Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Простое доказательство неограниченности однородных случайных процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 4, 806–808

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:05:45

© 2011 г.

КРУГЛОВ В. М.*

ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

В настоящей заметке доказано, что неограниченность непостоянных однородных случайных процессов с независимыми приращениями является естественным следствием закона нуля или единицы Колмогорова. Известное доказательство этого утверждения основано на глубоком предварительном исследовании случайных процессов с независимыми приращениями.

Ключевые слова и фразы: закон нуля или единицы Колмогорова, случайные процессы с независимыми приращениями.

Предполагается, что все рассматриваемые далее случайные процессы определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимают свои значения в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$.

Напомним, что случайный процесс $\{X_t, t \geq 0\}$ имеет *независимые приращения*, если для любых чисел $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, $n \geq 2$, и $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ случайные векторы $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы. Случайный процесс $\{X_t, t \geq 0\}$ называется *однородным*, если для любых чисел $s, t, 0 \leq s < t, h > 0$ приращения $X_{t+h} - X_{s+h}$ и $X_t - X_s$ одинаково распределены.

Заметим, что каждая из d координат однородного случайного процесса $\{X_t, t \in T\}$ является однородным вещественным случайным процессом. В этом легко убедиться с помощью характеристических функций. Обозначим $\langle a, b \rangle$ скалярное произведение $a, b \in \mathbf{R}^d$. Для любых чисел $s, t, 0 \leq s < t, h > 0, u \in \mathbf{R}$ и для любого $v \in \mathbf{R}^d$ выполняются равенства

$$\mathbf{E} e^{iu(\langle v, X_{t+h} \rangle - \langle v, X_{s+h} \rangle)} = \mathbf{E} e^{i(uv, X_{t+h} - X_{s+h})} = \mathbf{E} e^{i(uv, X_t - X_s)} = \mathbf{E} e^{iu(\langle v, X_t \rangle - \langle v, X_s \rangle)}.$$

Равенство функций аргумента $u \in \mathbf{R}$ слева и справа означает, что вещественный случайный процесс $\{\langle v, X_t \rangle, t \geq 0\}$ обладает свойством однородности. Среди всех случайных процессов с независимыми приращениями мы выделим те, которые не представляют для нас особого интереса. Случайный процесс $\{X_t, t \geq 0\}$ называется *постоянным*, если $X_t(\omega) = c$ для всех $t \geq 0$, для некоторого $c \in \mathbf{R}^d$ и для почти всех $\omega \in \Omega$.

Известно (см. [1, с. 139]), что любой вещественный непостоянный однородный случайный процесс с независимыми приращениями неограничен. Приведенное в [1] доказательство построено на глубоком предварительном исследовании случайных процессов с независимыми приращениями. В настоящей заметке доказано, что это утверждение вытекает из закона нуля или единицы Колмогорова.

Теорема. *Любой непостоянный однородный случайный процесс $\{X_t, t \geq 0\}$ с независимыми приращениями почти всюду неограничен, т.е. $\sup_{t \geq 0} |X_t| = \infty$ почти всюду.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для какой-либо координаты случайного процесса. Далее предполагается, что $\{X_t, t \geq 0\}$ является непостоянным вещественным случайным процессом с независимыми приращениями. Мы

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: krugvictor@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00515-а.

будем предполагать, что $X_0 = 0$. Это условие не ограничивает общность рассуждений. Случайные величины $X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, невырождены, независимы и одинаково распределены. В силу неравенства $\sup_{0 \leq t < \infty} |X_t| \geq \sup_{k \in \mathbf{N}} |X_k|$ достаточно доказать, что $\sup_{k \in \mathbf{N}} |X_k| = \infty$ почти всюду. Так как $|X_n| < \infty$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то справедливо равенство $\{\sup_{k \in \mathbf{N}} |X_k| = \infty\} = \{\sup_{\mathbf{N} \ni k > n} |X_k - X_n| = \infty\}$. Мы намерены воспользоваться законом нуля или единицы Колмогорова (см. [2, с. 116]). Обозначим $\mathcal{F}_n$ сигма-алгебру, порожденную случайными величинами $X_k - X_{k-1}$, $k \geq n$. Событие $A = \{\sup_{k \in \mathbf{N}} |X_k| = \infty\}$ можно представить в виде пересечения $A = \bigcap_{r=1}^{\infty} \{\sup_{\mathbf{N} \ni k > n} |X_k - X_n| > r\}$ событий из сигма-алгебры $\mathcal{F}_n$. Поэтому $A \in \mathcal{F}_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и, следовательно, $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. По упомянутому закону нуля или единицы вероятность события A равна нулю или единице.

Докажем, что $\mathbf{P}\{A\} = 1$. Предположим противное, что $\mathbf{P}\{A\} = 0$. Поэтому $\sup_{k \in \mathbf{N}} |X_k| < \infty$ почти всюду (п.в.) и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/m}} \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n^{1/m}} = 0 \quad \text{п.в.}$$

для любого $m \in \mathbf{N}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - X_{n-1}}{n^{1/m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n^{1/m}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{1/m}}{n^{1/m}} \frac{X_{n-1}}{(n-1)^{1/m}} = 0$$

п.в. По лемме Бореля–Кантелли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X_{n-1}| > n^{1/m}\}$ сходится. Случайные величины $X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, одинаково распределены и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X_{n-1}| > n^{1/m}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_1| > n^{1/m}\}.$$

Известно, что сходимость последнего ряда влечет конечность математического ожидания $\mathbf{E}|X_1|^m$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X_1|^m &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(|X_1|^m I_{\{n-1 < |X_1|^m \leq n\}}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P}\{n-1 < |X_1|^m \leq n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\mathbf{P}\{|X_1|^m > n-1\} - \mathbf{P}\{|X_1|^m > n\} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_1|^m > n\} < \infty. \end{aligned}$$

Если $\mathbf{E}X_1 \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n/n) = \mathbf{E}X_1$ п.в. по усиленному закону больших чисел Колмогорова. Отсюда следует, что $\sup_{n \in \mathbf{N}} |X_n| = \infty$ п.в. Это противоречит предположению, что $\mathbf{P}\{A\} = 0$. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$, то по центральной предельной теореме мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{X_n}{\sqrt{n \mathbf{E}|X_1|^2}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

для любого $x \in \mathbf{R}$. С другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{X_n}{\sqrt{n \mathbf{E}|X_1|^2}} < x \right\} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Мы снова пришли к противоречию и, следовательно, $\mathbf{P}\{A\} = 1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скорород А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964, 278 с.
2. *Колмогоров А. В.* Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974, 119 с.

Поступила в редакцию
10.III.2011

© 2011 г.

ТЮРИН И. С.*

УТОЧНЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА

Доказаны новые оценки близости характеристических функций нормированных сумм независимых случайных величин к характеристической функции стандартного нормального закона, что позволило эффективно оценить скорость сходимости в центральной предельной теореме при наличии абсолютных моментов третьего порядка. А именно, установлено, что константа C , фигурирующая в неравенстве Берри–Эссеена, не превосходит 0.4774. Кроме того, показано, что константа, возникающая в аналогичном неравенстве для неодинаково распределенных слагаемых, не превосходит 0.5591.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, теорема Ляпунова, скорость сходимости, неравенство Берри–Эссеена.

Рассмотрим независимые (действительные) невырожденные случайные величины (с.в.) $X_1, \dots, X_n$ с нулевыми средними, дисперсиями равными $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ и конечными третьими абсолютными моментами $\beta_1, \dots, \beta_n$. Обозначим

$$\sigma^2 = \sigma^2(n) := \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad \varepsilon_n := \frac{1}{\sigma^3} \sum_{j=1}^n \beta_j.$$

Величина ε_n называется дробью Ляпунова и позволяет эффективно оценить скорость сходимости в центральной предельной теореме при наличии моментов третьего порядка. Согласно теореме Ляпунова $S_n := (X_1 + \dots + X_n)/\sigma(n)$ слабо сходится к стандартной нормальной с.в. при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Более того, известно (см., например, [1]), что существует наименьшая универсальная постоянная C , такая, что для расстояния Колмогорова между S_n и стандартной гауссовской величиной N справедливо неравенство

$$\rho(S_n, N) := \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}(S_n \leq x) - \mathbf{P}(N \leq x)| \leq C\varepsilon_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Оценке этой константы посвящено множество работ. Первый результат в этой области принадлежит К.Эссеену [1], который в 1942 г. показал, что $C \leq 7.5$. За 40 лет усилиями Г.Бергстрема, К.Такано, В.М.Золотарева, П.ван Бика, И.С.Шиганова и

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: itiurin@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мебиуса», а также Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00397а.