} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\} \\
 & = \frac{T(1+o(1))}{3} \left(-\frac{k+m+5}{3} \mathbf{P}\{\lambda = k\} \mathbf{P}\{\lambda = m\} \right. \\
 & \quad \left. + 2\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\} + 2\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\} \right).
 \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}\{\xi_{n-1}^* < \xi_n^* > \xi_{n+1}^*\} & = \mathbf{P}\{\xi_{n-1} + \xi_n < \xi_n + \xi_{n+1} > \xi_{n+1} + \xi_{n+2}\} \\
 & = \mathbf{P}\{\xi_{n-1} < \xi_{n+1}, \xi_n > \xi_{n+2}\} = \mathbf{P}\{\xi_{n-1} < \xi_{n+1}\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_n > \xi_{n+2}\} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, можно считать первым локальным максимумом ξ_2^* , поскольку последовательность $\{\xi_n^*\}$ стационарна в узком смысле. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\lambda^* = k\} = \mathbf{P}\{\xi_{k+1}^* < \xi_{k+2}^* > \xi_{k+3}^*, \xi_i^* < \max\{\xi_{i-1}^*, \xi_{i+1}^*\}, \\ i = 3, \dots, k+1 \mid \xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^*\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^*\}} \sum_{m=3}^{k+1} P(k, m),$$

где

$$P(k, m) = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^* > \dots > \xi_{m-1}^* > \xi_m^* < \xi_{m+1}^* < \dots < \xi_{k+2}^* > \xi_{k+3}^*\}.$$

Так же, как при вычислении $\mathbf{P}\{\xi_{n-1}^* < \xi_n^* > \xi_{n+1}^*\}$, вероятности $P(k, m)$ представляются в виде произведений вероятностей аналогичных событий, относящихся к величинам ξ_n с четными или с нечетными индексами, например,

$$\begin{aligned} P(2k, 2m) &= \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^* > \dots > \xi_{2m-1}^* > \xi_{2m}^* < \dots < \xi_{2k+2}^* > \xi_{2k+3}^*\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \xi_5 > \dots > \xi_{2m+1} < \dots < \xi_{2k+3}; \\ &\quad \xi_2 > \xi_4 > \dots > \xi_{2m} < \dots < \xi_{2k+2} > \xi_{2k+4}\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \xi_5 > \dots > \xi_{2m+1} < \dots < \xi_{2k+3}\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\xi_2 > \xi_4 > \dots > \xi_{2m} < \dots < \xi_{2k+2} > \xi_{2k+4}\}; \end{aligned}$$

вид такого разложения зависит от четности аргументов функции $P(k, m)$. Вероятности событий в правой части вычисляются с помощью комбинаторных рассуждений, аналогичных проведенным в доказательстве теоремы 1. Ввиду громоздкости промежуточных формул (и того, что последовательность $\{\xi_n^*\}$ имеет частный вид) эти вычисления здесь не приводятся.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. Как и в теореме 3, асимптотическая нормальность распределений векторов $(N_1^*(T), N_2^*(T), \dots, N_s^*(T))$, $s \geq 2$, является следствием центральной предельной теоремы для конечно-зависимых случайных величин. Асимптотические формулы для математических ожиданий непосредственно следуют из теоремы 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 1. Так как $\tilde{\xi}_n = \xi_n + c\xi_{n+1}$, $n \in \mathbf{Z}$, $c = \text{const}$, где $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, то

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1 < \tilde{\xi}_2 > \tilde{\xi}_3\} = \mathbf{P}\{\xi_1 + c\xi_2 < \xi_2 + c\xi_3 > \xi_3 + c\xi_4\} = \mathbf{P}\{\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0\},$$

где $\zeta_1 = c\xi_3 - \xi_1 - (c-1)\xi_2$, $\zeta_2 = \xi_2 + (c-1)\xi_3 - c\xi_4$.

Вектор (ζ_1, ζ_2) имеет двумерное нормальное распределение с нулевым средним и матрицей ковариаций

$$C = \begin{pmatrix} 2(c^2 - c + 1) & (c-1)^2 \\ (c-1)^2 & 2(c^2 - c + 1) \end{pmatrix}.$$

Поэтому (см., например, задачу 3.266 в [5])

$$\mathbf{P}\{\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{(c-1)^2}{2(c^2 - c + 1)}.$$

Доказательство утверждения 2. Пусть $P(c) = \mathbf{P}\{\xi'_1 < \xi'_2 > \xi'_3\}$. Покажем, что $P(c) = P(1/c)$, $c \neq 0$. Действительно, если $c > 0$, то

$$\begin{aligned} P(c) &= \mathbf{P}\{\xi'_1 < \xi'_2 > \xi'_3\} = \mathbf{P}\{\xi_1 + c\xi_2 < \xi_2 + c\xi_3 > \xi_3 + c\xi_4\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\frac{1}{c}\xi_1 + \xi_2 < \frac{1}{c}\xi_2 + \xi_3 > \frac{1}{c}\xi_3 + \xi_4\right\} = P\left(\frac{1}{c}\right); \end{aligned}$$

а если $c < 0$, то

$$\begin{aligned} P(c) &= \mathbf{P}\{\xi_1 + c\xi_2 < \xi_2 + c\xi_3 > \xi_3 + c\xi_4\} \\ &= \mathbf{P}\{1 - \xi_1 + c(1 - \xi_2) < 1 - \xi_2 + c(1 - \xi_3) > 1 - \xi_3 + c(1 - \xi_4)\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 + c\xi_2 > \xi_2 + c\xi_3 < \xi_3 + c\xi_4\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\frac{1}{c}\xi_1 + \xi_2 < \frac{1}{c}\xi_2 + \xi_3 > \frac{1}{c}\xi_3 + \xi_4\right\} = P\left(\frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно рассмотреть только случай $|c| \leq 1$. Вычисление вероятностей $P(c)$ сводится к вычислению двукратных интегралов по многоугольным областям; ввиду громоздкости промежуточных формул (и частного вида последовательности) они здесь не приводятся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuketayev A.* Probability distribution of distances between local extrema of random number series. — Вестник Караганд. ун-та, сер. Физика, 2011, т. 62, № 2, с. 21–34; arXiv:math/0611130, 2006.
2. *Харитонова Н. А.* Распределения расстояний между локальными максимумами случайной последовательности. — Дипл. работа, мех.-мат. ф-т МГУ, 2009, 15 с.
3. *Бернштейн С. Н.* Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. — Успехи матем. наук, 1944, в. 10, с. 65–114.
4. *Cramér H., Wold H.* Some theorems on distribution functions. — J. London Math. Soc., 1936, v. 11, p. 290–294.
5. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989, 320 с.
6. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
7. *Oshanin G., Voituriel R., Nechaev S., Vasilyev O., Hivert F.* Random patterns generated by random permutations of natural numbers. — Eur. Phys. J. Special Topics, 2007, v. 143, p. 143–157; arXiv:cond-mat/0609718, 2006.
8. *Stanley R.* Longest alternating subsequences of permutations. — Michigan Math. J., 2008, v. 57, p. 675–687.

Поступила в редакцию
2.VIII.2011