Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Мампория, Стохастическое дифференциальное уравнение для обобщенных случайных процессов в банаховом пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 4, 704–725

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:27:17

© 2011 г.

МАМПОРИЯ Б. И.*

**СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾**

Определен стохастический интеграл от неупреждающих обобщенных случайных процессов (неупреждающих случайных процессов) по числовому винеровскому процессу в произвольном сепарабельном банаховом пространстве. Вопрос о существовании стохастического интеграла как случайного элемента в банаховом пространстве сведен к задаче о разложимости обобщенного случайного элемента. Рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнение для обобщенного случайного процесса и изучен вопрос о существовании и единственности решения. Выводятся соответствующие результаты для стохастического дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

Ключевые слова и фразы: стохастический интеграл Ито, стохастическое дифференциальное уравнение, винеровский процесс, ковариационные операторы в банаховом пространстве.

1. Введение. В конечномерном случае стохастический интеграл Ито определяется сперва для неупреждающих ступенчатых функций, а затем для процессов второго порядка как предел стохастических интегралов от неупреждающих ступенчатых функций, сходящихся к данной функции. Такой подход позволяет построить стохастические интегралы в банаховых пространствах со специальной геометрической структурой (см. [6], [8], [12]). Однако в произвольных банаховых пространствах можно таким путем построить стохастический интеграл только в том случае, если интегрируемая функция неслучайна (см. [9]). Аналогичная ситуация создается, когда интегрируемая функция операторнозначна и винеровский процесс принимает значения в банаховом пространстве (см. [1], [3], [7]). Наш подход к этой задаче таков: мы определяем стохастический интеграл для обобщенных случайных процессов (значит и для широкого класса случайных процессов), который является обобщенным

*Институт вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили Грузинского технического университета, ул. Акурская 8, 0171 Тбилиси, Грузия; e-mail: badrimamporia@yahoo.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта #GNSF/STO9_99_3-104.

случайным элементом; если он разложим, т.е. представляется случайным элементом, то мы говорим, что этот случайный элемент является стохастическим интегралом. Таким образом, вопрос существования стохастического интеграла сводится к хорошо известной задаче о представлении обобщенного случайного элемента случайным элементом. Далее мы рассматриваем стохастическое дифференциальное уравнение и исследуем вопрос существования и единственности решения в виде обобщенного случайного процесса. Полученный результат применяем для исследования стохастического дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство, X^* — сопряженное пространство, $\mathcal{B}(X)$ — борелевская σ -алгебра в X и $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Непрерывный линейный оператор $L: X^* \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ называется обобщенным случайным элементом (ОСЭ). Рассмотрим такие ОСЭ, которые отображают X^* в фиксированное сепарабельное замкнутое подпространство $G \subset L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Обозначим $\mathcal{M}_1 := L(X^*, G)$ — банахово пространство ОСЭ с нормой $\|L\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|Lx^*\|_{L_2}$. Мы будем говорить, что случайный элемент (измеримое отображение) $\xi: \Omega \rightarrow X$ имеет слабый второй порядок, если $\mathbf{E} \langle \xi, x^* \rangle^2 < \infty$ для любого $x^* \in X^*$. Случайный элемент ξ можно реализовать как элемент пространства $\mathcal{M}_1$: $L_\xi x^* = \langle \xi, x^* \rangle$ (непрерывность L_ξ следует из теоремы о замкнутом графике). Обозначим через $\mathcal{M}_2$ линейное нормированное пространство случайных элементов слабого второго порядка с нормой $\|\xi\| = \|L_\xi\|$. Таким образом, мы имеем $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$. Корреляционным оператором ОСЭ $L \in \mathcal{M}_1$ называется отображение $R_L: X^* \rightarrow X^{**}$, $R_L = L^*L$. R_L — положительно определенный, симметричный, линейный оператор. Известно, что если $L = L_\xi \in \mathcal{M}_2$, то R_L отображает X^* в X (см. [2, теорема 3.2.1]), и если R — положительно определенный и симметричный линейный оператор из X^* в X , то существуют $(x_k^*)_{k \in \mathbf{N}} \subset X^*$ и $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset X$ такие, что $\langle Rx_k^*, x_j^* \rangle = \delta_{kj}$, $Rx_k^* = x_k$, $Rx^* = \sum_{k=1}^\infty \langle x_k, x^* \rangle x_k$, $x^* \in X^*$ (см. [2, лемма 3.1.1]). Более того, для $R_L: X^* \rightarrow X^{**}$, так как G — сепарабельное подпространство пространства $L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, существуют $(x_k^*)_{k \in \mathbf{N}} \subset X^*$ и $(x_k^{**})_{k \in \mathbf{N}} \subset X^{**}$ такие, что $\langle Rx_k^*, x_j^* \rangle = \delta_{kj}$, $Rx_k^* = x_k^{**}$ и $Rx^* = \sum_{k=1}^\infty \langle x_k^{**}, x^* \rangle x_k^{**}$ для $x^* \in X^*$.

Пусть $L \in \mathcal{M}_1$. Рассмотрим отображение $m_L: X^* \rightarrow \mathbf{R}^1$, $m_L x^* = \mathbf{E} Lx^*$. Это отображение m_L линейно и ограничено (следовательно, $m_L \in X^{**}$) и называется математическим ожиданием ОСЭ L . Пусть $L'x^* = Lx^* - \langle m, x^* \rangle$. Ковариационным оператором ОСЭ L называется оператор L'^*L' . Если $L \in \mathcal{M}_2$, т.е. существует $\xi: \Omega \rightarrow X$ такой, что $Lx^* = \langle \xi, x^* \rangle$, то m принадлежит X (см. [2, теорема 2.3.1]) и является интегралом Петтиса от ξ .

Предложение 1. Пусть ОСЭ L принадлежит пространству $\overline{\mathcal{M}_2} \subset \mathcal{M}_1$. Тогда математическое ожидание m_L принадлежит X и

ковариационный оператор R_L отображает X^* в X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L \in \overline{\mathcal{M}}_2$. Тогда существует последовательность ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, такая, что $\|L_{\xi_n} - L\| \rightarrow 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(\xi_n - \xi_m)\| &\leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\mathbf{E}\langle \xi_n - \xi_m, x^* \rangle| \leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} (\mathbf{E}\langle \xi_n - \xi_m, x^* \rangle^2)^{1/2} \\ &= \|(\xi_n - \xi_m)\|_{\mathcal{M}_1} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

то существует элемент $m \in X$ такой, что для любого $x^* \in X^*$ выполнено равенство $\mathbf{E}Lx^* = \langle m, x^* \rangle$. Далее, для удобства изложения, предположим, что $m = 0$.

Пусть $R_n: X^* \rightarrow X$ обозначает ковариационный оператор случайного элемента ξ_n . По лемме о факторизации (см. [2, лемма 3.1.1]) $R_n = L_{\xi_n}^* L_{\xi_n}$, где $L_{\xi_n}: X^* \rightarrow G_n$, $L_{\xi_n}^*: G_n \rightarrow X$ и G_n — замкнутое сепарабельное подпространство пространства G . Пусть

$$\mathcal{H}_2 := \overline{L(G_1 \cup G_2)}, \quad \mathcal{H}_3 := \overline{L(G_3 \cup \mathcal{H}_2)}, \quad \dots, \quad \mathcal{H}_n := \overline{L(G_n \cup \mathcal{H}_{n-1})};$$

$\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_3 \subset \mathcal{H}_4 \subset \dots$, $\mathcal{H} := \overline{\bigcup_n \mathcal{H}_n}$. Для любого n можно представить $\mathcal{H}$ как $\mathcal{H} = G_n \oplus G_n^\perp$. Пусть $x^* \in X^*$, $\|Lx^* - L_n x^*\| \rightarrow 0$ (обозначим $L_n := L_{\xi_n}$). Тогда $Lx^* \in \mathcal{H}$ и

$$\begin{aligned} \|R_n x^* - R_L x^*\|_{X^{**}} &= \|L_n^* L_n x^* - L^* L x^*\|_{X^{**}} \\ &\leq \sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle L_n^* L_n x^*, y^* \rangle - \langle L^* L x^*, y^* \rangle| + \sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle L^* L_n x^*, y^* \rangle - \langle L^* L x^*, y^* \rangle| \\ &\leq \|L_n x^*\| \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|L_n y^* - L y^*\| + \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|L y^*\| \|L_n x^* - L x^*\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $R_L x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n x^* \in X$, т.е. $RX^* \subseteq X$. Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть даны симметричные и положительно определенные линейные операторы $R_1: X^* \rightarrow X^{**}$, $R_2: X^* \rightarrow X$. Если для любого $x^* \in X^*$ выполнено неравенство $\langle R_1 x^*, x^* \rangle \leq \langle R_2 x^*, x^* \rangle$, то R_1 отображает также X^* в X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы применим технику, использованную при доказательстве леммы о факторизации 3.1.1 из [2]. Пусть $E_2 := \{x^* \in X^*: \langle R_2 x^*, x^* \rangle = 0\}$. В факторпространстве X^*/E_2 введем скалярное произведение $\langle x_1^* + E_2, x_2^* + E_2 \rangle = \langle R_2 x_1^*, x_2^* \rangle$. Пусть H_2 — соответствующее гильбертово пространство и $R_2 = A_2^* A_2$ — факторизация оператора R_2 , $A_2: X^* \rightarrow H_2$. Аналогично, для оператора R_1 введем E_1 и H_1 , $R_1 = A_1^* A_1$, $A_1: X^* \rightarrow H_1$. Так как $\langle R_1 x^*, x^* \rangle \leq \langle R_2 x^*, x^* \rangle$, $\ker R_1 \subseteq \ker R_2$, отображение $I_0: X^*/E_2 \rightarrow X^*/E_1$ ограничено, ограничено и $I: H_2 \rightarrow H_1$. Таким образом, $R_1 = A_1^* A_1 = A_2^* I^* I A_2$. Следовательно, $R_1(X^*) \subset X$. Предложение доказано.

Предложение 3. Пусть дан ОСЭ $L \in \mathcal{M}_1$. Предположим, что $\mathbf{E}L = 0$ и ковариационный оператор $R_L: X^* \rightarrow X^{**}$ равен $R_L x^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{**}, x^* \rangle a_k^{**}$, где $(a_k^*)_{k \in \mathbf{N}}, (a_k^{**})_{k \in \mathbf{N}}$ такие, что $R_L a_k^* = a_k^{**}$, $\langle a_k^{**}, a_j^* \rangle = \delta_{kj}$. Тогда $Lx^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{**}, x^* \rangle L a_k^*$.

Доказательство. Для любого $x^* \in X^*$ выполнены равенства $\mathbf{E}(Lx^*)^2 = \langle R_L x^*, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{**}, x^* \rangle^2$. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(Lx^* - \sum_{k=1}^n \langle a_k^{**}, x^* \rangle L a_k^* \right)^2 \\ &= \mathbf{E} (Lx^*)^2 - 2 \sum_{k=1}^n \langle a_k^{**}, x^* \rangle \mathbf{E} Lx^* L a_k^* + \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \langle a_k^{**}, x^* \rangle L a_k^* \right)^2 \\ &= \langle R_L x^*, x^* \rangle - 2 \sum_{k=1}^n \langle a_k^{**}, x^* \rangle \langle R_L a_k^*, x^* \rangle + \sum_{k=1}^n \langle a_k^{**}, x^* \rangle^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle a_k^{**}, x^* \rangle^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

2. Стохастический интеграл. Пусть $(W_t)_{t \in [0,1]}$ — одномерный винеровский процесс и $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$ — неубывающее семейство σ -алгебр такое, что: а) W_t является $\mathcal{F}_t$ -измеримым для любого $t \in [0,1]$; б) $W_s - W_t$ не зависит от σ -алгебры $\mathcal{F}_t$ для всех $s > t$; $\mathcal{F}_t$ пополнена $\mathbf{P}$ -нуль множествами из $\mathcal{B}$. Пусть $(L_t)_{t \in [0,1]}$ является семейством ОСЭ; мы назовем его обобщенным случайным процессом (ОСП). Если $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$, $\xi_t: \Omega \rightarrow X$, — случайный процесс слабого второго порядка, то он порождает ОСП $L_{\xi_t} x^* = \langle \xi_t, x^* \rangle$.

Определение 1. ОСП $(L_t)_{t \in [0,1]}$ называется неупреждающим относительно семейства σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$, если для любого $x^* \in X^*$ числовой случайный процесс $L_t x^*$ является $([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}[0,1] \times \mathcal{B})$ -измеримым и для любого $t \in [0,1]$, $L_t x^*$ $\mathcal{F}_t$ -измерим. Обозначим через $T\mathcal{M}_1$ банахово пространство неупреждающих ОСП $(L_t)_{t \in [0,1]}$, для которых

$$\|L_t\| := \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\int_0^1 \mathbf{E} (L_t x^*)^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Если $\xi_t: \Omega \rightarrow X$, $t \in [0,1]$, — случайный процесс такой, что для всех $x^* \in X^*$ процесс $\langle \xi_t, x^* \rangle_{t \in [0,1]}$ неупреждающий и $\int_0^1 \mathbf{E} \langle \xi_t, x^* \rangle^2 dt < \infty$, то $L_{\xi_t} \in T\mathcal{M}_1$.

Для любого $x^* \in X^*$ мы можем определить стохастический интеграл $\int_0^1 L_t x^* dW_t$.

О п р е д е л е н и е 2. Для любого неупреждающего ОСП $(L_t)_{t \in [0,1]} \in T\mathcal{M}_1$ оператор

$$I(L): X^* \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}), \quad I(L)x^* = \int_0^1 L_t x^* dW_t,$$

называется обобщенным стохастическим интегралом (ОСИ) от $(L_t)_{t \in [0,1]}$.

Нетрудно видеть, что $I(L) \in \mathcal{M}_1$.

Предложение 4. Оператор стохастического интегрирования $I: T\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$ является изометрическим оператором; для любого $(L_t)_{t \in [0,1]} \in T\mathcal{M}_1$ справедливы равенства $\mathbf{E} I(L) = 0 \in X^{**}$ и $\langle R_{I(L)} x^*, y^* \rangle = \mathbf{E} I(L) x^* I(L) y^* = \langle R_L x^*, y^* \rangle$, где R_L является отображением из X^* в X^{**} и $\langle R_L x^*, y^* \rangle = \int_0^1 \int_{\Omega} L_t x^* L_t y^* d\mathbf{P} dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathbf{E} \int_0^1 L_t x^* dW_t$ является линейным ограниченным функционалом из X^* в $\mathbf{R}^1$, то он принадлежит X^{**} и равен нулю. Имеем

$$\|I(L)\|_{\mathcal{M}_1}^2 = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \left(\int_0^1 L_t x^* dW_t \right)^2 = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \int_0^1 (L_t x^*)^2 dt = \|L\|_{T\mathcal{M}_1}^2.$$

Все остальные равенства следуют из определения корреляционного оператора ОСЭ.

О п р е д е л е н и е 3. Стохастическим интегралом от ОСП $(L_t)_{t \in [0,1]}$ называется X -значный случайный элемент $\eta: \Omega \rightarrow X$ (если такой элемент существует), для которого $\langle \eta, x^* \rangle = I(L)x^*$ п.н. для любого $x^* \in X^*$, $\eta := \int_0^1 L_t dW_t$.

Очевидно, что если T неслучайна, то $m^{**} := T \in X^{**}$. Приведем простой пример, когда $m^{**}(t) \notin X$, но стохастический интеграл $\xi := \int_0^1 m^{**}(t) dW_t$, $\xi: \Omega \rightarrow X$, существует. Пусть $X = c_0$ и

$$e_{k,n}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \\ 0, & t \notin \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ясно, что $e(t) := (e_{k,n}(t))_{k \leq n, n \in \mathbf{N}}$, $t \in [0,1]$, не принадлежит пространству c_0 , но $e(t) \in l_{\infty}$, $t \in [0,1]$. Рассмотрим отображение

$$L(t): l_1 \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad L(t)(\vec{\lambda}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} e_{n,k}(t),$$

где $\vec{\lambda} := (\lambda_{n,k})_{n \in \mathbf{N}, k \leq n} \in l_1$. Имеем

$$\int_0^1 \langle L_t, \vec{\lambda} \rangle dW_t = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} (W_{k/n} - W_{(k-1)/n}) = \langle \vec{\lambda}, \xi \rangle,$$

где $\xi := (W_{k/n} - W_{(k-1)/n})_{k \leq n, n \in \mathbf{N}}$. Пусть $\sigma_{n,k} := \mathbf{E}(W_{k/n} - W_{(k-1)/n})^2$. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma_{k,n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-\mu n) < \infty$$

для любого положительного μ , то ξ является случайным элементом в банаховом пространстве c_0 (см. [2, предложение 5.5.8]). Следовательно, стохастический интеграл $\int_0^1 L_t dW_t$ существует.

Для любых $L := (L_t)_{t \in [0,1]} \in T\mathcal{M}_1$ и $t \in [0,1]$ имеем $LI_{[0,t]} \in T\mathcal{M}_1$. Следовательно, можно определить $I(L)_t \in T\mathcal{M}_1$: $I(L)_t x^* := \int_0^t L_s x^* dW_s$. Для любого $L \in T\mathcal{M}_1$ ОСЭ $I(L)_t$ существует, но из существования стохастического интеграла $\xi: \Omega \rightarrow X$, $\langle \xi, x^* \rangle = \int_0^1 L_t x^* dW_t$, не следует существование стохастического интеграла $\int_0^t L_s dW_s = \xi_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$.

3. Достаточные условия существования стохастического интеграла. Пусть

$$\begin{aligned} (L_t)_{t \in [0,1]} &\in T\mathcal{M}_1, \\ m^{**}(t) &:= \mathbf{E} L_t, \\ L_t^1 &:= L_t - m^{**}(t). \end{aligned}$$

Мы будем отдельно рассматривать стохастические интегралы от $m^{**}(t)$ (от неслучайной функции) и от ОСП L^1 с нулевым математическим ожиданием.

Теорема 1. Пусть неслучайная функция $m^{**}(t)$ отображает $[0,1]$ в X^{**} и $\int_0^1 \langle m^{**}(t), x^* \rangle^2 dt < \infty$ для любого $x^* \in X^*$. Тогда стохастический интеграл $\int_0^1 m^{**}(t) dW_t$ существует в том и только том случае, если $Rx^* = \int_0^1 \langle m^{**}(t), x^* \rangle m^{**}(t) dt$ отображает X^* в X и R есть гауссовская ковариация. Если $Rx^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k, x^* \rangle a_k$, $(a_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset X$ и $(a_k^*)_{k \in \mathbf{N}} \subset X^*$ таковы, что $Ra_k^* = a_k$ и $\langle Ra_k^*, a_j^* \rangle = \delta_{kj}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^t \langle m^{**}(s), a_k \rangle dW_s$ сходится равномерно по t п.н. к стохастическому интегралу $I_t = \int_0^t m^{**}(s) dW_s$ и, следовательно, $(I_t)_{t \in [0,1]}$ имеет п.н. непрерывные реализации.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как если стохастический интеграл существует, то он является гауссовским случайным элементом. Следовательно, R есть гауссовская ковариация. Достаточность также легко доказывается: пусть

$$\begin{aligned} L: X^* &\rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}), \\ Lx^* &= \int_0^1 \langle m^{**}(t), x^* \rangle dW_t. \end{aligned}$$

Тогда Lx^* — гауссовский ОСЭ, $R_L: X^* \rightarrow X$ — гауссовская ковариация. Следовательно, существует гауссовский случайный элемент $\xi: \Omega \rightarrow X$ такой, что $\int_0^1 \langle m^{**}(t), x^* \rangle dW_t = \langle \xi, x^* \rangle$, т.е. существует стохастический

интеграл $\int_0^1 m^{**}(t) dW_t$. Далее, $\int_0^1 \langle m^{**}(t), a_k^* \rangle dW_t$, $k = 1, 2, \dots$, — гауссовские стандартные случайные величины. По теореме Ито–Нисие, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^1 \langle m^{**}(t), a_k^* \rangle dW_t$ сходится в X к стохастическому интегралу $\int_0^1 m^{**}(t) dW_t$, так как для любого $x^* \in X^*$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\int_0^1 \langle m^{**}(t), x^* \rangle dW_t - \sum_{k=1}^n \langle a_k, x^* \rangle \int_0^1 \langle m^{**}(t), a_k^* \rangle dW_t \right)^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle a_k, x^* \rangle^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^t \langle m^{**}(s), a_k^* \rangle dW_s$ сходится равномерно по t в X . Пусть $\zeta_n(t, \omega) := \sum_{k=1}^n a_k \int_0^t \langle m^{**}(s), a_k^* \rangle dW_s$, тогда $\zeta_n(\cdot, \omega) \in C([0, 1], X)$. Так как $\sum_{k=n}^{\infty} a_k \int_0^t \langle m^{**}(s), a_k^* \rangle dW_s$ является процессом с независимыми приращениями и с непрерывными реализациями, то по неравенству Леви

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} \left\| \sum_{k=n}^m a_k \int_0^t \langle m^{**}(s), a_k^* \rangle dW_s \right\| > \varepsilon \right) \\ & \leq 2\mathbf{P} \left(\left\| \sum_{k=n}^m a_k \int_0^1 \langle m^{**}(s), a_k^* \rangle dW_s \right\| > \varepsilon \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т.е. $\sum a_k \int_0^t \langle m^{**}(s), a_k^* \rangle dW_s$ сходится по мере в $C([0, 1], X)$. По теореме Ито–Нисие, имеем п.н. сходимость в $C([0, 1], X)$. Следовательно, сумма является процессом с п.н. непрерывными реализациями. Ввиду того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^1 \langle m^{**}(t), a_k^* \rangle dW_t = \int_0^1 m^{**}(t) dW_t$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^t \langle m^{**}(s), a_k^* \rangle dW_s = \mathbf{E} \left(\int_0^1 m^{**}(s) dW_s \mid \mathcal{F}_t \right) = \int_0^t m^{**}(s) dW_s = I_t,$$

получаем, что процесс $(I_t)_{t \in [0, 1]}$ имеет п.н. непрерывные реализации. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Необходимое и достаточное условие существования стохастического интеграла от неслучайной функции было получено в [7]. Там был определен стохастический интеграл как предел последовательности стохастических интегралов от ступенчатых функций.

Следующая теорема дает достаточное условие принадлежности ОСИ пространству $\overline{\mathcal{M}}_2$ и представляет такие ОСИ как предел последовательности стохастических интегралов от неупреждающих ступенчатых функций.

Теорема 2. Пусть неупреждающий ОСП $L: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_1$ таков, что $L(t) \in \overline{\mathcal{M}_2}$, множество $(L(t), t \in [0, 1])$ сепарабельно в $\overline{\mathcal{M}_2}$ и $\int_0^1 \|L(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt < \infty$. Тогда существует последовательность неупреждающих ступенчатых функций $f_n: [0, 1] \times \Omega \rightarrow X$ такая, что $\int_0^1 \|f_n(t) - L(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt \rightarrow 0$ и $\|\int_0^1 f_n(t) dW(t) - \int_0^1 L(t) dW(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \rightarrow 0$, и, следовательно, $\int_0^1 L(t) dW(t) \in \overline{\mathcal{M}_2}$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что без ограничения общности можно считать, что $\|L(t)\|_{\mathcal{M}_1} \leq C$. Если $L: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_1$ непрерывен, то $\|L(t) - \sum_{k=0}^{n-1} L(k/n) I_{(k/n, (k+1)/n]}\|_{\mathcal{M}_1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $\|\sum_{k=0}^{n-1} L(k/n) I_{(k/n, (k+1)/n]}\|_{\mathcal{M}_1} \leq C$, то по теореме Лебега $\int_0^1 \|L(t) - L_n(t)\|_{\mathcal{M}_1} dt \rightarrow 0$, где $L_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} L(k/n) I_{(k/n, (k+1)/n]}$. Так как $L(t) \in \mathcal{M}_2$, то существует последовательность неупреждающих ступенчатых функций $f_n: [0, 1] \times \Omega \rightarrow X$ такая, что $\int_0^1 \|L_n - f_n\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt \leq 1/n$. Это есть искомая последовательность. Пусть теперь L — произвольный ОСП. Для любого $x^* \in X^*$ и $g \in G$, $L(t)x^*g$ измерима, и так как $f(x^*, g): \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbf{R}^1$, $f(T) = \int_{\Omega} T x^* g d\mathbf{P}$, отделяет точки в $\mathcal{M}_1$ и процесс $L: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_1$ сепарабельнозначный, то по теореме Петтиса (см. [2, предложение 1.1.10]) $L: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_1$ измерим. Так как L ограничена, то существует интеграл Бохнера $\int_s^t L(u) du$, который принадлежит $\overline{\mathcal{M}_2}$. Пусть $L_m(t) := m \int_{(t-1/m) \vee 0}^t L(s) ds$. Тогда $L_m(t) \rightarrow L(t)$ п.в. по t при $n \rightarrow \infty$ (см. [3, следствие 2, теорема 3.8.5]). По теореме Лебега $\int_0^1 \|L_m(t) - L(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt \rightarrow 0$. Так как $L_m(t)$ непрерывно для любого m , то существует последовательность неупреждающих ступенчатых функций $f_{m,n}(t): [0, 1] \times \Omega \rightarrow X$ такая, что $\int_0^1 \|f_{m,n} - L_m\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\int_0^1 \|f_{m,n}(t) - L(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt \rightarrow 0$ и

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 L(t) dW(t) - \int_0^1 f_{m,n} dW(t) \right\|_{\mathcal{M}_1}^2 &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \int_0^1 (L(t) - \langle f_{m,n}(t), x^* \rangle)^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} (L(t) - \langle f_{m,n}(t), x^* \rangle)^2 dt = \int_0^1 \|L(t) - f_{m,n}(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\int_0^1 L(t) dW(t) \in \overline{\mathcal{M}_2}$. Теорема доказана.

Отсюда мы имеем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть случайный процесс $f: [0, 1] \times \Omega \rightarrow X$ таков, что $f(\cdot, w)$, как отображение из $[0, 1]$ в пространство M_1 , сепарабельнозначное и $\int_0^1 \|f(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt < \infty$. Тогда существует последовательность неупреждающих ступенчатых функций $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $f_n: [0, 1] \rightarrow X$, такая, что $\int_0^1 \|f(t) - f_n(t)\|_{\mathcal{M}_1}^2 dt \rightarrow 0$, и, следовательно, $\int_0^1 f(t) dW(t) \in \overline{\mathcal{M}_2}$.

Для получения достаточных условий существования стохастических интегралов рассмотрим положительно определенные симметричные операторы $R: X^* \rightarrow X$.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что положительно определенный симметричный оператор $R: X^* \rightarrow X$ принадлежит $\mathbf{R}_p(X)$, если в факторизации $R = AA^*$ оператор $A: H \rightarrow X$ является p -абсолютно суммирующим, т.е. существует $c > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbf{N}$ и $h_1, \dots, h_n$ из H

$$\left(\sum_{i=1}^n \|Ah_i\|^p \right)^{1/p} \leq c \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n \langle h_i, h \rangle^p \right)^{1/p}. \quad (1)$$

Обозначим через $\Pi_p(R)$ минимальное значение c , для которого выполнено неравенство (1).

Из леммы о факторизации легко вывести следующее предложение.

Предложение 5. Положительно определенный симметричный оператор $R: X^* \rightarrow X$ принадлежит $\mathbf{R}_p(X)$ тогда и только тогда, когда существует $c > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbf{N}$ и $x_1^*, \dots, x_n^*$ из X^*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|Rx_i^*\|^p \right)^{1/p} \leq c \sup_{\langle Rx^*, x^* \rangle \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle Rx_i^*, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}. \quad (2)$$

Минимальное c , для которого справедливо неравенство (2), равно $\Pi_p(R)$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть даны положительно определенные симметричные операторы R_1 и R_2 такие, что для любого $x^* \in X^*$ выполнено неравенство $\langle R_1 x^*, x^* \rangle \leq \langle R_2 x^*, x^* \rangle$. Если $R_2 \in \mathbf{R}_p(X)$, то $R_1 \in \mathbf{R}_p(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве предложения 2 было показано, что если $R_2 = AA^*$, то $R_1 = AJJ^*A^*$. Пусть A есть p -абсолютно суммирующий оператор, тогда AJ тоже будет p -абсолютно суммирующим оператором, т.е. $R_1 \in \mathbf{R}_p(X)$. Лемма доказана.

Следующая лемма дает оценку сильного p -го момента случайного элемента $\mathbf{R}_p$ -нормой его ковариационного оператора.

Лемма 2. Пусть дан случайный элемент слабого второго порядка $\xi: \Omega \rightarrow X$ такой, что $R_\xi x^* = \mathbf{E} \langle \xi, x^* \rangle \xi$ принадлежит $\mathbf{R}_p(X)$ и $(\mathbf{E} |\langle \xi, x^* \rangle|^p)^{1/p} \leq C(\mathbf{E} \langle \xi, x^* \rangle^2)^{1/2}$ для некоторого $C > 0$ и любого $x^* \in X$. Тогда $\mathbf{E} \|\xi\|^p \leq \Pi_p^p(R_\xi)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 из [5] для случая $p = 2$.

Приведем достаточные условия существования стохастического интеграла от неупреждающих ОСП. Как и ранее, мы считаем, что математическое ожидание ОСП равно нулю.

Теорема 3. Пусть дан неупреждающий ОСП $(L_t)_{t \in [0,1]} \in T\mathcal{M}_1$, $\mathbf{E} L_t = 0$, такой, что оператор $Rx^* = \int_0^1 \int_\Omega L_t x^* L_t d\mathbf{P} dt$ отображает

X^* в X и для некоторого $p \geq 2$ выполнены включения $R \in \mathbf{R}_p(X)$ и неравенство $(\mathbf{E} \int_0^1 |L_t x^*|^p dt)^{1/p} \leq \lambda(p) (\mathbf{E} \int_0^1 (L_t x^*)^2 dt)^{1/2}$. Тогда существует стохастический интеграл

$$I_t = \int_0^t L_s dW_s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_0^t L_s x_k^* dW_s. \quad (3)$$

Ряд в правой части равенства (3) сходится в $L_p(\Omega, X)$, $\mathbf{E} \|I_t\|^p < \infty$ и $(I_t)_{t \in [0,1]}$ имеет п.н. непрерывные реализации, где $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ и $(x_k^*)_{k \in \mathbf{N}}$ такие, что $Rx_k^* = x_k$, $\langle Rx_k^*, x_j^* \rangle = \delta_{kj}$, $k, j = 1, 2, \dots$, и $Rx^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, x^* \rangle x_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $R = AA^*$, $A: H \rightarrow X$ и $(e_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset H$ таковы, что $Ae_k = x_k$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим $\zeta_n(t) = \sum_{k=1}^n e_k \int_0^1 L x_k^* dW_t$: для любого $h \in H$, $(\langle \zeta_n(t), h \rangle)_{n \in \mathbf{N}}$ сходится в $L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, так как

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} \left| \left\langle \sum_{k=n}^m e_k \int_0^1 L_t x_k^* dW_t, h \right\rangle \right|^p \right)^{1/p} &= \left(\mathbf{E} \left| \int_0^1 L_t \left(\sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right) dW_t \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq c_p \left(\mathbf{E} \int_0^1 \left| L_t \left(\sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq c_p \lambda_p \left(\mathbf{E} \int_0^1 \left(L_t \left(\sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right)^2 dt \right)^{1/2} \right)^{1/2} \\ &= c_p \lambda_p \left(\sum_{k=n}^m h_k^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

По лемме 6.5.2 из [2] $A\zeta_n = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 L_t x_k^* dW_t$ сходится в $L_p(\Omega, X)$. Следовательно, $\mathbf{E} \|I_t\|^p < \infty$.

Для доказательства п.н. непрерывности реализаций мы воспользуемся методом, приведенным в [10, теорема 2.1.6]. Пусть $(y_k^*)_{k \in \mathbf{N}}$ — тотальное множество в X^* . Существует $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ такое, что $\langle I_t(\omega), y_n \rangle$ и $\zeta_n(t, \omega)$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны для всех $\omega \in \Omega_0$. Для $t_m \rightarrow t$ и $\omega \in \Omega_0$

$$\liminf_{t_m \rightarrow t} |\langle I_{t_m}(\omega) - \zeta_n(t_m, \omega), y_k^* \rangle| \geq |\langle I_t(\omega) - \zeta_n(t, \omega), y_k^* \rangle|.$$

Следовательно,

$$\liminf_{t_m \rightarrow t} \|I_{t_m}(\omega) - \zeta_n(t_m, \omega)\| \geq \|I_t(\omega) - \zeta_n(t, \omega)\|.$$

Тогда

$$\sup_{t \in [0,1]} \|I_t(\omega) - \zeta_n(t, \omega)\| = \sup_{t \in \mathbf{Q}} \|I_t(\omega) - \zeta_n(t, \omega)\|, \quad \omega \in \Omega_0,$$

где $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел в $[0, 1]$. Так как $\|I_t - \zeta_n(t)\|$ — субмартингал, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in \mathbf{Q}} \|I_t - \zeta_n(t)\| > \varepsilon \right) \leq \varepsilon^{-1} \mathbf{E} \|I_1 - \zeta_n(1)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда существует последовательность $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ такая, что

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} \|I_t - \zeta_{n_k}(t)\| = 0 \text{ п.н.}$$

Следовательно, I_t имеет п.н. непрерывные реализации. Теорема доказана.

Рассмотрим следующий класс ОСЭ. ОСЭ $L \in \mathcal{M}_1$, $\mathbf{E} L = 0$, принадлежит $G_{\Phi} \mathcal{M}_1$ -классу, если существует функция $\Phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что $(\mathbf{E} |Lx^*|^p)^{1/p} \leq \Phi(p)(\mathbf{E} (Lx^*)^2)^{1/2}$. Если $\Phi(p) = \sqrt{p}$, то класс $G_{\Phi} \mathcal{M}_1$ содержит гауссовские ОСЭ; более точно, он содержит строго субгауссовские ОСЭ. Обозначим через $G_{\Phi} \mathcal{M}_2$ класс соответствующих случайных элементов; $G_{\Phi} \mathcal{M}_2 \subset G_{\Phi} \mathcal{M}_1$.

Следствие 2. Пусть дан неупреждающий ОСП $(L_t)_{t \in [0,1]} \in T\mathcal{M}_1$ такой, что для некоторого $\Phi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$

$$L_t \in G_{\Phi} \mathcal{M}_1, \quad t \in [0, 1].$$

Если $Rx^* = \int_0^1 \int_{\Omega} L_t^* L_t x^* d\mathbf{P} dt$ отображает X^* в X , $R \in \mathbf{R}_p(X)$ и $\int_0^1 \langle R_t x^*, x^* \rangle^{p/2} dt \leq C_p \langle Rx^*, x^* \rangle$ для каких-нибудь $p \geq 2$ и $C_p > 0$, то существует стохастический интеграл $\xi = \int_0^1 L_t dW_t$.

Теорема 4. Пусть неупреждающий ОСП $(\xi_t)_{t \in [0,1]} \in T\mathcal{M}_2$ является мартингалом относительно семейства σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$, ковариационный оператор $R_1: X^* \rightarrow X$, $R_1 x^* = \mathbf{E} \langle \xi_1, x^* \rangle \xi_1$, принадлежит $\mathbf{R}_p(X)$ и выполнено неравенство $(\mathbf{E} |\langle \xi_1, x^* \rangle|^p)^{1/p} \leq c_p (\mathbf{E} \langle \xi_1, x^* \rangle^2)^{1/2}$ для некоторых $p \geq 2$ и $c_p > 0$. Тогда существует стохастический интеграл $\int_0^1 \xi_t dW_t$. Более того, если $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $(x_k^*)_{k \in \mathbf{N}}$ таковы, что

$$\begin{aligned} \langle R_1 x_k^*, x_j^* \rangle &= \delta_{kj}, \quad R_1 x_k^* = x_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, \\ R_1 x^* &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x^*, x_k \rangle x_k, \quad x^* \in X^*, \end{aligned}$$

то

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \langle \xi_t, x_k^* \rangle, \quad \int_0^1 \xi_t dW_t = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_0^1 \langle \xi_t, x_k^* \rangle dW_t$$

и оба ряда сходятся в $L_p(\Omega, X)$.

Доказательство. Пусть $R_1 = AA^*$, $A: H \rightarrow X$, $A^* x_k^* := e_k$. Рассмотрим $\eta_n = \sum_{k=1}^n e_k \langle \xi_1, x_k^* \rangle$. Для любого $h \in H$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} |\langle \eta_n - \eta_m, h \rangle|^p)^{1/p} &= \left(\mathbf{E} \left| \left\langle \xi_1, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq c_p \left(\mathbf{E} \left\langle \xi_1, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle^2 \right)^{1/2} = c_p \left(\sum_{k=n}^m h_k^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

По лемме 6.5.2 из [2] $A\eta_n = \sum_{k=1}^n x_k \langle \xi_1, x_k^* \rangle$ сходится в $L_p(\Omega, X)$. Имеем

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n x_k \langle \xi_1, x_k^* \rangle \middle| \mathcal{F}_t \right) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{E} (\langle \xi_1, x_k^* \rangle | \mathcal{F}_t) = \sum_{k=1}^n x_k \langle \xi_t, x_k^* \rangle$$

и

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} \left\| \sum_{k=n}^m x_k \langle \xi_t, x_k^* \rangle \right\|^p \right)^{1/p} &= \left(\mathbf{E} \left\| \mathbf{E} \left(\sum_{k=n}^m x_k \langle \xi_1, x_k^* \rangle \middle| \mathcal{F}_t \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\mathbf{E} \mathbf{E} \left(\left\| \sum_{k=n}^m x_k \langle \xi_1, x_k^* \rangle \right\|^p \middle| \mathcal{F}_t \right) \right)^{1/p} = \left(\mathbf{E} \left\| \sum_{k=n}^m x_k \langle \xi_1, x_k^* \rangle \right\|^p \right)^{1/p} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть равенства $\xi_t = \sum_{k=1}^\infty x_k \langle \xi_t, x_k^* \rangle$ сходится в $L_p(\Omega, X)$.

Теперь рассмотрим $\zeta_n = \sum_{k=1}^n e_k \int_0^1 \langle \xi_t, x_k^* \rangle dW_t$. Для любого $h \in H$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} |\langle \zeta_n - \zeta_m, h \rangle|^p \right)^{1/p} &= \left(\mathbf{E} \left| \int_0^1 \left\langle \xi_t, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle dW_t \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \lambda_p \left(\mathbf{E} \int_0^1 \left| \left\langle \xi_t, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle \right|^p dt \right)^{1/p} \leq \lambda_p \left(\mathbf{E} \left| \left\langle \xi_1, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \lambda_p c_p \left(\mathbf{E} \left\langle \xi_1, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle^2 \right)^{1/2} = \lambda_p c_p \sum_{k=n}^m h_k^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

По лемме 6.5.2 из [2], $A\zeta_n = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 \langle \xi_t, x_k^* \rangle dW_t$ сходится в $L_p(\Omega, X)$. Тогда $\int_0^1 \xi_t dW_t = \sum_{k=1}^\infty x_k \int_0^1 \langle \xi_t, x_k^* \rangle dW_t$. Теорема доказана.

Теорема 5. Если неупреждающий ОСП $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 или теоремы 3, то для всех m существуют стохастические интегралы

$$\xi_t^{(1)} = \int_0^t \xi_s dW_s, \quad \dots, \quad \xi_t^{(m)} = \int_0^t \xi_s^{(m-1)} dW_s$$

и выполнено неравенство

$$\left(\mathbf{E} \left\| \int_0^1 \xi_t^{(m)} dW_t \right\|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_p^{m+1} c_p \Pi_p(R),$$

где R — ковариационный оператор случайного элемента $\xi_1^{(1)}$.

Доказательство. Пусть $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ и $(x_k^*)_{k \in \mathbf{N}}$ такие, что

$$Rx_k^* = x_k, \quad \langle Rx_k^*, x_j^* \rangle = \delta_{kj}, \quad R = AA^*,$$

$$A^* x_k^* := e_k, \quad Rx^* = \sum_{k=1}^\infty \langle x_k, x^* \rangle x_k.$$

Рассмотрим

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n e_k \int_0^1 \langle \xi_t^{(1)}, x_k^* \rangle dW_t.$$

Для любого $h \in H$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} |\langle \eta_m - \eta_n, h \rangle|^p \right)^{1/p} &= \left(\mathbf{E} \left| \int_0^1 \left\langle \xi_t^{(1)}, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle dW_t \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \lambda_p \left(\mathbf{E} \int_0^1 \left| \left\langle \xi_t^{(1)}, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle \right|^p dt \right)^{1/p} \\ &\quad \times \lambda_p \left(\int_0^1 \mathbf{E} \left| \int_0^t \left\langle \xi_s, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle dW_s \right|^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \lambda_p^2 \left(\int_0^1 \mathbf{E} \int_0^t \left| \left\langle \xi_s, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle \right|^p ds dt \right)^{1/p} \\ &\leq \lambda_p^2 \left(\mathbf{E} \int_0^1 \left| \left\langle \xi_s, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle \right|^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \lambda_p^2 c_p \left(\mathbf{E} \int_0^1 \left\langle \xi_s, \sum_{k=n}^m h_k x_k^* \right\rangle^2 ds \right)^{1/2} = \lambda_p^2 c_p \sum_{k=n}^m h_k^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

По лемме 6.5.2 из [2], $A\eta_n$ сходится в $L_p(\Omega, X)$ и

$$\int_0^1 \xi_t^{(1)} dW_t = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\int_0^t \langle \xi_s, x_k^* \rangle dW_s \right) dW_t = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_0^1 \langle \xi_t^{(1)}, x_k^* \rangle dW_t.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\int_0^1 \xi_t^{(m)} dW_t = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_0^1 \langle \xi_t^{(m-1)}, x_k^* \rangle dW_t.$$

Оценим $(\mathbf{E} \|\int_0^1 \xi_t^{(m)} dW_t\|^p)^{1/p}$. Рассмотрим $\eta_n := \sum_{k=1}^n e_k \int_0^1 \langle \xi_t^{(m)}, x_k^* \rangle dW_t$. Так как $A: H \rightarrow X$ — p -абсолютно суммирующий оператор, то по теореме А. Пичча (см. [2, теорема 2.2.2]) существует вероятностная мера ν на единичном шаре H такая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|A\eta_n(\omega)\|^p &\leq \Pi_p^p(A) \mathbf{E} \int_{\|h\| \leq 1} |\langle \eta_n(\omega), h \rangle|^p d\nu(h) \\ &= \Pi_p^p(A) \int_{\|h\| \leq 1} \mathbf{E} \left| \int_0^1 \left\langle \xi_t^{(m)}(\omega), \sum_{k=1}^n h_k x_k^* \right\rangle dW_t \right|^p d\nu(h) \\ &\leq \Pi_p^p(A) \lambda_p^{(m+1)p} \int_{\|h\| \leq 1} \mathbf{E} \int_0^1 \left| \left\langle \xi_t, \sum_{k=1}^n h_k x_k^* \right\rangle \right|^p dt d\nu \\ &\leq \Pi_p^p(A) \lambda_p^{p(m+1)} c_p^p \int_{\|h\| \leq 1} \left(\mathbf{E} \int_0^1 \left\langle \xi_t, \sum_{k=1}^n h_k x_k^* \right\rangle^2 dt \right)^{p/2} d\nu(h) \end{aligned}$$

$$\leq \Pi_p^p(A) \lambda_p^{(m+1)p} c_p^p \int_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{k=1}^n h_k^2 \right)^{p/2} d\nu(h) \leq \Pi_p^p(A) \lambda_p^{(m+1)p} c_p^p.$$

Следовательно,

$$\left(\mathbf{E} \left\| \int_0^1 \xi_t^{(m)} dW_t \right\|^p \right)^{1/p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{E} \|A\eta_n(\omega)\|^p \right)^{1/p} \leq \Pi_p(A) \lambda_p^{(m+1)p} c_p.$$

Теорема доказана.

Пусть дан винеровский процесс $(B_t)_{t \in [0,1]}$ со значениями в X , т.е. $B_0 = 0$ п.н., B — гауссовский процесс и имеет независимые приращения и $\mathbf{E} \langle B_t - B_s, x^* \rangle^2 = (t - s) \langle R x^*, x^* \rangle$, где R — гауссовская ковариация. Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть положительно определенный и симметричный оператор R принадлежит $\mathbf{R}_p$ для некоторого $p \geq 2$. Тогда существуют стохастические интегралы

$$\xi_t^{(0)} = \int_0^t B_s dW_s, \quad \dots, \quad \xi_t^{(m)} = \int_0^t \xi_s^{(m-1)} dW_s, \quad \dots$$

4. Стохастические дифференциальные уравнения. Будем рассматривать стохастические дифференциальные уравнения для ОСП.

О п р е д е л е н и е 5. Неупреждающий ОСП (T_t) , $t \in [0, 1]$, называется обобщенным решением или сильным обобщенным решением стохастического дифференциального уравнения

$$dT_t = a(t, T_t) dt + b(t, T_t) dW_t \quad (4)$$

с $\mathcal{F}_0$ -измеримым начальным условием $T_0 = \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}x^*$ является $\mathcal{F}_0$ -измеримым для всех $x^* \in X^*$), где $a: [0, 1] \times \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$, $b: [0, 1] \times \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$, если для любого $x^* \in X^*$ функции $a(t, T_t)x^*$ и $b(t, T_t)x^*$ являются измеримыми и неупреждающими,

$$\mathbf{E} \int_0^1 |a(t, T_t)x^*|^2 dt + \mathbf{E} \int_0^1 |b(t, T_t)x^*|^2 dt < \infty$$

и

$$T_t x^* = \mathcal{T} x^* + \int_0^t a(s, T_s) x^* ds + \int_0^t b(s, T_s) x^* dW_s \quad \text{п.н.}$$

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что стохастическое дифференциальное уравнение (3) с $\mathcal{F}_0$ -измеримым начальным условием $T_0 = \mathcal{T}$ имеет единственное сильное обобщенное решение, если для любых его двух сильных решений $(T_t)_{t \in [0,1]}$ и $(\bar{T}_t)_{t \in [0,1]}$

$$\mathbf{P}(\omega: T_t x^*(\omega) = \bar{T}_t x^*(\omega) \text{ для всех } t \in [0, 1]) = 1$$

при любом фиксированном $x^* \in X^*$.

Приведем теорему существования и единственности сильного обобщенного решения стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 6. Пусть неупреждающие функции a и b удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\|a(t, T)\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|b(t, T)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2(1 + \|T\|_{\mathcal{M}_1}^2),$
- 2) $\|a(t, T) - a(t, L)\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|b(t, T) - b(t, L)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2\|T - L\|_{\mathcal{M}_1}^2.$

Тогда существует единственное сильное обобщенное решение $(T_t)_{t \in [0,1]}$ уравнения (3) с начальным условием $T_0 = \mathcal{T}$. При этом $T: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_1$ есть непрерывное отображение.

Доказательство. Для любых $t \in [0, 1]$ и $x^* \in X^*$ пусть $T_t^0 = \mathcal{T}$ и

$$T_t^n x^* = T_t^0 x^* + \int_0^t a(s, T_s^{n-1}) x^* ds + \int_0^t b(s, T_s^{n-1}) x^* dW_s, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|T_t^{n+1} - T_t^n\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq 2 \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \left(\int_0^t (a(s, T_s^n) - a(s, T_s^{n-1})) x^* ds \right)^2 \\ &\quad + 2 \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \left(\int_0^t (b(s, T_s^n) - b(s, T_s^{n-1})) x^* dW_s \right)^2 \\ &\leq 2 \int_0^t \|a(s, T_s^n) - a(s, T_s^{n-1})\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds + 2 \int_0^t \|b(s, T_s^n) - b(s, T_s^{n-1})\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds \\ &\leq 2K^2 \int_0^t \|T_s^n - T_s^{n-1}\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds. \end{aligned}$$

По индукции получаем

$$\begin{aligned} \|T_t^{n+1} - T_t^n\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq (2K^2)^{n-1} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \|T_s^1 - T_s^0\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds, \\ \|T_s^1 - T_s^0\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq 2 \left\| \int_0^t a(s, T_s^0) ds \right\|_{\mathcal{M}_1}^2 + 2 \left\| \int_0^t b(s, T_s^0) dW_s \right\|_{\mathcal{M}_1}^2 \\ &\leq 2K^2(1 + \|T_0\|_{\mathcal{M}_1}^2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|T_t^{n+1} - T_t^n\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq pC^n/n!$ для некоторых положительных p и C .

Для любого фиксированного $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} |(T_t^{n+1} - T_t^n) x^*|^2 &\leq 2 \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t \left((a(s, T_s^n) - a(s, T_s^{n-1})) x^* \right)^2 ds \\ &\quad + 2 \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t (b(s, T_s^n) - b(s, T_s^{n-1})) x^* dW_s \right|^2 \\ &\leq 2 \int_0^1 \|a(s, T_s^n) - a(s, T_s^{n-1})\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds + 8 \int_0^1 \|b(s, T_s^n) - b(s, T_s^{n-1})\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds \\ &\leq \frac{10pC^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |(T_t^{n+1} - T_t^n)x^*| > \frac{1}{n^2} \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \mathbf{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |(T_t^{n+1} - T_t^n)x^*|^2 \right) \\ &\leq 10p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 C^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

По лемме Бореля–Кантелли ряд

$$T_t^0 x^*(\omega) + \sum_{m=1}^{\infty} (T_t^m(\omega) - T_t^{m-1}(\omega))x^*$$

сходится равномерно по t ($\mathbf{P}$ -п.н.) к непрерывному случайному процессу, который обозначим через $T_t x^*$, $x^* \in X^*$. Следовательно, получаем ОСП $T_t: X^* \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Из уравнения (2) имеем

$$T_t x^* = \mathcal{T} x^* + \int_0^t a(s, T_s) x^* ds + \int b(s, T_s) x^* dW_s \quad \text{п.н.}$$

Построенный таким образом ОСП (T_t) , $t \in [0, 1]$, является решением уравнения (1).

Можно оценить значение $\|T_t\|_{\mathcal{M}_1}$, $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|T_t^n\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq 3 \left(\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{M}_1}^2 + 3K \int_0^t (1 + \|T_s^{(n-1)}\|_{\mathcal{M}_1}^2) ds \right) \\ &\leq 3(\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{M}_1}^2 + K^2) + 3K^2 \int_0^t \|T_s^{(n-1)}\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds \\ &\leq 3(K^2 + \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{M}_1}^2)(1 + 3K^2) + 9K^4 \int_0^t \int_0^s \|T_u^{(n-2)}\|_{\mathcal{M}_1}^2 du ds. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|T_t^n\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq 3(K^2 + \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{M}_1}^2) \exp(3K^2),$$

которое справедливо для любого n . Следовательно, оно справедливо и для T_t , $t \in [0, 1]$.

Докажем непрерывность T_t^n и T_t . Для T_t^n имеем:

$$\begin{aligned} \|T_t^n - T_s^n\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq 2 \int_s^t \left(\|a(u, T_u^{(n-1)})\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|b(u, T_u^{(n-1)})\|_{\mathcal{M}_1}^2 \right) du \\ &\leq 2K^2 \int_s^t (1 + \|T_u^{(n-1)}\|_{\mathcal{M}_1}^2) du \\ &\leq (t-s) \cdot 6K^2(K^2 + \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{M}_1}^2 \exp(3K^2)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $s \rightarrow t$. Отсюда получаем и непрерывность T_t .

Единственность. Пусть (T_t) , $t \in [0, 1]$, и $(\bar{T}_t)$, $t \in [0, 1]$, — два решения с $T_0 = \bar{T}_0 = \mathcal{T}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T_t - \bar{T}_t\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq 2t \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \int_0^t (a(s, T_s) - a(s, \bar{T}_s))(x^*)^2 ds \\ &\quad + 2 \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \int_0^t (b(s, T_s) - b(s, \bar{T}_s))(x^*)^2 ds \\ &\leq 2t \int_0^t \|a(s, T_s) - a(s, \bar{T}_s)\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \|b(s, T_s) - b(s, \bar{T}_s)\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds \leq L \int_0^t \|T_s - \bar{T}_s\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds, \end{aligned}$$

где $L = 2tK^2 + 2K^2$. Имеем

$$\|T_t - \bar{T}_t\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq L \int_0^t \|T_s - \bar{T}_s\|_{\mathcal{M}_1}^2 ds.$$

Следовательно, $\|T_t - \bar{T}_t\|_{\mathcal{M}_1}^2 = 0$, тогда для любого $t \in [0, 1]$ и $x^* \in X^*$ выполнено равенство $\mathbf{P}(T_t x^* = \bar{T}_t x^*) = 1$. Из непрерывности реализаций этих процессов получаем

$$\mathbf{P}(\omega: T_t x^*(\omega) = \bar{T}_t x^*(\omega) \text{ для всех } t \in [0, 1]) = 1,$$

что и завершает доказательство теоремы 6.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в сепарабельном банаховом пространстве X :

$$d\xi_t = a(t, \xi_t) dt + b(t, \xi_t) dW_t, \quad (6)$$

где $a: [0, 1] \times X \rightarrow X$, $b: [0, 1] \times X \rightarrow X$ — такие $\mathcal{B}[0, 1] \times \mathcal{B}(X)$ -измеримые функции, что

- 1) $\|a(t, \xi)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \|b(t, \xi)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2(1 + \|\xi\|_{\mathcal{M}_1})^2$,
- 2) $\|a(t, \xi) - a(t, \eta)\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|b(t, \xi) - b(t, \eta)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2 \|\xi - \eta\|_{\mathcal{M}_1}^2$,

где ξ, η — случайные элементы со значением в X .

Если условия 1) и 2) выполнены, то можно продолжить функции a и b на $\overline{\mathcal{M}_2} \subseteq \mathcal{M}_1$: пусть $T \in \overline{\mathcal{M}_2}$, тогда существует последовательность $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{M}_2$ такая, что $\|\xi_n - T\|_{\mathcal{M}_1} \rightarrow 0$. Поскольку $\|a(t, \xi_n) - a(t, \xi_m)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2 \|\xi_n - \xi_m\|_{\mathcal{M}_1}^2 \rightarrow 0$, то $a(t, T) := \lim_{n \rightarrow \infty} a(t, \xi_n)$. Аналогично, $b(t, T) := \lim_{n \rightarrow \infty} b(t, \xi_n)$. Следовательно, для любого $T \in \overline{\mathcal{M}_2}$, $a(t, T)$ и $b(t, T)$ принадлежат $\overline{\mathcal{M}_2}$.

Для любых T и L из $\overline{\mathcal{M}_2}$ справедливы также неравенства

- 1') $\|a(t, T)\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|b(t, T)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2(1 + \|T\|_{\mathcal{M}_1}^2)$,
- 2') $\|a(t, T) - a(t, L)\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|b(t, T) - b(t, L)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2 \|T - L\|_{\mathcal{M}_1}^2$.

Следовательно, из уравнения (5) получаем стохастическое дифференциальное уравнение для ОСП

$$dT_t = a(t, T_t) dt + b(t, T_t) dW_t$$

с $\mathcal{F}_0$ -измеримым начальным условием $T_0 x^* = \langle \xi_0, x^* \rangle$, где измеримые неупреждающие функции a и b удовлетворяют условиям 1') и 2'). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Пусть измеримые неупреждающие функции a и b удовлетворяют условиям 1), 2) и для любого случайного элемента $\xi \in \mathcal{M}_2$ отображения $a(\cdot, \xi)$ и $b(\cdot, \xi)$ из $[0, 1]$ в $\mathcal{M}_1$ непрерывны. Тогда стохастическое дифференциальное уравнение (5) имеет единственное обобщенное решение T_t с начальным условием $T_0 x^* = \langle \xi_0, x^* \rangle$, где $\xi_0 \in \mathcal{M}_2$ есть $\mathcal{F}_0$ -измеримый случайный элемент. Решение $T(t)$ таково, что $T(t) \in \overline{\mathcal{M}_2}$.

Доказательство. Применяя теорему 6, достаточно доказать, что $\int_0^1 a(t, T_t^n) dt$ и $\int_0^1 b(t, T_t^n) dW_t$ принадлежат $\overline{\mathcal{M}_2}$, где $T_t^0 x^* = \langle \xi_0, x^* \rangle$ и для любого $x^* \in X^*$

$$T_t^n x^* = T_t^0 x^* + \int_0^t a(s, T_s^{n-1}) x^* ds + \int_0^t b(s, T_s^{n-1}) x^* dW_s.$$

Мы уже показали, что если $T \in \overline{\mathcal{M}_2}$, то $a(t, T)$ и $b(t, T)$ тоже принадлежат $\overline{\mathcal{M}_2}$. Из непрерывности $a(t, \xi)$ и $b(t, \xi)$ для любого $\xi \in \mathcal{M}_2$ следует непрерывность $a(t, T)$ и $b(t, T)$ для всех $T \in \overline{\mathcal{M}_2}$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ функции $a(t, T_t^n)$ и $b(t, T_t^n)$ непрерывны, а значит, являются сепарабельнозначными функциями в $\overline{\mathcal{M}_2}$.

Так как $\|a(t, T_t^n)\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|b(t, T_t^n)\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq K^2(1 + \|T_t^n\|_{\mathcal{M}_1}^2) \leq C$ и $a(\cdot, T)$, $b(\cdot, T)$ — сепарабельнозначные функции, то $\int_0^1 a(t, T_t^n) dt \in \overline{\mathcal{M}_2}$ и, по теореме 2, $\int_0^1 b(t, T_t^n) dW_t \in \overline{\mathcal{M}_2}$. Следовательно, можно применить теорему 6, что завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Непрерывность $a(\cdot, \xi)$ и $b(\cdot, \xi)$ нужна для сепарабельности области значения этих функций в $\overline{\mathcal{M}_2}$, что является более слабым требованием, чем непрерывность.

Рассмотрим сейчас линейное стохастическое дифференциальное уравнение в произвольном сепарабельном банаховом пространстве:

$$d\xi_t = A(t)\xi_t dt + B(t)\xi_t dW_t, \quad (7)$$

где $A: [0, 1] \rightarrow L(X, X)$ и $B: [0, 1] \rightarrow L(X, X)$ непрерывны. Тогда

$$\max \left(\sup_{t \in [0, 1]} \|A(t)\|, \sup_{t \in [0, 1]} \|B(t)\| \right) \leq M \quad (8)$$

для некоторого $M > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\|A(t)\xi - A(t)\eta\|_{\mathcal{M}_1}^2 &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \langle A(t)(\xi - \eta), x^* \rangle^2 \\ &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \langle \xi - \eta, A^*(t)x^* \rangle^2 \leq \sup_{\|x^*\| \leq M} \mathbf{E} \langle \xi - \eta, x^* \rangle^2 \\ &= M^2 \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E} \langle \xi - \eta, x^* \rangle^2 = M^2 \|\xi - \eta\|_{\mathcal{M}_1}^2.\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что A и B удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 6. Легко доказать, что отображения $A(t)\xi$ и $B(t)\xi$ из $[0, 1]$ в $\mathcal{M}_1$ непрерывны. Таким образом, из теоремы 7 получаем следующий результат.

Теорема 8. Если коэффициенты A и B непрерывны, то линейное стохастическое дифференциальное уравнение (4) имеет единственное обобщенное решение T_t с начальным условием $T_0x^* = \langle \xi_0, x^* \rangle$, где $\xi_0: \Omega \rightarrow X$ является $\mathcal{F}_0$ -измеримым случайным элементом. При этом $T(t) \in \overline{\mathcal{M}_2}$.

Мы получили ОСП $T(t)$ как обобщенное решение стохастического дифференциального уравнения в сепарабельном банаховом пространстве при не очень жестких условиях. Мы показали также, что это решение принадлежит $\overline{\mathcal{M}_2}$, значит, по предложению 2, существуют $m: [0, 1] \rightarrow X$ такое, что $\mathbf{E} T_t x^* = \langle m(t), x^* \rangle$, и $R_t: X^* \rightarrow X$ такое, что $\langle R_t x^*, y^* \rangle = \mathbf{E} T_t x^* T_t y^*$. В следующей теореме предложены дополнительные достаточные условия, при которых существует уже сильное решение стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 9. Пусть дано обобщенное решение (T_t) , $t \in [0, 1]$, из теоремы 7 или теоремы 8. Обозначим $L_t x^* := T_t x^* - \langle m(t), x^* \rangle$. Если для некоторого фиксированного $p \geq 2$ и любого $x^* \in X^*$ выполнено неравенство $(\mathbf{E} (L_t x^*)^p)^{1/p} \leq (\mathbf{E} (L_t x^*)^2)^{1/2}$ и $R_t \in \mathbf{R}_p(X)$, где R_t — ковариационный оператор ОСД T_t , то существует случайный процесс (ξ_t) , $t \in [0, 1]$, такой, что

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi_s) ds + \int_0^t b(s, \xi_s) dW_s.$$

Доказательство. Для произвольного $t \in [0, 1]$ покажем, что существует случайный элемент ξ_t такой, что $\langle \xi_t, x^* \rangle = T_t x^*$ для любого $x^* \in X^*$. Обозначим $H_0 := \{L_t x^*, x^* \in X^*\}$. Пусть H — его замыкание в $L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Из условия теоремы следует, что $H \subset L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Профакторизуем оператор R_t через гильбертово пространство H : $R_t = L_t L_t^*$. Так как $R_t \in \mathbf{R}_p(X)$, то $L_t^*: H \rightarrow X$ есть p -абсолютно суммирующий оператор. Пусть $A: H \rightarrow L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ — естественное вложение. По теореме

Л. Шварца (см. [11]), существует случайный элемент $\eta_t \in L_p(\Omega, X)$ такой, что $AL_tx^* = \langle \eta_t, x^* \rangle$ для любого $x^* \in X^*$. Тогда случайный процесс $\xi_t = \eta_t + m_t$ будет искомым решением. Теорема доказана.

Пусть сейчас коэффициенты стохастического дифференциального уравнения (5) таковы, что для некоторых $K > 0$, положительно определенного, симметричного линейного оператора $R: X^* \rightarrow X$ и ограниченных линейных операторов $A_i: X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots$, таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|^2 < \infty$, справедливы утверждения

$$\begin{aligned} \text{а) } & \langle a(t, x), x^* \rangle^2 + \langle b(t, x), x^* \rangle^2 \leq K^2 \left(\langle Rx^*, x^* \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i x, x^* \rangle^2 \right), \\ \text{б) } & \langle a(t, x) - a(t, y), x^* \rangle^2 + \langle b(t, x) - b(t, y), x^* \rangle^2 \leq K^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i(x - y), x^* \rangle^2 \end{aligned}$$

для любых $t \in [0, 1]$, $x, y \in X$ и $x^* \in X^*$.

Тогда легко видеть, что коэффициенты a и b удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 7. Действительно,

$$\begin{aligned} \|a(t, \xi)\|_{\mathcal{M}_1}^2 &= \sup_{x^* \in X^*} \mathbf{E} \langle a(T, \xi), x^* \rangle^2 \\ &\leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} K^2 \left(\langle Rx^*, x^* \rangle + \mathbf{E} \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i \xi, x^* \rangle^2 \right) \\ &\leq K^2 \left(\|R\|^2 + \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \xi, \frac{A_i^*}{\|A_i^*\|} x^* \right\rangle^2 \|A_i\|^2 \right) \\ &\leq K^2 \left(\|R\| + \|\xi\|_{\mathcal{M}_1}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|^2 \right) \leq K_1^2 (1 + \|\xi\|_{\mathcal{M}_1}^2). \end{aligned}$$

Аналогично получается второе неравенство. Следовательно, по теореме 7, соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение имеет единственное сильное обобщенное решение, принадлежащее $\overline{\mathcal{M}_2}$.

Следующая теорема (которая легко следует из теоремы 9) дает достаточное условие существования сильного решения стохастического дифференциального уравнения в произвольном сепарабельном банаховом пространстве (см. [5, теорема 2]).

Теорема 10. Пусть $(T_t)_{t \in [0, 1]}$ — обобщенное решение стохастического дифференциального уравнения (5) с начальным условием $T_0 x^* = \langle \xi_0, x^* \rangle$, коэффициенты a и b которого удовлетворяют условиям а), б), и существует число $p \geq 2$ такое, что $(\mathbf{E} |T_t x^* - \mathbf{E} T_t x^*|^p)^{1/p} \leq (\mathbf{E} |T_t x^* - \mathbf{E} T_t x^*|^2)^{1/2}$ для всех $x^* \in X^*$. Если R и $R_0 := R_{\xi_0}$ принадлежат $\mathbf{R}_p(X)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| < \infty$, то существует единственное сильное решение $(\xi_t)_{t \in [0, 1]}$ стохастического дифференциального уравнения (5) и $\mathbf{E} \|\xi_t\|^p < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 9 и леммам 1 и 2, достаточно оценить ковариационный оператор R_t ОСЭ T_t , $t \in [0, 1]$, ковариационным оператором $\bar{R}$ из класса $\mathbf{R}_p(X)$. Заметим, что линейные ограниченные операторы $A_i: X \rightarrow X$, $i \in \mathbf{N}$, можно продолжить на $\mathcal{M}_2$. Имеем: $\langle R_t x^*, x^* \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (T_t^n x^*)^2$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (T_t^n x^*)^2 &\leq 3 \mathbf{E} \langle \xi_0, x^* \rangle^2 + 3 E \int_0^t (a(s, T_s^{(n-1)}) x^*)^2 ds \\ &\quad + 3 \mathbf{E} \int_0^t (b(s, T_s^{(n-1)}) x^*)^2 ds \\ &\leq 3 \langle R_0 x^*, x^* \rangle + 3K^2 t \langle R x^*, x^* \rangle + 3K^2 \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} (T_s^{n-1} A_i^* x^*)^2 ds, \\ \mathbf{E} (T_t^1 x^*)^2 &\leq 3 \langle R_0 x^*, x^* \rangle + 3tK^2 \langle R x^*, x^* \rangle + 3tK^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i R_0 A_i^* x^*, x^* \rangle, \\ \mathbf{E} (T_t^2 x^*)^2 &\leq 3 \langle R_0 x^*, x^* \rangle + 3tK^2 \langle R x^*, x^* \rangle + 3K^2 \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} (T_s^1 A_i^* x^*)^2 ds \\ &\leq 3 \langle R_0 x^*, x^* \rangle + 3tK^2 \langle R x^*, x^* \rangle + 3^2 K^2 t \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i R_0 A_i^* x^*, x^* \rangle \\ &\quad + \frac{3^2 K^4 t^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i R A_i^* x^*, x^* \rangle \\ &\quad + \frac{3^2 K^4 t^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle A_i A_j R_0 A_j^* A_i^* x^*, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (T_t^n x^*)^2 &\leq 3 \langle R_0 x^*, x^* \rangle \\ &\quad + 3 \sum_{m=1}^n \frac{(3K^2 t)^m}{m!} \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \langle A_{i_m} \cdots A_{i_1} R_0 A_{i_1}^* \cdots A_{i_m}^* x^*, x^* \rangle \\ &\quad + 3tK^2 \langle R x^*, x^* \rangle \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(3K^2 t)^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \langle A_{i_m} \cdots A_{i_1} R A_{i_1}^* \cdots A_{i_m}^* x^*, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \Pi_p \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} A_{i_m} \cdots A_{i_1} R A_{i_1}^* \cdots A_{i_m}^* \right) \\ \leq \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \|A_{i_1}\| \cdots \|A_{i_m}\| \Pi_p(R) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \right)^m \Pi_p(R), \end{aligned}$$

имеем

$$\Pi_p(R_t) \leq C \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3K^2 t)^m}{m!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \right)^m \Pi_p(R_0)$$

$$+ C \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3K^2t)^m}{m!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \right)^m \Pi_p(R) < \infty.$$

Таким образом, $R_t \in \mathbf{R}_p(X)$, т.е. существует $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ такой, что $\langle \xi_t, x^* \rangle = T_t x^*$, $x^* \in X^*$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brzeźniak Z., van Neerven J. M. A. M., Veraar M. C., Weis L.* Itô's formula in UMD Banach spaces and regularity of solutions of the Zakai equation. — J. Differential Equations, 2008, v. 245, p. 30–58.
2. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 386 с.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ. М.: ИЛ, 1962, 829 с.
4. *Mamproria B. I.* Wiener processes and stochastic integrals on a Banach space. — Probab. Math. Statist., 1986, v. 7, № 1, p. 59–75.
5. *Mamproria B. I.* On the existence and uniqueness of a solution to a stochastic differential equation in a Banach space. — Georgian Math. J., 2004, v. 11, № 3, p. 515–526.
6. *McConnell T. R.* Decoupling and stochastic integration in UMD Banach spaces. — Probab. Math. Statist., 1989, v. 10, № 2, p. 283–295.
7. *van Neerven J. M. A. M., Weis L.* Stochastic integration of operator-valued functions with respect to Banach space-valued Brownian motion. — Potential Anal., 2008, v. 29, № 1, p. 65–88.
8. *Pisier G.* Martingales with values in uniformly convex spaces. — Israel J. Math., 1975, v. 20, p. 326–350.
9. *Rosiński J., Suchanecki Z.* On the space of vector-valued functions integrable with respect to the white noise. — Colloq. Math., 1980, v. 43, № 1, p. 183–201.
10. *Розовский Б. И.* Эволюционные стохастические системы. М.: Наука, 1983, 208 с.
11. *Schwartz L.* Application p -radonifiantes. — Séminaire L. Schwartz 1969/70, Exp. 11, 12.
12. *Yang W. Zh., Tsai T. M.* Itô's integration on 2-smooth Banach space. — Chinese J. Math., 1983, v. 11, p. 193–206.

Поступила в редакцию
15.IV.2010