Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Тюрин, Уточнение остаточного члена в теореме Ляпунова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 4, 808–811

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:41:41

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скорород А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964, 278 с.
2. *Колмогоров А. В.* Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974, 119 с.

Поступила в редакцию
10.III.2011

© 2011 г.

ТЮРИН И. С.*

УТОЧНЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА

Доказаны новые оценки близости характеристических функций нормированных сумм независимых случайных величин к характеристической функции стандартного нормального закона, что позволило эффективно оценить скорость сходимости в центральной предельной теореме при наличии абсолютных моментов третьего порядка. А именно, установлено, что константа C , фигурирующая в неравенстве Берри–Эссеена, не превосходит 0.4774. Кроме того, показано, что константа, возникающая в аналогичном неравенстве для неодинаково распределенных слагаемых, не превосходит 0.5591.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, теорема Ляпунова, скорость сходимости, неравенство Берри–Эссеена.

Рассмотрим независимые (действительные) невырожденные случайные величины (с.в.) $X_1, \dots, X_n$ с нулевыми средними, дисперсиями равными $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ и конечными третьими абсолютными моментами $\beta_1, \dots, \beta_n$. Обозначим

$$\sigma^2 = \sigma^2(n) := \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad \varepsilon_n := \frac{1}{\sigma^3} \sum_{j=1}^n \beta_j.$$

Величина ε_n называется дробью Ляпунова и позволяет эффективно оценить скорость сходимости в центральной предельной теореме при наличии моментов третьего порядка. Согласно теореме Ляпунова $S_n := (X_1 + \dots + X_n)/\sigma(n)$ слабо сходится к стандартной нормальной с.в. при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Более того, известно (см., например, [1]), что существует наименьшая универсальная постоянная C , такая, что для расстояния Колмогорова между S_n и стандартной гауссовской величиной N справедливо неравенство

$$\rho(S_n, N) := \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}(S_n \leq x) - \mathbf{P}(N \leq x)| \leq C\varepsilon_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Оценке этой константы посвящено множество работ. Первый результат в этой области принадлежит К.Эссеену [1], который в 1942 г. показал, что $C \leq 7.5$. За 40 лет усилиями Г.Бергстрема, К.Такано, В.М.Золотарева, П.ван Бика, И.С.Шиганова и

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: itiurin@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мебиуса», а также Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00397а.

других ученых эта оценка была улучшена до $C \leq 0.7915$ в общем случае и $C \leq 0.7655$ в случае одинаково распределенных слагаемых, после чего наступил длительный период, в течение которого значительных продвижений в данном вопросе не наблюдалось. Однако в 2006 г. И. Г. Шевцовой удалось показать, что в случае независимых одинаково распределенных (н.о.р.) слагаемых имеет место неравенство $C \leq 0.7056$ (см. [2]). Эта работа положила начало череде новых результатов. В июне 2009 г. автором был предложен новый метод оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме (см. [3], [4]), позволивший установить, что $C \leq 0.6379$, а в случае н.о.р. слагаемых $C \leq 0.5894$. Немногом позже В. Ю. Королевым и И. Г. Шевцовой [5] для случая н.о.р. с.в. была получена оценка $C \leq 0.5129$. А в ноябре того же года автору удалось показать, что константа C в общем случае не превосходит 0.5606, а в случае одинаково распределенных слагаемых $C \leq 0.4785$ (см. [6]). Наконец, в 2010 г. независимо автором, а также В. Ю. Королевым и И. Г. Шевцовой было доказано, что $C \leq 0.5600$, а в случае одинаково распределенных с.в. $C \leq 0.4784$ (см. [7]–[10]).

В данной работе получены новые оценки близости характеристических функций нормированной суммы независимых с.в. и стандартной гауссовской с.в. Этот результат позволил установить наилучшие на сегодняшний день верхние оценки постоянных, фигурирующих в (1), как для случая н.о.р. с.в., так и для общего случая разнораспределенных слагаемых. А именно, доказан следующий результат.

Теорема 1. *В общем случае константа, фигурирующая в (1), не превосходит 0.5591, а в случае н.о.р. слагаемых $C \leq 0.4774$.*

Для доказательства потребуются несколько вспомогательных утверждений. Положим

$$b(t, \gamma) := \begin{cases} -t^2 + 2\gamma a|t|^3, & \text{если } \gamma|t| < M; \\ -2\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 (1 - \cos \gamma t), & \text{если } M \leq \gamma|t| \leq 2\pi; \\ 0, & \text{если } \gamma|t| > 2\pi. \end{cases}$$

Здесь $\gamma, t \in \mathbf{R}$, $a := \max_{x>0} \{(\cos(x) - 1 + x^2/2)/x^3\}$, M — соответствующая точка максимума. Обозначим $f(t) := \mathbf{E} \exp(itS_n)$, $\varphi(t) := \exp(-t^2/2)$, $\delta_n(t) := |f(t) - \varphi(t)|$, $t \in \mathbf{R}$.

Лемма 1 (см. [11]). *Пусть с.в. X центрирована, обладает единичной дисперсией и конечным третьим абсолютным моментом β . Тогда*

$$|\mathbf{E} \exp(itX)|^2 \leq 1 + b(t, \beta + 1) \leq \exp(-t^2 + 4a\beta|t|^3). \quad (2)$$

Лемма 2. *Пусть $a_k \in \mathbf{C}$, $0 < b_k < c_k$ и $|a_k| \leq c_k$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим $A_n := \prod_{k=1}^n a_k$, $B_n := \prod_{k=1}^n b_k$, $C_n := \prod_{k=1}^n c_k$, $M_n := \max_{1 \leq k \leq n} \{|a_k - b_k|/(c_k - b_k)\}$. Тогда*

$$|A_n - B_n| \leq M_n(C_n - B_n). \quad (3)$$

Доказательство леммы 2. Доказательство проведем по индукции. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть (3) выполнено для $n = m$. Докажем, что оно верно и для $n = m + 1$.

$$\begin{aligned} |A_{m+1} - B_{m+1}| &= |(a_{m+1} - b_{m+1})A_m + b_{m+1}(A_m - B_m)| \\ &\leq |a_{m+1} - b_{m+1}|C_m + b_{m+1}|A_m - B_m| \\ &\leq \frac{|a_{m+1} - b_{m+1}|}{c_{m+1} - b_{m+1}} (c_{m+1} - b_{m+1})C_m + b_{m+1}M_m(C_m - B_m) \\ &\leq M_{m+1}(c_{m+1} - b_{m+1})C_m + M_{m+1}b_{m+1}(C_m - B_m) \\ &= M_{m+1}(C_{m+1} - B_{m+1}). \end{aligned}$$

Для $t \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$ определим функцию

$$r(t, \beta) := \int_0^{|t|} 2s \sin \left(\min \left\{ \frac{\beta s}{4}, \frac{\pi}{2} \right\} \right) \exp \left(\frac{s^2}{2} \right) ds$$

и положим $u := \max\{g(t): t > 0\}$, где $g(t) := r(t, 1)/(\exp(2a|t|^3) - 1)$. Обозначим L точку, в которой достигается этот максимум.

Лемма 3. Для $|t| \leq L\varepsilon_n^{-1/3}$ справедлива оценка $\delta_n(t) \leq r(\varepsilon_n^{1/3}|t|, 1)\varphi(t)$, а для $|t| > L\varepsilon_n^{-1/3}$ имеем $\delta_n(t) \leq u\varphi(t)(\exp(2a\varepsilon_n|t|^3) - 1)$. В случае, когда с.в. $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены, для всех $t \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$\delta_n(t) \leq r(t/\sqrt{n}, \varepsilon_n\sqrt{n}) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t/\sqrt{n})^{n-k} (1 + b(t/\sqrt{n}, \varepsilon_n\sqrt{n} + 1))^{k/2} \right). \quad (4)$$

Доказательство леммы 3. Пусть

$$f_k(t) := \mathbf{E} \exp(itX_k), \quad \varphi_k(t) := \varphi(\sigma_k t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Из леммы 4 работы [9] следует, что для любой центрированной с.в. X с единичной дисперсией и конечным третьим абсолютным моментом β выполнено $|\mathbf{E} \exp(itX) - \varphi(t)| \leq \varphi(t)r(t, \beta)$.

Возьмем в качестве X с.в. X_k/σ_k , где $1 \leq k \leq n$. Эта величина центрирована, обладает единичной дисперсией и третьим абсолютным моментом β_k/σ_k^3 . Имеем

$$|f_k(t) - \varphi_k(t)| = |\mathbf{E} \exp(isX) - \varphi(s)| \Big|_{s=t\sigma_k} \leq \varphi_k(t)r(\sigma_k t, \beta_k/\sigma_k^3), \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Заметим, что $\sin(\min\{x, \pi/2\})/x$ убывает на интервале $(0, \infty)$, поэтому убывает по β и функция $r(t, \beta)/\beta$. Поскольку $\beta_k/\sigma_k^3 \geq 1$ для всех k , имеем

$$r\left(\sigma_k t, \frac{\beta_k}{\sigma_k^3}\right) \leq \frac{\beta_k}{\sigma_k^3} r(\sigma_k t, 1), \quad k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Кроме того, для $\alpha \geq 1$ и $s \geq 0$ выполнено

$$\exp(\alpha s) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k s^k}{k!} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha s^k}{k!} = \alpha(\exp(s) - 1). \quad (7)$$

Положив $\alpha = \beta_k/\sigma_k^3$, $s = 2a|t|^3$ в (7), получим, что для всех $t \neq 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\exp(2a\beta_k|t|^3) - 1} &= \frac{1}{\exp(2a|\sigma_k t|^3 \cdot \beta_k/\sigma_k^3) - 1} \\ &\leq \frac{\sigma_k^3/\beta_k}{\exp(2a|\sigma_k t|^3) - 1}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (6) и (8) следует, что для всех $t \neq 0$

$$\frac{r(\sigma_k t, \beta_k/\sigma_k^3)}{\exp(2a\beta_k|t|^3) - 1} \leq \frac{r(\sigma_k t, 1)}{\exp(2a|\sigma_k t|^3) - 1} = g(\sigma_k t), \quad k = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Если $t = 0$, то $\delta_n(t) = 0$ и утверждение теоремы тривиально выполнено. Рассмотрим $t \neq 0$. В лемме 2 возьмем $a_k = f_k(t)$, $b_k = \varphi_k(t)$, $c_k = \varphi_k(t) \exp(2a\beta_k|t|^3)$, $k = 1, \dots, n$. Согласно лемме 1, действительно, в этом случае $a_k \leq c_k$, $k = 1, \dots, n$. Очевидно, $A_n = f(t)$, $B_n(t) = \varphi(t)$, $C_n = \varphi(t) \exp(2a\varepsilon_n|t|^3)$. Кроме того, ввиду (5)

$$\frac{|a_k - b_k|}{c_k - b_k} \leq \frac{r(\sigma_k t, \beta_k/\sigma_k^3)}{\exp(2a\beta_k|t|^3) - 1},$$

что с учетом (9) влечет $M_n \leq \max\{g(\sigma_k t): 1 \leq k \leq n\}$. Так как $\sigma_k \leq \beta_k^{1/3} \leq \varepsilon_n^{1/3}$ для $1 \leq k \leq n$, имеем $M_n \leq \sup\{g(s): s \in (0, |t|\varepsilon_n^{1/3}]\}$. На участке $(0, L)$ функция $g(s)$ возрастает, в точке L — глобальный максимум равный u . Поэтому при $|t| \leq L\varepsilon_n^{-1/3}$ величина M_n не превосходит $g(\varepsilon_n^{1/3}t)$, а при $|t| > L\varepsilon_n^{-1/3}$ выполнено $M_n \leq u$. Подставляя соответствующие оценки в (3), получаем требуемый результат.

Обратимся к доказательству неравенства (4). Так как все X_k , $k = 1, \dots, n$, одинаково распределены,

$$\begin{aligned} |f(t) - \varphi(t)| &= |f_1(t)^n - \varphi_1(t)^n| = \left| (f_1(t) - \varphi_1(t)) \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_1(t)^k \varphi_1(t)^{n-k-1} \right) \right| \\ &\leq |f_1(t) - \varphi_1(t)| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |f_1(t)|^k \varphi_1(t)^{n-k-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что $\sigma_1 = 1/\sqrt{n}$, $\beta_1 = \varepsilon_n/n$. Очевидно, $\varphi_1(t) = \varphi(t/\sqrt{n})$. Из (5) следует, что $|f_1(t) - \varphi_1(t)| \leq \varphi_1(t)r(t/\sqrt{n}, \varepsilon_n\sqrt{n})$. Наконец, из (2) легко получить, что $|f_1(t)|^2 \leq 1 + b(t/\sqrt{n}, \varepsilon_n\sqrt{n} + 1)$. Подставляя перечисленные оценки в (10), приходим к (4).

Доказательство теоремы 1 проводилось при помощи вычислительного метода, описанного в [6]. При этом для оценки разности характеристических функций в окрестности нуля использовались неравенства, полученные в лемме 3. Как и в работе [6], для близких к нулю значений ε_n было использовано неравенство (I.52) из [11].

В общем случае экстремальным оказалось значение $\varepsilon_n = 0.509122\dots$, а в случае н.о.р. слагаемых $\varepsilon_n = 0.353558\dots$, $n = 8$. Проведенные вычисления позволили установить, что константа C не превосходит 0.5591, а в случае н.о.р. с.в. $C \leq 0.4774$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Esseen C.-G.* On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, №9, p. 1–19.
2. *Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 3, с. 622–626.
3. *Тюрин И. С.* О точности гауссовской аппроксимации. — Докл. РАН, 2009, т. 429, в. 3, с. 312–316.
4. *Тюрин И. С.* О скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 2, с. 250–270.
5. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 671–695.
6. *Тюрин И. С.* Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова. — Успехи матем. наук, 2010, т. 65, в. 3, с. 201–202.
7. *Tyurin I. S.* Some new results concerning the rate of convergence in Lyapunov's theorem. — Abstracts of the 10th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Lithuania, 2010, p. 279.
8. *Korolev V. Yu., Shevtsova I. G.* An improvement of the Berry–Esseen inequality. — Abstracts of the 10th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Lithuania, 2010, p. 195–196.
9. *Korolev V. Yu., Shevtsova I. G.* An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. — Scand. Actuar. J., iFirst, 2010, <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2010.485370>
10. *Шевцова И. Г.* Уточнение оценок скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Доклады РАН, 2010, т. 435, в. 1, с. 26–28.
11. *Prawitz H.* On the remainder in the central limit theorem. I: One-dimensional independent variables with finite absolute moments of third order. — Scand. Actuar. J., 1975, №3, p. 145–156.

Поступила в редакцию
17.XI.2010