Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, С. Попов, Уточнение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при отсутствии моментов порядков, больших второго, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 4, 797–805

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:39:54

© 2011 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*, ПОПОВ С. В.**

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ МОМЕНТОВ ПОРЯДКОВ, БОЛЬШИХ ВТОРОГО

Уточнены верхние оценки абсолютной постоянной в оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме в терминах урезанных моментов. Показано, что абсолютная константа в неравенстве Осипова не превосходит 2.011.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, оценка скорости сходимости, абсолютная константа.

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины с $\mathbf{E}X_i = 0$ и $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$. Для $n \in \mathbf{N}$ положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Предположим, что

$$\mathbf{D}S_n = \mathbf{E}X_1^2 + \dots + \mathbf{E}X_n^2 = 1. \quad (1)$$

Пусть $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения. Для $x \geq 0$ обозначим

$$\alpha_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x), \quad \alpha_n = \alpha_n(0),$$

$$\beta_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x), \quad \beta_n = \beta_n(0).$$

В 1966 г. Л. В. Осипов [5] доказал, что существует такая конечная положительная абсолютная постоянная C , что

$$\Delta_n \equiv \sup_y |\mathbf{P}(S_n < y) - \Phi(y)| \leq C(\alpha_n + \beta_n) \quad (2)$$

(также см. [6, гл. V, § 3, теорема 7]). В 1968 г. то же неравенство было независимо доказано В. Феллером [10], который, используя метод характеристических функций, показал, что в (2) $C \leq 6$.

В работах [12], [13] Л. Падитц показал, что для константы C в (2) справедлива оценка $C < 4.77$. В 1986 г. в работе [14] он же отметил, что с учетом леммы 12.2 из монографии [1] (см. лемму 5 ниже) с помощью техники, использованной в работах [12], [13], верхнюю оценку константы C можно снизить до $C < 3.51$.

В 1984 г. А. Барбур и П. Холл [8] доказали неравенство (2) методом Стейна и, упоминая цитированный выше результат Феллера, констатировали, что этот метод позволил им получить лишь оценку $C \leq 18$ (хотя в указанной работе ими доказана

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; Институт проблем информатики РАН, ул. Вавилова, 44, кор. 2, 119333 Москва, Россия; vkorolev@cs.msu.ru

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; porovserg@yandex.ru

¹⁾ Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 11-01-00515а и 11-07-00112а), а также Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

только оценка $C \leq 22$). В 2001 г. Л. Чен и К. Шао опубликовали не содержащую ссылок на упомянутые выше работы Падитца [12]–[14] работу [9], в которой с помощью метода Стейна неравенство (2) было доказано с константой $C = 4.1$.

Целью данной статьи является уточнение указанных оценок константы C . Будет показано, что в (2) в общем случае $C \leq 2.011$. Эта оценка также будет уточнена для некоторых частных случаев.

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть X — случайная величина с $\mathbf{E}|X|^3 < \infty$ и $\mathbf{E}X = a$. Обозначим

$$K = \frac{17 + 7\sqrt{7}}{27} < 1.3156.$$

Тогда

$$\mathbf{E}|X - a|^3 \leq \min\{K\mathbf{E}|X|^3, \mathbf{E}|X|^3 + 3|a|\mathbf{E}X^2 + a^2\mathbf{E}|X|\}.$$

Доказательство. С одной стороны, очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X - a|^3 &= \mathbf{E}|X - a|(X - a)^2 = \mathbf{E}|X - a|(X^2 - 2aX + a^2) \\ &= \mathbf{E}|X|^3 - 2a\mathbf{E}X|X| + a^2\mathbf{E}|X| + |a|\mathbf{E}X^2 - 2|a|a\mathbf{E}X + |a|^3 \\ &= \mathbf{E}|X|^3 + 3|a|\mathbf{E}X^2 + a^2\mathbf{E}|X|. \end{aligned}$$

С другой стороны, с использованием результата работы [11] о том, что экстремум функционала, линейного по функции распределения случайной величины X , при одном линейном ограничении $\mathbf{E}X = a$ моментного типа достигается на некотором двухточечном распределении (также см. [2]), в статье [4] показано, что справедливо соотношение

$$\sup_{X: \mathbf{E}|X|^3 < \infty} \frac{\mathbf{E}|X - a|^3}{\mathbf{E}|X|^3} = \frac{17 + 7\sqrt{7}}{27} < 1.3156.$$

Лемма доказана.

Для $x \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $i = 1, \dots, n$ обозначим

$$Y_i(x) = X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1 + x), \quad Y_i = Y_i(0), \quad W_n(x) = \sum_{i=1}^n Y_i(x), \quad W_n = W_n(0).$$

Так как $\mathbf{E}X_i = 0$, то

$$\left| \mathbf{E}X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1 + x) \right| = \left| \mathbf{E}X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1 + x) \right|, \quad (3)$$

а поскольку имеет место соотношение (1), то

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1 + x) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2 \leq 1. \quad (4)$$

Лемма 2. Пусть K — число из леммы 1.

1°. При любых $n \in \mathbf{N}$ и $x \geq 0$ для любого $p \in [1, K]$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|Y_i(x) - \mathbf{E}Y_i(x)|^3 \leq \min \left\{ K\beta_n(x), p\beta_n(x) + \frac{(5-p)\alpha_n(x)}{1+x} \right\}.$$

2°. При любых $n \in \mathbf{N}$ и $x \geq 0$ справедливы неравенства

$$1 - 2\alpha_n(x) \leq \mathbf{D}W_n(x) \leq 1.$$

3°. Пусть $\beta_n = \gamma\alpha_n$, $\gamma \geq 0$. Тогда при любых $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|Y_i - \mathbf{E}Y_i|^3 \leq \alpha_n \min\{K\gamma, \gamma + 4\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1°. Согласно лемме 1, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |Y_i(x) - \mathbf{E} Y_i(x)|^3 \leq \min \left\{ K \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x), \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right. \\ \left. + 3 \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right| \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^2 \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

С одной стороны, по неравенству Ляпунова

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x)| \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\ \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\ \leq \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^{1/3} \left[\mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^{2/3} \\ = \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) = \beta_n(x) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^2 \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\ \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\ \leq \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^{2/3} \left[\mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^{1/3} \\ = \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i|^3 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) = \beta_n(x). \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу соотношений (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right| \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\ \leq \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right| = \sum_{i=1}^n |\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x)| \\ \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E} \frac{X_i^2}{|X_i|} \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \\ \leq \frac{1}{1+x} \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) = \frac{\alpha_n(x)}{1+x}, \end{aligned}$$

и с учетом тех же соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^2 \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\ = \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right| \cdot \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right| \cdot \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \right| \cdot \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right| \cdot \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \right| \cdot \left[\mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \right| \cdot \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \right| \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{E} \frac{X_i^2}{|X_i|} \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \leq \frac{1}{1+x} \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) = \frac{\alpha_n(x)}{1+x}.
\end{aligned}$$

Таким образом, как вторая, так и третья сумма во втором выражении под знаком минимума в (5) допускает двоякую верхнюю оценку как с помощью величины $\beta_n(x)$, так и с помощью величины $\alpha_n(x)/(1+x)$. Первое утверждение леммы доказано.

2°. С учетом (1) и (3) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}W_n(x) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) - \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1+x) \right]^2 \\
&= 1 - \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) - \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \right]^2. \quad (6)
\end{aligned}$$

Поскольку обе суммы в правой части последнего соотношения неотрицательны, отсюда вытекает, что $\mathbf{D}W_n \leq 1$. Далее, продолжая (6), замечаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}W_n(x) &= 1 - \alpha_n(x) - \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) \right]^2 \\
&\geq 1 - \alpha_n(x) - \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| \geq 1+x) = 1 - 2\alpha_n(x).
\end{aligned}$$

3°. Принимая во внимание утверждение 1° леммы и условие $\beta_n = \gamma\alpha_n$, имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \mathbf{E} |Y_i - \mathbf{E} Y_i|^3 &\leq \min\{K\beta_n, p\beta_n + (5-p)\alpha_n\} \\
&= \alpha_n \min\{K\gamma, p\gamma + 5 - p\} = \alpha_n \min\{K\gamma, p(\gamma - 1) + 5\}.
\end{aligned}$$

Функция $f(p) = p(\gamma - 1) + 5$ линейна по p . Значит, она достигает своего минимума на одном из концов отрезка рассматриваемых значений p . Имеем $f(1) = \gamma + 4$, $f(K) = K\gamma + 5 - K > K\gamma$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3. 1°. Пусть $q > 0$. Тогда

$$\sup_x |\Phi(qx) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \left(\max \left\{ q, \frac{1}{q} \right\} - 1 \right).$$

2°. Пусть $a \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\sup_x |\Phi(x+a) - \Phi(x)| \leq \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементарное доказательство этой леммы основано на формуле Лагранжа (также см. [6, гл. V, § 3, с. 161]).

Лемма 4. Предположим, что $\alpha_n \leq A$ для некоторого $A \in (0, 1/2)$. Пусть

$$B(A) = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - 2A})\sqrt{1 - 2A}}.$$

Тогда

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}W_n}} \leq 1 + B(A)\alpha_n.$$

Доказательство. Найдем наименьшее положительное число c , гарантирующее справедливость неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t}} \leq 1 + ct$$

для всех $t \in (0, A]$. Очевидно, что

$$c = \sup_{t \in (0, A]} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2t}} - 1 \right).$$

Имеем

$$\frac{1}{t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2t}} - 1 \right) = \frac{1 - (1 - 2t)}{t(1 + \sqrt{1 - 2t})\sqrt{1 - 2t}} = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - 2t})\sqrt{1 - 2t}}.$$

Очевидно, что правая часть монотонно возрастает по t на отрезке $[0, 0.5]$ и достигает своего максимального значения на интервале $(0, A] \subset [0, 0.5]$ в точке $t = A$:

$$c = \max_{t \in (0, A]} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2t}} - 1 \right) = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - 2A})\sqrt{1 - 2A}} \Big|_{t=A} = B(A).$$

Теперь из утверждения 2° леммы 2 с учетом условия $\alpha_n \leq A$ мы получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}W_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha_n}} \leq 1 + B(A)\alpha_n.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть X — случайная величина с $\mathbf{E} X^2 < \infty$. Тогда

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{X - \mathbf{E} X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq 0.541.$$

Доказательство. См., например, лемму 12.2 в книге [1].

3. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть $n \geq 1$, случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, $\mathbf{E} X_i = 0$ и $\mathbf{E} X_i^2 < \infty$, $i = 1, \dots, n$, причем выполнено условие (1). Пусть $\gamma = \beta_n / \alpha_n$. Тогда существует зависящее только от γ положительное конечное число $C_1(\gamma)$ такое, что $\Delta_n \leq (1 + \gamma)C_1(\gamma)\alpha_n$. При этом для $C_1(\gamma)$ справедливы верхние оценки, приведенные в таблице 1.

Таблица 1. Верхние оценки числа $C_1(\gamma)$

γ	$C_1(\gamma) \leq$	γ	$C_1(\gamma) \leq$	γ	$C_1(\gamma) \leq$
$\gamma \geq 0$	2.0110	$\gamma \geq 1$	1.5953	$\gamma \geq 10$	0.9433
$\gamma \geq 0.1$	1.9735	$\gamma \geq 2$	1.3672	$\gamma \geq 100$	0.6086
$\gamma \geq 0.5$	1.7823	$\gamma \geq 5$	1.0908	$\gamma \rightarrow \infty$	0.5600

Следствие 1. В условиях теоремы 1 неравенство (2) имеет место с $C \leq 2.0110$.

Доказательство теоремы 1. Для каждого $y \in \mathbf{R}$ событие $\{S_n < y\}$ влечет за собой событие

$$\{W_n < y\} \cup \{|X_1| \geq 1\} \cup \dots \cup \{|X_n| \geq 1\},$$

тогда как событие $\{W_n < y\}$ влечет за собой событие

$$\{S_n < y\} \cup \{|X_1| \geq 1\} \cup \dots \cup \{|X_n| \geq 1\}.$$

Поэтому $\sup_y |\mathbf{P}(S_n < y) - \mathbf{P}(W_n < y)| \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|X_i| \geq 1)$. Следовательно, для любого $y \in \mathbf{R}$

$$\Delta_n \leq Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sup_y \left| \mathbf{P} \left(\frac{W_n - \mathbf{E} W_n}{\sqrt{\mathbf{D} W_n}} < \frac{y - \mathbf{E} W_n}{\sqrt{\mathbf{D} W_n}} \right) - \Phi \left(\frac{y - \mathbf{E} W_n}{\sqrt{\mathbf{D} W_n}} \right) \right|, \\ Q_2 &= \sup_y \left| \Phi \left(\frac{y - \mathbf{E} W_n}{\sqrt{\mathbf{D} W_n}} \right) - \Phi(y) \right|, \\ Q_3 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|X_i| \geq 1). \end{aligned}$$

Рассмотрим Q_1 . В силу неравенства Берри–Эссеена с наилучшей известной на сегодняшний день оценкой абсолютной константы (см. [7]) имеем

$$Q_1 \leq \frac{0.56}{(\mathbf{D} W_n)^{3/2}} \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |Y_i - \mathbf{E} Y_i|^3.$$

Предположим, что $\alpha_n \leq A < 1/2$. Тогда согласно утверждениям 2° и 3° леммы 2

$$Q_1 \leq \frac{0.56 \min\{K\gamma, \gamma + 4\} \alpha_n}{(1 - 2A)^{3/2}}. \quad (8)$$

Рассмотрим Q_2 . Очевидно, что

$$Q_2 \leq \sup_y \left| \Phi \left(\frac{y}{\sqrt{\mathbf{D} W_n}} \right) - \Phi(y) \right| + \sup_y \left| \Phi \left(y - \frac{\mathbf{E} W_n}{\sqrt{\mathbf{D} W_n}} \right) - \Phi(y) \right| \equiv Q_{21} + Q_{22}.$$

Согласно утверждению 2° леммы 2, $\mathbf{D} W_n \leq 1$. Поэтому в соответствии с утверждением 1° леммы 3 и леммой 4 справедливо неравенство

$$Q_{21} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D} W_n}} - 1 \right) \leq \frac{2\alpha_n}{\sqrt{2\pi e(1 - 2A)}(1 + \sqrt{1 - 2A})}. \quad (9)$$

Рассмотрим Q_{22} . В силу соотношения (2) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} W_n| &= \left| \sum_{i=1}^n \mathbf{E} Y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| < 1)| = \sum_{i=1}^n |\mathbf{E} X_i \mathbf{I}(|X_i| \geq 1)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E} |X_i| \mathbf{I}(|X_i| \geq 1) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| \geq 1) = \alpha_n. \end{aligned}$$

Поэтому в силу утверждения 2° леммы 2 и утверждения 2° леммы 3

$$Q_{22} \leq \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi(1 - 2A)}}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) вытекает, что

$$Q_2 \leq \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi(1 - 2A)}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{e}(1 + \sqrt{1 - 2A})} \right). \quad (11)$$

Наконец, по неравенству Маркова

$$Q_3 = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|X_i| \geq 1) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{I}(|X_i| \geq 1) = \alpha_n. \quad (12)$$

Таким образом, из (7), (8), (11) и (12) мы получаем

$$\Delta_n \leq \alpha_n \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2A)}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{e}(1+\sqrt{1-2A})} \right) + \frac{0.56 \min\{K\gamma, \gamma+4\}}{(1-2A)^{3/2}} \right]. \quad (13)$$

Введем функцию

$$H_1(\gamma, A) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2A)}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{e}(1+\sqrt{1-2A})} \right) + \frac{0.56 \min\{K\gamma, \gamma+4\}}{(1-2A)^{3/2}}. \quad (14)$$

Для любого $0 \leq A < 1/2$ справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq \alpha_n \max \left\{ H_1(\gamma, A), \frac{0.541}{A} \right\}.$$

Это следует из неравенства (13) в случае $\alpha_n \leq A$ и из леммы 5 в противном случае.

Таким образом, имея в виду равенство

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n + \gamma\alpha_n}{1 + \gamma} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{1 + \gamma},$$

убеждаемся, что

$$C_1(\gamma) \leq \min_{0 \leq A < 1/2} \max \left\{ \frac{H_1(\gamma, A)}{1 + \gamma}, \frac{0.541}{A(1 + \gamma)} \right\}.$$

Вычисления по последней формуле позволяют получить значения, приведенные в таблице 1. Заметим, что первая из функций аргумента A внутри минимакса является возрастающей, а вторая — убывающей. Значит, значение минимакса достигается единственным решением уравнения

$$\frac{H_1(\gamma, A)}{1 + \gamma} = \frac{0.541}{A(1 + \gamma)}.$$

При $\gamma > 13$ (имеем $\gamma+4 < K\gamma$) обе функции являются убывающими по γ , т.е. значение минимакса убывает. И соответствующая часть таблицы 1 получается вычислением оценки $C_1(\gamma)$ в одной точке. Часть таблицы 1, соответствующая $0 \leq \gamma \leq 13$, получается численной оптимизацией на конечном отрезке. Теорема доказана.

Используя текущую наилучшую верхнюю оценку абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин: $C_0 \leq 0.4784$ (см. [3]), по аналогии с теоремой 1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 случайные величины одинаково распределены. Тогда существует зависящее только от γ положительное конечное число $C_2(\gamma)$ такое, что $\Delta_n \leq (1 + \gamma)C_2(\gamma)\alpha_n$. При этом для $C_2(\gamma)$ справедливы верхние оценки, приведенные в таблице 2.

Таблица 2. Верхние оценки числа $C_2(\gamma)$

γ	$C_2(\gamma) \leq$	γ	$C_2(\gamma) \leq$	γ	$C_2(\gamma) \leq$
$\gamma \geq 0$	2.0110	$\gamma \geq 1$	1.5234	$\gamma \geq 10$	0.8430
$\gamma \geq 0.1$	1.9537	$\gamma \geq 2$	1.2820	$\gamma \geq 100$	0.5245
$\gamma \geq 0.5$	1.7272	$\gamma \geq 5$	0.9950	$\gamma \rightarrow \infty$	0.4784

Доказательство. Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 1, несложно убедиться, что

$$C_2(\gamma) \leq \min_{0 \leq A < 1/2} \max \left\{ \frac{H_2(\gamma, A)}{1 + \gamma}, \frac{0.541}{A(1 + \gamma)} \right\},$$

где

$$H_2(\gamma, A) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2A)}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{e}(1 + \sqrt{1-2A})} \right) + \frac{0.4784 \min\{K\gamma, \gamma + 4\}}{(1-2A)^{3/2}}. \quad (15)$$

Вычисления по указанным формулам приводят к оценкам $C_2(\gamma)$, объявленным в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 случайные величины имеют симметричные распределения. Тогда существует зависящее только от γ положительное конечное число $C_3(\gamma)$ такое, что $\Delta_n \leq (1 + \gamma)C_3(\gamma)\alpha_n$. При этом для $C_3(\gamma)$ справедливы верхние оценки, приведенные в таблице 3.

Таблица 3. Верхние оценки числа $C_3(\gamma)$

γ	$C_3(\gamma) \leq$	γ	$C_3(\gamma) \leq$	γ	$C_3(\gamma) \leq$
$\gamma \geq 0$	1.5773	$\gamma \geq 1$	1.3046	$\gamma \geq 10$	0.7451
$\gamma \geq 0.1$	1.5754	$\gamma \geq 2$	1.1130	$\gamma \geq 100$	0.5825
$\gamma \geq 0.5$	1.4543	$\gamma \geq 5$	0.8745	$\gamma \rightarrow \infty$	0.5600

Следствие 2. В условиях теоремы 3 неравенство (2) имеет место с $C \leq 1.5773$.

Доказательство теоремы 3. В рассматриваемой ситуации вместо (8) имеет место неравенство

$$Q_1 \leq \frac{0.56\beta_n}{(1-2A)^{3/2}},$$

а $Q_{22} = 0$, поскольку $\mathbf{E}W_n = 0$. Поэтому справедлива оценка

$$\Delta_n \leq \alpha_n \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi e}(1-2A)(1 + \sqrt{1-2A})} \right) + \frac{0.56\beta_n}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$C_3(\gamma) \leq \min_{0 \leq A < 1/2} \max \left\{ \frac{H_3(\gamma, A)}{1 + \gamma}, \frac{0.541}{A(1 + \gamma)} \right\},$$

где

$$H_3(\gamma, A) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi e}(1-2A)(1 + \sqrt{1-2A})} + \frac{0.56\gamma}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Вычисления по указанным формулам приводят к оценкам $C_3(\gamma)$, объявленным в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть в дополнение к условиям теоремы 3 случайные величины одинаково распределены. Тогда существует зависящее только от γ положительное конечное число $C_4(\gamma)$ такое, что $\Delta_n \leq (1 + \gamma)C_4(\gamma)\alpha_n$. При этом для $C_4(\gamma)$ справедливы верхние оценки, приведенные в таблице 4.

Таблица 4. Верхние оценки числа $C_4(\gamma)$

γ	$C_4(\gamma) \leq$	γ	$C_4(\gamma) \leq$	γ	$C_4(\gamma) \leq$
$\gamma \geq 0$	1.5655	$\gamma \geq 1$	1.2459	$\gamma \geq 10$	0.6681
$\gamma \geq 0.1$	1.5558	$\gamma \geq 2$	1.0453	$\gamma \geq 100$	0.5017
$\gamma \geq 0.5$	1.4075	$\gamma \geq 5$	0.8003	$\gamma \rightarrow \infty$	0.4784

Следствие 3. В условиях теоремы 4 неравенство (2) имеет место с

$$C \leq 1.5655.$$

Доказательство теоремы 4. В данном случае

$$C_4(\gamma) \leq \min_{0 \leq A < 1/2} \max \left\{ \frac{H_4(\gamma, A)}{1 + \gamma}, \frac{0.541}{A(1 + \gamma)} \right\},$$

где

$$H_4(\gamma, A) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi e(1-2A)}(1 + \sqrt{1-2A})} + \frac{0.4784\gamma}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Вычисления по указанным формулам приводят к оценкам $C_4(\gamma)$, объявленным в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Авторы выражают признательность Л. Падитцу за неоценимую библиографическую поддержку, а также Ю. С. Нефедовой и И. Г. Шевцовой за возможность ознакомиться с работой [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
2. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
3. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, № 1, с. 25–56.
4. Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).
5. Осипов Л. В. Уточнение теоремы Линдберга. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 2, с. 339–342.
6. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
7. Шевцова И. Г. Уточнение оценок скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Докл. РАН, 2010, т. 435, № 1, с. 26–28.
8. Barbour A. D., Hall P. Stein's method and the Berry–Esseen theorem. — Austral. J. Statist., 1984, v. 26, p. 8–15.
9. Chen L. H. Y., Shao Q. M. A non-uniform Berry–Esseen bound via Stein's method. — Probab. Theory Related Fields, 2001, v. 120, № 2, p. 236–254.
10. Feller W. On the Berry–Esseen theorem. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1968, v. 10, p. 261–268.
11. Hoeffding W. The extrema of the expected value of a function of independent random variables. — Ann. Math. Statist., 1955, v. 26, № 2, p. 268–275.
12. Paditz L. Bemerkungen zu einer Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochsch. Verkehrswesen «Friedrich List» Dresden, 1980, v. 27, № 4, p. 829–837.
13. Paditz L. On error-estimates in the central limit theorem for generalized linear discounting. — Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statist., 1984, v. 15, № 4, p. 601–610.
14. Paditz L. Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochsch. Verkehrswesen «Friedrich List» Dresden, 1986, v. 33, № 2, p. 399–404.

Поступила в редакцию
11.III.2011