Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веретенников, С. А. Клоков, Об условиях локального перемешивания для аппроксимаций стохастических дифференциальных уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 1, 35–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:33:55

© 2012 г. ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.^{*}, КЛОКОВ С. А.^{**}

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

При минимальных предположениях о гладкости коэффициента сноса показано, что для дискретизации эргодического стохастического уравнения с постоянным коэффициентом диффузии с помощью схемы Эйлера оценки на скорость β -перемешивания имеют тот же порядок, что и скорость перемешивания для предельного процесса.

Ключевые слова и фразы: эргодические стохастические дифференциальные уравнения, аппроксимации Эйлера, скорость перемешивания.

1. Введение. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в $\mathbf{R}^d$:

$$dX_t = F(X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbf{R}^d, \quad (1)$$

с ограниченным борелевским сносом $F: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, невырожденной постоянной матрицей диффузии σ размера $d \times d$ и d -мерным винеровским процессом W_t . Решение X_t уравнения (1) является сильным, оно единственно по траекториям и по распределению [23] и является однородным строгим марковским процессом [13]. При определенных предположениях о функции F существуют оценки скорости сходимости к стационарному распределению и скорости β -перемешивания [9], [20], [22]. Последние оценки важны для доказательства предельных теорем и других приложений. Иногда бывает желательно использование моделирования и аппроксимаций вида

$$X_{(n+1)h}^h = X_{nh}^h + F(X_{nh}^h)h + \xi_{n+1}\sqrt{h}, \quad X_0^h = x \in \mathbf{R}^d, \quad (2)$$

^{*}School of Mathematics, University of Leeds, LS2 9JT, Leeds, UK; Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Б. Каретный пер., 19, стр. 1, 127994 Москва, Россия; e-mail: a.veretennikov@leeds.ac.uk

^{**}Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск, 644099 Россия; e-mail: s-klokov@yandex.ru

¹⁾ Работа второго автора выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-3695.2008.1) и программы ОМН РАН 1.1.

где (ξ_n) , $n \geq 1$, — последовательность центрированных независимых одинаково распределенных случайных величин с общей плотностью q , которая *необязательно* гауссова.

Возникает важный вопрос: сохраняются ли при этом аналогичные *равномерные* оценки скорости перемешивания, относящиеся к данной схеме, не зависящие от уровня дискретизации? Подчеркнем, что в этом контексте слово «равномерные» относится к h , но, конечно, не к начальным данным, как и для предельного уравнения диффузии, где эти оценки, вообще говоря, лишь локально равномерны. Другими словами, хотелось бы иметь аналогичные оценки скорости перемешивания для класса процессов, заданных с помощью аппроксимирующей схемы (2) с достаточно малым h .

В [10], [21], [22] скорость сходимости и скорость β -перемешивания были установлены для стохастических разностных уравнений типа нелинейной авторегрессии:

$$X_{n+1} = g(X_n) + \xi_{n+1}, \quad X_0 = x_0 \in \mathbf{R}^d. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) выглядят очень похоже. Для каждого фиксированного значения $h > 0$ положим $g(x) = x + F(x)h$ и заменим ξ_{n+1} в уравнении (3) на $\xi_{n+1}\sqrt{h}$, как в уравнении (2). Тогда скорость перемешивания для (2) следует из доказанных результатов для (3). Весь вопрос — в сохранении равномерных оценок для всех достаточно малых значений h . Данная работа посвящена разрешению этого вопроса. Оказывается, что для схемы (2) ответ на него положителен при весьма широких предположениях.

Идея предлагаемого метода состоит в том, чтобы (1°) проверить свойства возвратности и (2°) установить с помощью прямых вычислений некоторую версию условия локального перемешивания для семейства марковских цепей [22], [11] равномерно относительно $h \leq h_0$ для некоторого $h_0 > 0$. Шаг (1°) является более или менее стандартным. На шаге (2°) используется центральная предельная теорема и «малые времена», т.е. nh достаточно мало, чтобы снос не смог испортить свойства перемешивания (но не стремится к нулю). Другая идея, используемая на шаге (2°), — это техника доказательства локальных предельных теорем [6]. По всей видимости, предлагаемый в настоящей работе метод ранее в данной области и для данных целей не использовался.

Рассмотрим случай, когда процесс (X_{nh}^h) , $n \geq 0$, имеет переходную плотность $p_{nh}^h(x, y)$ при заданном $X_0^h = x$ относительно меры Лебега; (X_t^0) , $t \geq 0$, обозначает процесс в случае непрерывного времени, т.е. решение уравнения (1). Условие локального перемешивания, которое мы собираемся проверить, имеет следующий вид.

Локальное условие Маркова–Добрушина. Для *некоторого* ограниченного борелевского множества B положительной меры Лебега

существуют значения $h_0 > 0$ и $T_0 > 0$ такие, что для любых $T \geq T_0$, $h \leq h_0$ и любого целого n такого, что $nh \leq T \leq (n+1)h$,

$$\inf_{x, x' \in B} \int_{\mathbf{R}^d} p_{nh}^h(x, y) \wedge p_{nh}^h(x', y) dy =: \rho > 0, \quad (4)$$

здесь и всюду ниже $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Константа ρ может зависеть от B , h_0 , T_0 и от класса процессов, определяемого всеми предположениями об уравнении и аппроксимациях. Название этого условия возникает из *глобального* предположения при $B = \mathbf{R}^d$, использованного в [3] в связи с предельными теоремами для *неоднородных* марковских процессов; в этом случае величина ρ известна как эргодический коэффициент Добрушина. Для *однородных* марковских цепей аналогичное условие было введено еще А. А. Марковым при доказательстве эргодической теоремы. В методе каплинга эта конструкция (в глобальном виде) была предложена Л. Н. Васерштейном [19].

Локальная версия условия (4) была использована в задачах перемешивания в [20] и в последующих работах того же автора по данной тематике. Здесь мы рассматриваем слегка измененную версию условия, которая более подходит к предложенному методу. При этом применение этой версии к исследованию скорости перемешивания совершенно аналогично в силу предположений, связанных с моментами.

Ниже мы устанавливаем справедливость условия (4) для произвольного шара B_R в качестве B . Это условие может и не быть выполненным автоматически для схемы (2), если дополнительно ничего не предполагать о плотности ξ_n и функции F . В работе [11] для проверки этого условия используется исчисление Маллявена. Естественно, что при этом требуется определенная регулярность как функции F , так и плотности q . Подход в настоящей работе отличается тем, что совсем не требует регулярности. Основные предположения состоят в том, что функция F ограничена, а плотность q строго положительна и отделена от нуля *на некотором открытом множестве*, а также обладает конечным третьим моментом и, например, ограничена. Такие условия определяют весьма широкий класс плотностей. В более сильном предположении, что процесс имеет *локально ограниченную и отделенную от нуля* переходную плотность, существует более простая техника, основанная на малых множествах («small sets») и локальной версии «условия С» Дуба [4, гл. 5.5], хотя эта техника может приводить к менее точным оценкам скорости сходимости. Представляется, что метод, который дает лучшие оценки при более слабых предположениях, предпочтителен. Отметим также, что предположения в данной работе существенно слабее, чем в [11], хотя потенциал используемого метода для случая переменного коэффициента диффузии пока неясен. По сравнению с известным условием Дёблина–Дуба из [4], наше условие (4) более подходит для установления

количественных границ скорости сходимости. Наконец, хотя оптимальность оценок данной работы не утверждается, тем не менее из работ [8] и [24] следует, что для широкого класса процессов эти оценки в определенном смысле почти оптимальны. Это позволяет, в частности, оставить в стороне дискуссию о том, как они соотносятся с *максимальным каплингом* (*maximal coupling*), который можно построить для некоторых классов процессов (см., например, работу [16]). Во всяком случае, авторам не известны никакие точные асимптотики, полученные с использованием такой техники, хотя они должны были бы быть наилучшими из всех возможных.

Рецензент настоятельно порекомендовал показать, как метод данной работы соотносится с известным методом каплинга, описанным, в частности, в [1] или [15]. Авторам не известны применения других вариантов метода каплинга к рассматриваемой задаче. В принципе, *если* построить «малое множество» (*small set*), по отношению к которому удастся доказать возвратность процесса и на котором все переходные меры эквивалентны и имеют равномерно ограниченные производные друг относительно друга, притом как возвратность, так и верхняя грань этих производных равномерно относительно шага дискретизации, то основной результат данной работы можно будет получить как следствие, возможно, с другими постоянными. Вопрос лишь в том, как установить искомые свойства без усиления предположений. В данной работе «малое множество» не предъявлено и используемый метод иной. В принципе, из комбинации метода Дуба из [4], локализации и свойств возвратности следует, что такое множество существует, правда, без указания, в какой момент времени. Метод Дуба опирается на факт существования производной меры в смысле Лебега, по-видимому, не допускающий какого-либо эффективного описания скорости сходимости к этой производной даже при условии равномерной эргодичности. Фактически, построение «малого множества» всегда основано на ограниченности производной, однако понятно, что не все производные непременно ограничены. Метод, используемый в данной работе, не предполагает такой ограниченности. Более того, метод Нуммелина часто называют обобщенной регенерацией, что правильно отражает его суть. Каплинг, используемый в данной работе, не является обобщенной регенерацией и, как уже говорилось выше, дает лучшие оценки по сравнению с последней, даже если бы таковая была возможна.

Видимо, о соотношении методов можно коротко сказать следующим образом. Метод обобщенной регенерации в идейном смысле проще, однако он требует некоего специального предположения — назовем его для простоты «локальной ограниченностью производной» — и, видимо, часто не может дать оптимальных оценок. Если ограниченность производной не предположена или не доказана, то требуется какой-то другой

метод. Именно такая ситуация имеет место в данной работе.

Для более наглядной демонстрации используемого подхода основные результаты сначала формулируются и доказываются для простейшего случая $\mathbf{R}^1$ и нормально распределенных величин (ξ_n) , а затем рассуждения повторяются в полном объеме для общего случая. При этом существенно используется техника доказательства локальных предельных теорем, основанная на преобразовании Фурье и равномерной версии теоремы Прохорова для плотностей, разработанная В. А. Статулявичусом, Р. Лапинскасом и Т. Шервашидзе. При этом оценки для гауссовского случая, конечно же, точнее.

Естественно, возникает аналогичный вопрос для стохастических дифференциальных уравнений с переменным коэффициентом диффузии в связи с идеей использования аппроксимаций в локальных теоремах по аналогии с [12]. Такая цель в настоящей работе не преследуется, потому что эта техника *в любом случае* потребовала бы *какой-то регулярности* от сноса, не говоря уже о диффузии, что существенным образом поменяло бы весь текст. Цель данной работы — исследование *наименее ограничительных условий на снос*, что кажется возможным лишь в случае постоянного коэффициента диффузии. Подчеркнем, что отсутствие условий регулярности не позволяет применить какие-либо подходы, основанные на регулярности, как например, исчисление Маллявена или метод параметрикса. В будущем авторы также планируют рассмотреть случай переменного коэффициента диффузии.

Работа организована следующим образом. Основные результаты сформулированы в п. 2 вместе с некоторыми следствиями, связанными со скоростью перемешивания и скоростью сходимости к инвариантному распределению. Следствия легко вытекают из комбинации теоремы 2 и вычислений и результатов работ [20], [22], [9]. Пункт 3 содержит вспомогательные леммы. Доказательства основных теорем и их следствий даны в пп. 4–6.

Авторы благодарны Т. Шервашидзе за консультацию относительно экспоненциальных оценок в локальных предельных теоремах.

2. Основные результаты и их приложения.

Предположения.

(A1) Функция F ограничена:

$$|F| \leq C_1. \quad (5)$$

(A2) Существует такое открытое непустое множество U , что плотность q удовлетворяет условию

$$\inf_{x \in U} q(x) \geq C_2 > 0. \quad (6)$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем предполагать, что U является шаром, $U = B_{r_0}(x_0) \equiv \{x: |x - x_0| < r_0\}$, с некоторыми заданными $r_0 > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^d$.

(A3) Случайные величины (ξ_n) , $n \geq 1$, независимы и одинаково распределены, $\mathbf{E} \xi_1 = 0$, симметрическая матрица ковариаций $\text{Cov}(\xi_1) = V$ положительно определена и

$$\mathbf{E} |\xi_1|^3 \leq C_3 < \infty. \quad (7)$$

(A4) Существует целое n_1 такое, что плотность q_{n_1} нормированных сумм $n_1^{-1/2} \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k$ ограничена:

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} q_{n_1}(x) \leq C_4 < \infty. \quad (8)$$

Предположение (A1) потребуется в теоремах 1 и 2, предположения (A2)–(A4) — только в теореме 2, поскольку в теореме 1 используется гауссовское распределение. Простое достаточное условие для выполнения (A4) — это ограниченность плотности q . Некоторые утверждения, эквивалентные (A4), приводятся в [2, теорема 19.1]. По-видимому, требование ограниченности F можно ослабить, однако данный вопрос в настоящей работе не рассматривается.

Основные результаты. Сформулируем результаты, относящиеся к решениям разностных уравнений (2) и локальному условию Маркова–Добрушина.

Теорема 1. Пусть $d = 1$, (X_{nh}^h) удовлетворяет (2), $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и выполнено предположение (A1). Тогда для каждого достаточно малого $K > 0$ существует $c_0 = c_0(K, C_1) > 0$ такое, что для всех $0 < nh \leq K$ и любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^1$

$$\int_{\mathbf{R}^1} p_{nh}^h(x_1, y) \wedge p_{nh}^h(x_2, y) dy \geq c_0 \left(1 - 2\Phi_0 \left(\frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{nh}} \right) \right), \quad (9)$$

где $\Phi_0(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$. В частности, для любого ограниченного борелевского множества $B \subset \mathbf{R}^1$

$$\inf_{x_1, x_2 \in B} \int_{\mathbf{R}^1} p_{nh}^h(x_1, y) \wedge p_{nh}^h(x_2, y) dy \geq c_0 \left(1 - 2\Phi_0 \left(\frac{\text{diam } B}{\sqrt{nh}} \right) \right). \quad (10)$$

Нижняя граница в (10) предполагает интересную возможность оптимизации оценок скорости сходимости и скорости перемешивания путем подбора множества B , рассматриваемого как аналог малого множества в таком множестве, где происходит перемешивание, в то время как вне этого множества мы можем лишь ждать, пока процесс снова

достигнет B . Это стандартная идея при установлении оценок перемешивания. Например, если множество B увеличивается, то скорость перемешивания в нем падает, в то время как свойства возвратности могут улучшиться, и наоборот. Более того, это же неравенство показывает, что (в некоторых моделях) перемешивание может происходить и во всем фазовом пространстве, но с разными скоростями в разных его частях. Этот факт также может быть использован для оптимизации оценок, но в настоящей работе данный вопрос не затрагивается.

Теорема 2. Пусть (X_{nh}^h) удовлетворяет (2), выполнены предположения (A1)–(A4) и $K_1 \leq nh \leq K_2$ с некоторыми константами $0 < K_1 < K_2 < \infty$. Тогда если K_2 достаточно мало, то существуют $c_1, c_2, c_3, n_2 > 0$ такие, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^d$

$$\int_{\mathbf{R}^d} p_{nh}^h(x_1, y) \wedge p_{nh}^h(x_2, y) dy \geq c_1(1 - c_2(|x_1 - x_2| + |x_1 - x_2|^2) - c_3 n^{-1/3}) \quad (11)$$

при условии, что $n \geq n_2$. Константы c_1, c_2, c_3 и n_2 зависят только от C_1, C_2, C_3, C_4, n_1 , множества U из предположений (A1)–(A4) и значений K_1 и K_2 .

Следствие 1. Пусть выполнены предположения теоремы 2. Тогда, если значение h_0 в локальном условии Маркова–Добрушина (4) достаточно мало, то это условие выполняется для каждого $T > 0$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что в отсутствие условий, обеспечивающих равномерную возвратность процессов, ничего не утверждается о равномерности неравенства в (4) относительно всех T или, например, $T \geq C$ при любом $C > 0$. Последнее может быть доказано при равномерной возвратности и некоторых дополнительных условиях.

Приложения. Первое непосредственное приложение относится к оценкам скорости перемешивания при дополнительных предположениях о возвратности и моментных ограничениях (см. предложение 1 ниже). Подчеркнем, что главным результатом все же является теорема 2 о локальном условии Маркова–Добрушина. Также обратим внимание на то, что предположения, используемые ниже для проверки условия (4), можно рассматривать как полностью независимые от ограничений, налагаемых для обеспечения возвратности. Возможны дальнейшие приложения к предельным теоремам (см., например, [6]). Теорема 3 также может быть полезна в задачах фильтрации, например, вида изучаемых в работе [7].

Напомним определение коэффициента β -перемешивания для процесса X_t с непрерывным временем:

$$\beta_{t,x} = \sup_{s \geq 0} \mathbf{E}_x \varlimsup_{A \in \mathcal{F}_{\geq t+s}^X} \left(\mathbf{P}_x(A \mid \mathcal{F}_{\leq s}^X) - \mathbf{P}_x(A) \right),$$

где $\mathcal{F}_I^X = \sigma\{X_s: s \in I\}$, $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ — вероятность и математическое ожидание при условии начальных данных x и var — расстояние по вариации. То же самое определение можно применить к дискретной версии X^h ; в этом случае используется обозначение $\beta_{t,x}^h$, $t = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При этом полагаем $\beta_{t,x} \equiv \beta_{t,x}^0$.

Для удобства сравнения мы напомним некоторые оценки сходимости и перемешивания, установленные в наших предыдущих работах. Цель настоящей работы дать аналогичные оценки, равномерные по h . В следующем предложении обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ используется для стандартного скалярного произведения в $\mathbf{R}^d$. Значение $h > 0$ в предложении 1 фиксировано в отличие от всех предыдущих и последующих результатов.

Предложение 1 (см. [5], [9], [22]). *Предположим, что (дискретное) условие (4) выполнено, и существуют $p \in [0, 1]$ и $r > 0$ такие, что для всех достаточно больших x*

$$\left\langle F(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle \leq -\frac{r}{|x|^p}.$$

Для любого $h > 0$ в каждом из трех случаев, описанных в следующих ниже утверждениях 1)–3), распределения $\mu_{nh,x}^h = \mathcal{L}(X_{nh}^h | X_0^h = x)$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к единственной инвариантной мере μ_{inv}^h в топологии расстояния по вариации.

Справедливы следующие утверждения.

1) *Если $p = 0$ и $\mathbf{E} \exp\{\varepsilon |\xi_1|\} < \infty$ с некоторым $\varepsilon > 0$, то для каждого $h \geq 0$ существуют $c_0, c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$\text{var}(\mu_{nh,x}^h - \mu_{\text{inv}}^h) + \beta_{nh,x}^h \leq c_0 \exp\{c_1|x| - c_2nh\},$$

и, более того, для каждого достаточно малого $c_1 > 0$ существуют $c_0, c_2 > 0$ такие, что выполнено последнее неравенство.

2) *Если $0 < p < 1$ и $\mathbf{E} \exp\{\kappa |\xi_1|^\alpha\} < \infty$ с некоторыми $\alpha \geq 1-p$ и $0 < \kappa < K$, $K > 0$, то для любого достаточно малого $c_1 > 0$ существуют $c_0, c_2 > 0$ такие, что*

$$\text{var}(\mu_{nh,x}^h - \mu_{\text{inv}}^h) + \beta_{nh,x}^h \leq c_0 \exp\{c_1|x|^{1-p} - c_2(nh)t^{(1-p)/(1+p)}\}.$$

3) *Если $p = 1$, $\mathbf{E}|\xi_1|^m < \infty$ с некоторым $m > 4$ и $r \geq r_m := (m-1)\mathbf{E}|\xi_1|^2/2$, то существует $c_0 > 0$ такое, что для любого $1 < k < m/2$*

$$\text{var}(\mu_{nh,x}^h - \mu_{\text{inv}}^h) + \beta_{nh,x}^h \leq c_0(1 + |x|^m)(1 + nh)^{-k}.$$

Напомним, что аналогичное утверждение выполнено для «предельного» ($h = 0$) процесса с непрерывным временем [20], [22], [9]. Подчеркнем, что, вообще говоря, все константы в приведенных выше неравенствах предложения 1 могут зависеть от h , в то время как основная цель данной работы — получение неравенств без такой зависимости.

Для следующего приложения нам понадобятся некоторые оценки, касающиеся возвратности, которые *равномерны* относительно всех достаточно малых h . Положим $X_t^h = X_{[t/h]h}$ и

$$\tau_R := \inf\{t \geq 0: |X_t^h| \leq R\}.$$

Лемма 1. Пусть

$$\langle F(x), x \rangle \leq -r|x|^{1-p}, \quad |x| > R_0, \quad (12)$$

с некоторым $p \in [0, 1]$. Тогда выполнены следующие три утверждения.

1°. Если $p = 0$ и $\mathbf{E} \exp\{\kappa|\xi_1|\} < \infty$ с некоторым $0 < \kappa < K$, то существуют $h_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$\sup_{h \leq h_0} \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}_x \exp\{\kappa|X_t^h|\} \leq C \exp\{\kappa|x|\} < \infty$$

и для всех достаточно больших R и всех достаточно малых $\alpha > 0$

$$\sup_{h \leq h_0} \mathbf{E}_x \exp\{\alpha\tau_R\} \leq C \exp\{\kappa|x|\}.$$

2°. Если $0 < p < 1$ и найдутся $0 < \alpha \leq 1 - p$ и $K > 0$ такие, что $\mathbf{E} \exp\{\kappa|\xi_1|^\alpha\} < \infty$ при любом $0 < \kappa < K$, то существуют $h_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$\sup_{h \leq h_0} \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}_x \exp\{\kappa|X_t^h|^\alpha\} I(t \leq \tau_R) \leq C \exp\{\kappa|x|^\alpha\}$$

и для всех достаточно больших R и каждого $0 < \delta < \alpha/(1 + p)$

$$\sup_{h \leq h_0} \mathbf{E}_x \exp\{\tau_R^\delta\} \leq C \exp\{\kappa|x|^\alpha\}.$$

3°. Если $p = 1$, $\mathbf{E}|\xi_1|^m < \infty$, $m > 4$, и $r > (m - 1)\mathbf{E}|\xi_1|^2/2$, то существуют такие $C > 0$ и $h_0 > 0$, что для достаточно больших R

$$\sup_{h \leq h_0} \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}_x |X_t^h|^m I(t \leq \tau_R) \leq C(1 + |x|^m)$$

и

$$\sup_{h \leq h_0} \mathbf{E}_x \tau_R^{k+1} \leq C(1 + |x|^m) \quad \text{при любом } k < m/2.$$

Условие, содержащее неравенство $0 < \kappa < K$ с некоторым $K > 0$, взято из [11]. Оно, хотя и выглядит несколько необычно, весьма удобно в доказательствах. Лемма 1 есть комбинация вспомогательных результатов из [11] и [22] и наблюдения, что эти вспомогательные результаты (см. [11, леммы 3, 5, 7] и [22, теорема 3, лемма 1]) равномерны по $h \leq h_0$. Заметим, что для проверки локального условия Маркова–Добрушина в

работе [11] вводились некоторые ограничения на гладкость коэффициентов. В то же время ограничения из леммы 1 не требуют никакой гладкости. Несколько ослабленное условие с индикатором $I(t \leq \tau)$ также достаточно для установления скорости сходимости, как это показано в [22], и его легче проверить, чем более сильное условие без этого индикатора.

Теперь объединим результаты теоремы 2 и леммы 1, чтобы получить оценки скорости перемешивания и скорости сходимости для аппроксимирующей схемы (2), равномерные относительно малых $h > 0$.

Теорема 3. Пусть семейство процессов (X_{nh}^h) удовлетворяет уравнению (2) и предположениям (A1)–(A4), и пусть существуют $R_0 > 0$, $0 \leq p \leq 1$ и $r > 0$ такие, что выполнено неравенство (12). Тогда при соответствующих дополнительных предположениях в каждом из случаев 1)–3) ниже справедливы утверждения:

- (а) для семейства процессов (X_{nh}^h) выполняется локальное условие Маркова–Добрушина (4) с некоторым $h_0 > 0$,
- (б) для каждого $0 < h \leq h_0$ с достаточно малым h_0 существует единственная инвариантная мера $\mu = \mu_{\text{inv}}^h$; эти меры могут быть различными для разных значений h , но все константы и функции в оценках скорости сходимости и скорости перемешивания могут быть выбраны равномерно по $h \leq h_0$,
- (с) для каждого $0 < h \leq h_0$ условные распределения $\mu_{nh,x}^h = \mathcal{L}(X_{nh}^h | X_0^h = x)$ сходятся к инвариантной мере μ_{inv}^h с некоторой скоростью, и β -перемешивание выполняется с той же самой скоростью.

1) Если $p = 0$ и $\mathbf{E} \exp\{\kappa |\xi_1|\} < \infty$ с некоторым $0 < \kappa < K$, то

$$\text{var}(\mu_{nh,x} - \mu) + \beta_{nh,x} \leq C(x) \exp\{-cnh\}$$

с некоторым $c > 0$ и $C(x) = C \exp\{\varepsilon|x|\}$, $\varepsilon > 0$.

2) Если $0 < p < 1$ и $\mathbf{E} \exp\{\kappa |\xi_1|^\alpha\} < \infty$ выполнено с некоторыми $0 < \alpha \leq 1 - p$ и $0 < \kappa < K$, то

$$\text{var}(\mu_{nh,x} - \mu) + \beta_{nh,x} \leq C(x) \exp\{-c(nh)^\delta\}$$

с любым $0 < \delta < \alpha/(1+p)$ и некоторой константой $c > 0$, где $C(x) = C \exp\{\varepsilon|x|^{1-p}\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

3) Если $p = 1$ и $\mathbf{E}|\xi_1|^m < \infty$, $m > 4$, и $r > (m-1)\mathbf{E}|\xi_1|^2/2$, то для каждого $k < m/2$ существует $C > 0$ такое, что

$$\text{var}(\mu_{nh,x} - \mu) + \beta_{nh,x} \leq C(1 + |x|^m)(1 + nh)^{-k}.$$

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что условие (4), доказанное в следствии 1, включает в себя интегрирование по всему пространству $\mathbf{R}^d$, в то время как в предыдущих работах [9], [20], [22] в соответствующем условии фигурирует интеграл по множеству B :

$$\inf_{0 < h \leq h_0} \inf_{x, x' \in B} \int_B p_{nh}^h(x, y) \wedge p_{nh}^h(x', y) dy > 0.$$

Это различие не влияет на доказательства предложения 1 и теоремы 3 в силу предположения о моментах. В самом деле, во всех указанных работах допускается замена области интегрирования B на другое ограниченное множество B' , т.е.

$$\inf_{0 < h \leq h_0} \inf_{x, x' \in B'} \int_{B'} p_{nh}^h(x, y) \wedge p_{nh}^h(x', y) dy > 0.$$

В случае, когда $B = B_R \equiv \{x: |x| \leq R\}$, последнее неравенство с $B' = B_{R'}$ и подходящим образом выбранным $R' < \infty$ вытекает из (4) в силу предположений (A1) и (A3). В результате, можно сказать, что выбор области интегрирования в локальном условии Маркова–Добрушина определяется исключительно удобством выкладок.

3. Вспомогательные леммы. Пусть $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ — две произвольные вероятностные плотности. Утверждения теорем 1 и 2 касаются оценок снизу интегралов вида $\int_{\mathbf{R}^d} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy$, а также «дискретных» аналогов этого «интегрального» выражения. Пусть $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ — две вероятностные меры и (A_j) — произвольное конечное или счетное семейство попарно непересекающихся множеств: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. «Дискретный» аналог определяется как $\sum_j P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j)$. В леммах 2 и 3 установлены нижние оценки «интегрального» значения через «дискретное» и наоборот.

Лемма 2. Пусть $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ и Q — три вероятностные меры, $q(x)$ — плотность Q . Тогда свертки $P^{(1)} * Q$ и $P^{(2)} * Q$ имеют плотности $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ и для каждого конечного или счетного семейства (A_j) попарно непересекающихся множеств выполнено неравенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \geq \sum_j \left(P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) \right) \int_{\mathbf{R}^d} \inf_{x \in A_j} q(y - x) dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$p^{(i)}(y) = \int_{\mathbf{R}^d} q(y - x) P^{(i)}(dx)$$

и

$$\int_{A_j} q(y - x) P^{(i)}(dx) \geq P^{(i)}(A_j) \inf_{x \in A_j} q(y - x),$$

то

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{R}^d} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \\
& \geq \int_{\mathbf{R}^d} \left[\sum_j P^{(1)}(A_j) \inf_{x \in A_j} q(y-x) \right] \wedge \left[\sum_j P^{(2)}(A_j) \inf_{x \in A_j} q(y-x) \right] dy \\
& \geq \int_{\mathbf{R}^d} \sum_j \left(P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) \right) \inf_{x \in A_j} q(y-x) dy \\
& = \sum_j \left(P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) \right) \int_{\mathbf{R}^d} \inf_{x \in A_j} q(y-x) dy.
\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$ — пара d -мерных случайных величин с плотностями $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ — пара d -мерных ограниченных случайных величин: $\mathbf{P}(|Y^{(i)}| < m/2) = 1$ для некоторого $m > 0$ и $i = 1, 2$. Пусть $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ обозначают распределения $Z^{(1)} + Y^{(1)}$ и $Z^{(2)} + Y^{(2)}$ соответственно. Тогда для каждого натурального k существует такое счетное семейство (A_j) попарно непересекающихся множеств с диаметрами, не превосходящими $kt\sqrt{d}$, что

$$\sum_j P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^d \int_{\mathbf{R}^d} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy.$$

Доказательство. Сначала докажем лемму для случая $d = 1$, в котором выкладки проще и ясно видна идея доказательства. Рассмотрим открытые интервалы $I_i = \{x \in \mathbf{R}: im < x < (i+1)m\}$, $i \in \mathbf{Z}$, и определим k множеств

$$B_l = \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} I_{jk+l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, k-1\},$$

как показано на рис. 1, где $k = 3$. Эти множества попарно не пересекаются и покрывают $\mathbf{R}$ с точностью до множества нулевой меры Лебега, поэтому

$$\int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{B_l} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy.$$

Найдем индекс l^* , для которого

$$\int_{B_{l^*}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy.$$

Множество $\mathbf{R} \setminus B_{l^*}$ — это счетное объединение отрезков

$$C_j = \{x \in \mathbf{R}: (jk + l^* + 1)m \leq x \leq ((j+1)k + l^*)m\}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Рис. 1

На рис. 1 $l^* = 1$. Рассмотрим множества A_j , полученные путем «расширения» множеств C_j :

$$A_j = \left\{ x \in \mathbf{R}: -\frac{m}{2} + (jk + l^* + 1)m < x < ((j+1)k + l^*)m + \frac{m}{2} \right\}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Поскольку $|Y^{(1)}| < m/2$ и $|Y^{(2)}| < m/2$ почти наверное, то $\{Z^{(i)} \in C_j\} \subset \{Z^{(i)} + Y^{(i)} \in A_j\}$ и

$$P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) \geq \int_{C_j} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_j P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) &\geq \int_{\mathbf{R} \setminus B_{l^*}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $d > 1$. Начнем с открытых множеств

$$I_i^1 = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d: im < x_1 < (i+1)m\}, \quad i \in \mathbf{Z},$$

определим $B_l^1 = \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} I_{jk+l}^1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, и зафиксируем такой индекс l_1^* , что

$$\int_{\mathbf{R}^d \setminus B_{l_1^*}^1} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \int p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy.$$

Рассмотрим множества

$$I_i^2 = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d \setminus B_{l_1^*}^1: im < x_2 < (i+1)m\}, \quad i \in \mathbf{Z},$$

определим $B_l^2 = \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} I_{jk+l}^2$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, и зафиксируем такой индекс l_2^* , что

$$\int_{\mathbf{R}^d \setminus B_{l_1^*}^1 \setminus B_{l_2^*}^2} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \int p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy.$$

Повторяя эту процедуру $d - 2$ раза, получим счетное объединение d -мерных кубов

$$C_{j_1, \dots, j_d} = \left\{ x \in \mathbf{R}^d: (j_1 k + l_1^*)m \leq x_1 \leq ((j_1 + 1)k + l_1^*)m, \right. \\ \dots \dots \dots \left. (j_d k + l_d^*)m \leq x_d \leq ((j_d + 1)k + l_d^*)m \right\},$$

$j_1, \dots, j_d \in \mathbf{Z}$. Множества $A_{j_1, \dots, j_d}$ конструируются с помощью «расширения» каждого куба $C_{j_1, \dots, j_d}$ так же, как это делалось для $d = 1$; окончание доказательства также следует рассуждениям одномерного случая. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $q(x) = \sigma^{-1}(2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2/(2\sigma^2)\}$ и множество A имеет диаметр $\text{diam } A \leq 2a$, тогда

$$\int_{\mathbf{R}} \inf_{x \in A} q(y - x) dy \geq 1 - 2\Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right) \geq 1 - \frac{a}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (13)$$

где $\Phi_0(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1/2} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \inf_{x \in A} q(y - x) dy &\geq \int_{\mathbf{R}} \inf_{|x| \leq a} q(y - x) dy = 2 \int_0^\infty q(y + a) dy \\ &= 2 \int_a^\infty q(y) dy = 1 - 2\Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Второе неравенство в (13) вытекает из оценки $\Phi_0(x) \leq |x|/\sqrt{2\pi}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть (ξ_n) удовлетворяет условиям (A3), (A4) и нормированные суммы $s_n = n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k$ имеют плотности q_n и характеристические функции f_n . Тогда существуют такие положительные константы c_1, c_2 и целое n_0 , что

$$\int_{\mathbf{R}^d} \inf_{|x| \leq a} q_n(y - x) dy \geq 1 - c_1 \left(a + \frac{a^2}{2}\right) - c_2 n^{-1/3}, \quad n > n_0. \quad (14)$$

Доказательство. Везде в доказательстве символ c используется для обозначения положительной константы, которая не зависит ни от n , ни от a и может меняться от одной формулы к другой.

В силу условия (A4) плотность q_n ограничена при $n \geq n_1$, характеристическая функция f_n принадлежит $L^1(\mathbf{R}^d)$ при $n \geq 2n_1$ и справедлива формула обращения

$$q_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} f_n(t) e^{-i\langle t, x \rangle} dt, \quad n \geq 2n_1,$$

см. [2, теорема 19.1]. До окончания доказательства считаем, что $n \geq 2n_1$.

Пусть $\varphi(x)$ — плотность, а $g(t)$ — характеристическая функция нормального распределения с нулевым средним и матрицей ковариаций $\text{Cov}(\xi_1) = V$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det V)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle x, V^{-1}x \rangle \right\}, \\ g(t) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle t, Vt \rangle \right\}.\end{aligned}$$

Для каждого $N > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} \inf_{|x| \leq a} q_n(y-x) dy &\geq \int_{|y| \leq N} \inf_{|x| \leq a} q_n(y-x) dy \\ &\geq \int_{|y| \leq N} \inf_{|x| \leq a} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\langle t, y-x \rangle} (f_n(t) - g(t)) dt \right\} dy \\ &\quad + \int_{|y| \leq N} \inf_{|x| \leq a} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\langle t, y-x \rangle} g(t) dt \right\} dy \\ &\geq - \int_{|y| \leq N} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} |f_n(t) - g(t)| dt \right\} dy \\ &\quad + \int_{|y| \leq N} \inf_{|x| \leq a} \varphi(y-x) dy \\ &\geq -cN^d \int_{\mathbf{R}^d} |f_n(t) - g(t)| dt + \int_{|y| \leq N} \inf_{|x| \leq a} \varphi(y-x) dy. \quad (15)\end{aligned}$$

Для оценки первого члена в правой части (15) применим стандартный подход, используемый при доказательстве локальных предельных теорем [6], [2]. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим следующие четыре интеграла:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{|t| \leq n^{1/6}} |f_n(t) - g(t)| dt, \quad I_2 = \int_{n^{1/6} < |t| \leq \varepsilon\sqrt{n}} |f_n(t)| dt, \\ I_3 &= \int_{|t| > \varepsilon\sqrt{n}} |f_n(t)| dt, \quad I_4 = \int_{|t| > n^{1/6}} |g(t)| dt.\end{aligned}$$

Разложение Тейлора для функции $f_1(t/\sqrt{n})$ в окрестности $|t|/\sqrt{n} \leq \varepsilon$ дает:

$$\begin{aligned}f_n(t) &= f_1^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{\langle t, Vt \rangle}{2n} + O\left(\frac{|t|^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \\ &= \exp \left\{ -\frac{\langle t, Vt \rangle}{2} + O\left(\frac{|t|^3}{n^{1/2}}\right) \right\} \\ &= g(t) \exp \left\{ O\left(\frac{|t|^3}{n^{1/2}}\right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Если $|z| \leq M < \infty$, то $|e^z - 1| \leq c|z|$ с некоторым $0 < c < \infty$. Поэтому для $|t|^3 \leq n^{1/2}$ имеем оценку

$$I_1 \leq \int_{|t| \leq n^{1/6}} g(t) \frac{c|t|^3}{n^{1/2}} dt \leq \frac{c}{n^{1/2}} \int_{\mathbf{R}^d} |t|^3 g(t) dt \leq \frac{c}{n^{1/2}}. \quad (16)$$

Для $n^{1/6} < |t| \leq \varepsilon\sqrt{n}$ получаем:

$$|f_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{\langle t, Vt \rangle + \varepsilon O(|t|^2)}{2} \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\langle t, Vt \rangle}{4} \right\},$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Здесь и далее используем элементарное неравенство: для всяких $k > 0$ и $z_0 > 0$ существует такое $K > 0$, что для всех $z \geq z_0$

$$\int_{|t| \geq z} \exp\{-k|t|^2\} dt \leq \exp\{-Kz^2\}. \quad (17)$$

Следовательно, из (17) получаем, что

$$I_2 \leq \int_{|t| > n^{1/6}} \exp \left\{ -\frac{\langle t, Vt \rangle}{4} \right\} dt \leq \exp\{-cn^{1/3}\}. \quad (18)$$

Случайные величины (ξ_n) имеют плотности, следовательно,

$$\sup_{|t| \geq \varepsilon} |f_1(t)| < 1, \quad (19)$$

и

$$I_3 = n^{d/2} \int_{|t| \geq \varepsilon} |f_1(t)|^n dt \leq n^{d/2} \sup_{|t| \geq \varepsilon} |f_1(t)|^{n-2n_1} \int_{\mathbf{R}^d} |f_1(t)|^{2n_1} dt \leq ce^{-cn}.$$

Однако здесь правая часть может зависеть от распределения ξ_n , поскольку неравенство (19) зависит от него, в то время как наша цель состоит в доказательстве оценки, равномерной по всему классу распределений, описанных предположениями теоремы. Поэтому будут использованы улучшенные экспоненциальные оценки Р. Лапинскаса [14] и Т. Шервашидзе [17], которые, в свою очередь, обобщают одномерную оценку В. А. Статулявичуса [18] и которые свободны от указанной зависимости от распределения ξ_n . Для удобства читателя сформулируем здесь эти неравенства из [14], [17] для характеристической функции $f_1^{n_1}(t)$, $t \in \mathbf{R}^d$, где значение n_1 выбрано так, чтобы плотность q_{n_1} была ограничена константой C_4 . Используем обозначения $s := \mathbf{E}|\sum_{k=1}^{n_1} \xi_k|^2$, $A := n_1^{-d/2} C_4$, тогда плотность $\sum_{k=1}^{n_1} \xi_k$ ограничена числом A . Тогда неравенство из [14] приобретет вид

$$|f_1^{n_1}(t)| \leq 1 - \frac{|t|^2}{96} \left[(4d)^{d-1} s^{2(d-1)} \left(\sqrt{d}s|t| + \pi \right)^2 A^2 \right]^{-1}, \quad (20)$$

в то время как неравенство (1.2) из [17] запишется как

$$|f_1^{n_1}(t)| \leq 1 - |t|^2 \left[24 \cdot 2^{2d} V_{d-1}^2 A^2 (2s|t| + \pi)^2 s^{2(d-1)} \right]^{-1}, \quad (21)$$

где $V_{d-1} := \pi^{(d-1)/2} \Gamma(1 + (d-1)/2)$. Как замечено в [17], дополнительное предположение о невырожденности матрицы ковариаций в [14] может быть опущено, поскольку оно выполнено автоматически.

В любом случае из (21) или из (20) получаем

$$\sup_{|t| \geq \varepsilon} |f_1^{n_1}(t)| < 1, \quad (22)$$

где верхняя грань зависит только от s и C_4 .

Из условия (A4) и теоремы Планшереля имеем:

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f_{n_1}(t)|^2 dt = (2\pi)^d \int_{\mathbf{R}^d} |q_{n_1}(x)|^2 dx \leq (2\pi)^d C_4. \quad (23)$$

Из (22) и (23) при $n \geq 3n_1$ получаем оценку

$$\begin{aligned} I_3 &\leq n^{d/2} \int_{|t| > \varepsilon} |f_1^{n_1}(t)|^{[n/n_1]-2} |f_1^{2n_1}(t)| dt \\ &\leq \left(\sup_{|t| > \varepsilon} |f_1^{n_1}(t)| \right)^{[n/n_1]-2} \int_{|t| > \varepsilon} |f_{n_1}(t)|^2 dt \leq (2\pi)^d C_4 e^{-cn}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть.

Интеграл I_4 оценивается тем же способом, что и I_2 (см. (18)):

$$I_4 \leq \exp\{-cn^{1/3}\}. \quad (25)$$

Неравенства (16), (18)–(25) приводят к оценке

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f_n(t) - g(t)| dt \leq \frac{c}{n^{1/2}}. \quad (26)$$

Оценим последний член в правой части (15). Для гауссовского распределения с нулевым средним выполнено неравенство

$$\inf_{|x| \leq a} \varphi(y - x) \geq \varphi(y) e^{-ca|y| - ca^2/2}.$$

Используя неравенство $e^{-z} - 1 \geq -z$, $z \in \mathbf{R}$, и неравенство (17), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{|y| \leq N} \inf_{|x| \leq a} \varphi(y - x) dy &\geq \int_{|y| \leq N} \varphi(y) e^{-ca|y| - ca^2/2} dy \\ &= 1 - \int_{|y| > N} \varphi(y) dy + \int_{|y| \leq N} \varphi(y) (e^{-ca|y| - ca^2/2} - 1) dy \\ &\geq 1 - \exp\{-cN^2\} - ca \int_{\mathbf{R}^d} \left(|y| + \frac{a}{2} \right) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Эта оценка вместе с (26) и (15) показывает, что

$$\int \inf_{|x| \leq a} q_n(y-x) dy \geq 1 - c_1 \left(a + \frac{a^2}{2} \right) - \exp\{-cN^2\} - cN^d n^{-1/2}.$$

Взяв $\varepsilon > 0$ достаточно малым и $N = \varepsilon \sqrt{\ln n}$, приходим к (14) с некоторой константой c_2 . Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $b \geq 2$ и $n > b + 1$ — два натуральных числа. Положим

$$r = \max \left\{ k \in \mathbf{Z}: \frac{b^k - 1}{b - 1} \leq n \right\}, \quad k_j = 1 + \left[\left(\frac{5}{4} \right)^j \right], \quad j = 1, \dots, r,$$

$$z_j = b^{r-j}, \quad j = 2, \dots, r, \quad z_1 = n - z_2 - \dots - z_r.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^r z_j = n, \quad \sum_{j=1}^{r-1} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} \leq c' \sqrt{n}, \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{k_j^2 z_j^2}{z_{j+1}} \leq c'' n, \quad \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{k_j} \leq 4 \quad (28)$$

с некоторыми положительными константами c' и c'' , зависящими только от b .

Доказательство. Так как

$$\sum_{j=2}^r b^{r-j} = 1 + b + \dots + b^{r-2} = \frac{b^{r-1} - 1}{b - 1} < n,$$

то первое соотношение (27) вытекает непосредственно из определений r и z_1 . Второе неравенство в (28) выполнено в силу оценки

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{k_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^j = 4.$$

Если $j \geq 2$, то

$$\frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} \leq \frac{2(5/4)^j b^{r-j}}{b^{(r-j-1)/2}} = 2\sqrt{b} b^{r/2} \left(\frac{5}{4\sqrt{b}} \right)^j. \quad (29)$$

Если $j = 1$, то

$$\frac{k_1 z_1}{\sqrt{z_2}} \leq \frac{2n}{\sqrt{b^{r-2}}} = \frac{2bn}{b^{r/2}}. \quad (30)$$

По определению r

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \leq b^{r/2} \leq \sqrt{bn}, \quad (31)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} &\leq \frac{2bn}{\sqrt{n/2}} + 2\sqrt{b} \cdot \sqrt{bn} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{5}{4\sqrt{b}} \right)^j \\ &= \left(2\sqrt{2}b + \frac{25\sqrt{b}}{8\sqrt{b}-10} \right) \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Второе неравенство в (27) доказано. Аналогично, оценка

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{k_j^2 z_j^2}{z_{j+1}} \leq 8b^2 n + 4b^2 n \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{25}{16b} \right)^j = \left(8b^2 + \frac{2500b}{256b-400} \right) n$$

доказывает первое неравенство в (28). Лемма 6 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Идея доказательства основана на следующем простом наблюдении: один член $\xi_n \sqrt{h}$ в (2) более влиятелен, чем несколько членов вида $F(X_{nh}^h)h$, когда значение h достаточно мало, поскольку имеется различие в масштабах ($h = o(\sqrt{h})$ при $h \rightarrow 0$). Суммы $\xi_{k+1}\sqrt{h} + \dots + \xi_{k+l}\sqrt{h}$ имеют гауссовские плотности, которые легко вычислить. Добавление членов сноса $F(X_{(k+1)h}^h)h + \dots + F(X_{(k+l)h}^h)h$ существенно не изменяет это распределение.

Пусть $b = 2$ и $n > 3$ произвольно. По формулам из леммы 6 зададим целые числа $k_1, \dots, k_r$ и $z_1, \dots, z_r$. Рассмотрим $r-1$ случайную величину

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=0}^{z_1} F(X_{ih}^h)h, \\ U_2 &= \sum_{i=z_1+1}^{z_1+z_2} F(X_{ih}^h)h, \\ &\dots\dots\dots \\ U_{r-1} &= \sum_{i=z_1+\dots+z_{r-2}+1}^{z_1+\dots+z_{r-1}} F(X_{ih}^h)h \end{aligned}$$

и r случайных величин

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{i=1}^{z_1} \xi_i \sqrt{h}, \\ V_2 &= \sum_{i=z_1+1}^{z_1+z_2} \xi_i \sqrt{h}, \\ &\dots\dots\dots \\ V_r &= \sum_{i=z_1+\dots+z_{r-1}+1}^{z_1+\dots+z_r} \xi_i \sqrt{h} = \xi_n \sqrt{h}. \end{aligned}$$

Из (2) следует, что

$$X_{nh}^h = x + V_1 + U_1 + V_2 + U_2 + \dots + V_{r-1} + U_{r-1} + V_r,$$

где, по предположению (A1), $|U_j| \leq C_1(z_j + 1)h < 2C_1z_jh$ почти наверное и $V_j \sim \mathcal{N}(0, z_jh)$.

В лемме 2 возьмем $P^{(1)} = \delta_x$, $P^{(2)} = \delta_{x'}$ (где δ_x означает распределение с единичной массой, сконцентрированной в точке x), A_1 — отрезок с концами x и x' , и пусть Q — распределение V_1 с гауссовской плотностью q . В силу леммы 4 с $2a = |x - x'|$ и $\sigma^2 = z_1h$ получаем оценку

$$\int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \geq \int_{\mathbf{R}} \inf_{x \in A_1} q(y - x) dy \geq 1 - 2\Phi_0\left(\frac{|x - x'|}{2\sqrt{z_1h}}\right),$$

где $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ — плотности $x + V_1$ и $x' + V_1$.

В лемме 3 положим $Z^{(1)} = x + V_1$, $Z^{(2)} = x' + V_1$, $Y^{(1)} = Y^{(2)} = U_1$, $m/2 = 2C_1z_1h$ и $k = k_1$. Построим семейство (A_j) таких множеств с диаметрами, не превышающими k_1m , что

$$\begin{aligned} \sum_j P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) &\geq \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) \int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) \left(1 - 2\Phi_0\left(\frac{|x - x'|}{2\sqrt{z_1h}}\right)\right), \end{aligned} \quad (32)$$

где $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ обозначают распределения $x + V_1 + U_1$ и $x' + V_1 + U_1$.

Применим лемму 2 с этими $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, семейством (A_j) попарно непесекающихся множеств и Q и q , обозначающими распределение и плотность V_2 . Используя (32) и лемму 4, где $2a = k_1m = 4C_1hk_1z_1$ и $\sigma^2 = z_2h$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy &\geq \sum_j \left(P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j)\right) \int_{\mathbf{R}} \inf_{x \in A_j} q(y - x) dy \\ &\geq \left(1 - 2\Phi_0\left(\frac{2C_1\sqrt{h}k_1z_1}{\sqrt{z_2}}\right)\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) \left(1 - 2\Phi_0\left(\frac{|x - x'|}{2\sqrt{z_1h}}\right)\right), \end{aligned}$$

где $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ обозначают плотности $x + V_1 + U_1 + V_2$ и $x' + V_1 + U_1 + V_2$.

В лемме 3 положим $Z^{(1)} = x + V_1 + U_1 + V_2$, $Z^{(2)} = x' + V_1 + U_1 + V_2$, $Y^{(1)} = Y^{(2)} = U_2$, $m/2 = 2C_1z_2h$ и $k = k_2$. Сконструируем новое семейство (A_j) множеств с диаметрами не больше k_2m , таких, что

$$\begin{aligned} \sum_j P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) &\geq \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) \int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) \left(1 - 2\Phi_0\left(\frac{|x - x'|}{2\sqrt{z_1h}}\right)\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) \left(1 - 2\Phi_0\left(\frac{2C_1\sqrt{h}k_1z_1}{\sqrt{z_2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Вновь будем поочередно применять леммы 2, 4 и 3 до тех пор, пока не будет добавлено последнее слагаемое V_r . Это приведет к неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy &\geq \prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - 2\Phi_0 \left(2C_1 \sqrt{h} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} \right) \right) \prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{k_j} \right) \\ &\quad \times \left(1 - 2\Phi_0 \left(\frac{|x - x'|}{2\sqrt{z_1 h}} \right) \right), \end{aligned}$$

где $p^{(1)}(y) = \mu_{nh}^h(x, y)$ и $p^{(2)}(y) = \mu_{nh}^h(x', y)$.

Второе неравенство в (28) гарантирует, что второе произведение сходится (отделено от нуля). Если значение nh достаточно мало, то оценка (13) влечет, что первое произведение оценивается снизу с помощью

$$\prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2C_1 \sqrt{h} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} \right)$$

и в силу неравенства в (27) это произведение также отделено от нуля. Наконец, из (31) следует, что $z_1 \geq n/4$ (напомним, что $b = 2$) и

$$\int_{\mathbf{R}} \mu_{nh}^h(x, y) \wedge \mu_{nh}^h(x', y) dy \geq c_0 \left(1 - 2\Phi_0 \left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{nh}} \right) \right), \quad c_0 = c_0(K, C_1) > 0,$$

что и требовалось. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Доказательство имеет такую же структуру, как и доказательство теоремы 1, за исключением того, что вместо явной оценки из леммы 4 используется лемма 5.

Выберем целое число b настолько большим, чтобы лемма 5 была применима для $n \geq b$, и сконструируем «блоки» U_j и V_j точно по тем же формулам, что в доказательстве теоремы 1. Снова имеем $|U_j| < 2C_1 z_j h$, но V_j уже не обязательно нормально распределены.

В лемме 2 возьмем $P^{(1)} = \delta_x$, $P^{(2)} = \delta_{x'}$ (где δ_x обозначает распределение с единичной массой, сосредоточенной в точке x), A_1 — замкнутый параллелепипед с точками x и x' в качестве противоположных вершин и ребрами, параллельными осям координат, и пусть Q — распределение V_1 с плотностью q . По лемме 5, где $2a = 2a_0 = |x - x'|/\sqrt{z_1 h}$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy &\geq \int_{\mathbf{R}^d} \inf_{x \in A_1} q(y - x) dy \\ &\geq 1 - c_1 \left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{z_1 h}} + \frac{|x - x'|^2}{2z_1 h} \right) - \frac{c_2}{z_1^{1/3}}, \end{aligned}$$

где $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ — плотности $x + V_1$ и $x' + V_1$.

В лемме 3 положим $Z^{(1)} = x + V_1$, $Z^{(2)} = x' + V_1$, $Y^{(1)} = Y^{(2)} = U_1$, $m/2 = 2C_1 z_1 h$ и $k = k_1$. Построим семейство (A_j) множеств с диаметрами не более $k_1 m \sqrt{d}$ таких, что

$$\begin{aligned} \sum_j P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) &\geq \left(1 - \frac{1}{k_1}\right)^d \int_{\mathbf{R}^d} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{k_1}\right)^d \left(1 - c_1 \left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{z_1 h}} + \frac{|x - x'|^2}{2z_1 h}\right) - \frac{c_2}{z_1^{1/3}}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

где $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ обозначают распределения $x + V_1 + U_1$ и $x' + V_1 + U_1$.

Применим лемму 2 с этими $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, семейством (A_j) попарно непересекающихся множеств и Q и q , обозначающими распределение и плотность V_2 . В силу (33) и леммы 5, где $2a = 2a_1 = k_1 m \sqrt{d} / \sqrt{z_2 h} = 4\sqrt{d} C_1 \sqrt{h} k_1 z_1 / \sqrt{z_2}$ и $a^2/2 = 2dC_1^2 h k_1^2 z_1^2 / z_2$, имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} p^{(1)}(y) \wedge p^{(2)}(y) dy \\ &\geq \sum_j \left(P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j)\right) \int_{\mathbf{R}^d} \inf_{x \in A_j} q(y - x) dy \\ &\geq \left(1 - c_1 \left(2\sqrt{d} C_1 \sqrt{h} \frac{k_1 z_1}{\sqrt{z_2}} + 2dC_1^2 h \frac{k_1^2 z_1^2}{z_2}\right) - \frac{c_2}{z_2^{1/3}}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{k_1}\right)^d \left(1 - c_1 \left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{z_1 h}} + \frac{|x - x'|^2}{2z_1 h}\right) - \frac{c_2}{z_1^{1/3}}\right), \end{aligned}$$

где $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ обозначают плотности $x + V_1 + U_1 + V_2$ и $x' + V_1 + U_1 + V_2$.

Вновь будем поочередно применять лемм 2, 5 и 3 до тех пор, пока не будет добавлено слагаемое U_{r-1} . Это приведет к неравенству

$$\begin{aligned} &\sum_j P^{(1)}(A_j) \wedge P^{(2)}(A_j) \\ &\geq \left(1 - c_1 \left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{z_1 h}} + \frac{|x - x'|^2}{2z_1 h}\right) - \frac{c_2}{z_1^{1/3}}\right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{r-2} \left(1 - 2c_1 \left(\sqrt{d} C_1 \sqrt{h} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} + dC_1^2 h \frac{k_j^2 z_j^2}{z_{j+1}}\right) - \frac{c_2}{z_{j+1}^{1/3}}\right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^d, \end{aligned}$$

где $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ — условные распределения $X_{nh}^h - V_r$ при условиях $X_0^h = x$ и $X_0^h = x'$ соответственно, а (A_j) — счетное семейство попарно непересекающихся множеств с диаметрами не более $2a = 2a_{r-1} = 4\sqrt{d} C_1 h k_{r-1} z_{r-1}$.

Последний шаг состоит в добавлении $V_r = \xi_n \sqrt{h}$. Этот член имеет только одно слагаемое и потому должен рассматриваться отдельно, так как лемма 5 здесь не применима.

По определению k_j и z_j (см. лемму 6),

$$\begin{aligned} \frac{2a_{r-1}}{2\sqrt{z_r h}} &\leq 2\sqrt{d}C_1 k_{r-1} z_{r-1} \sqrt{h} \leq 4\sqrt{d}C_1 b \left(\frac{5}{4}\right)^{r-1} \sqrt{h} \\ &= 5\sqrt{d}C_1 \left(\frac{5}{4\sqrt{b}}\right)^{r-2} b^{r/2} \sqrt{h} = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $5/(4\sqrt{b}) < 1$, r растет при увеличении n и $b^{r/2}\sqrt{h} \leq \sqrt{bnh}$ ограничено в предположениях теоремы 2. Значит, $a' := a/\sqrt{h} \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, и, стало быть, для всех достаточно больших n открытый шар $U \equiv B_{r_0}(x_0)$ содержит некоторый шар радиуса $2a'$. Обозначим $U' = \{x: |x - x_0| \leq r_0 - a'\}$. Заменяя переменные, имеем

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq a} q_{V_r}(y - x) dy &\geq \int_{|x| \leq a} h^{-d/2} p\left(\frac{y - x}{\sqrt{h}}\right) dy \\ &\geq \int_{U'} \inf_{|x'| \leq a'} p(z - x') dz \geq c_U |U'| \geq \frac{c_U |U|}{2}, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь q_{V_r} обозначает плотность случайной величины V_r . Положим $c_U |U|/2 = C_U$. В результате получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} \mu_{nh}^h(x, y) \wedge \mu_{nh}^h(x', y) dy \\ &\geq c_U \left(1 - c_1 \left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{z_1 h}} + \frac{|x - x'|^2}{2z_1 h}\right) - \frac{c_2}{z_1^{1/3}}\right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{r-2} \left(1 - 2c_1 \left(\sqrt{d}C_1 \sqrt{h} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} + dC_1^2 h \frac{k_j^2 z_j^2}{z_{j+1}}\right) - \frac{c_2}{z_{j+1}^{1/3}}\right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^d. \end{aligned} \tag{34}$$

В силу второго неравенства в (28) произведение $\prod_{j=1}^{r-1} (1 - 1/k_j)^d$ сходится (отделено от нуля).

Согласно неравенству в (27),

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} \sqrt{h} \leq c\sqrt{nh} \leq c\sqrt{T},$$

и, благодаря первому неравенству в (28),

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{k_j^2 z_j^2}{z_{j+1}} h \leq cnh \leq cT.$$

По определению z_j

$$\sum_{j=2}^{r-1} z_j^{-\delta} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b^{-\delta})^k = \frac{1}{b^{\delta} - 1},$$

что может быть сделано сколь угодно малым путем выбора достаточно большого b . Следовательно, если $nh \leq K_2$ и значение K_2 достаточно мало, то произведение

$$\prod_{j=1}^{r-2} \left(1 - 2c_1 \left(\sqrt{d} C_1 \sqrt{h} \frac{k_j z_j}{\sqrt{z_{j+1}}} + d C_1^2 h \frac{k_j^2 z_j^2}{z_{j+1}} \right) - \frac{c_2}{z_{j+1}^{1/3}} \right)$$

отделено от нуля.

Итак, оба произведения и интегральный член в (34) отделены от нуля. Поэтому существуют константы $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 > 0$ такие, что

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mu_n^h(x, y) \wedge \mu_n^h(x', y) dy \geq \tilde{c}_1 \left(1 - \tilde{c}_2 \left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{z_1 h}} + \frac{|x - x'|^2}{2z_1 h} \right) - \frac{\tilde{c}_3}{z_1^{1/3}} \right).$$

Из определения z_1 (напомним, что $b \geq 2$) вытекает, что $z_1 \geq cn$ и $z_1 h \geq cK_1$. Это доказывает утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Подчеркнем, что метод доказательства фактически использует природу локального условия Маркова–Добрушина. Если сравнивать последнее с условиями в терминах малых множеств («small sets»), то стоит заметить, что для глобальной версии обоих условий константы, обеспечиваемые условием Маркова–Добрушина, всегда лучше (возможно, не в строгом смысле). В самом деле, «миноризация»

$$\inf_x \mathbf{P}_x(X_{nh}^h \in dy) \geq \varepsilon \nu(dy)$$

с некоторой вероятностной мерой ν немедленно влечет

$$\begin{aligned} & \inf_{x, x'} \int_{\mathbf{R}^d} p_{nh}^h(x, y) \wedge p_{nh}^h(x', y) dy \\ &= \inf_{x, x'} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\mathbf{P}_x(X_{nh}^h \in dy)}{\nu(dy)} \wedge \frac{\mathbf{P}_{x'}(X_{nh}^h \in dy)}{\nu(dy)} \nu(dy) \\ &\geq \int_{\mathbf{R}^d} (\varepsilon \wedge \varepsilon) \nu(dy) = \varepsilon. \end{aligned}$$

6. Доказательство теоремы 3. Доказательство следует из выкладок в [9], [22] благодаря локальному условию Маркова–Добрушина (4), которое выполняется равномерно при $0 < h \leq h_0$ и при некотором $T > 0$ в силу теоремы 2.

7. Доказательство следствия 1. 1) Пусть T_0 достаточно мало (см. (36) ниже). Напомним, что U — открытый шар радиуса r_0 , и положим

$$R_0 := r_0 \wedge \frac{1}{4c_1} \wedge \frac{1}{2c_1^{1/2}}, \quad (35)$$

где c_1 — постоянная из неравенства (11). Обозначим через B' концентрический с U шар радиуса $R_0/2$ и через B'' — такой же концентрический шар радиуса $2R_0/3$. Выберем

$$T_0 \leq \frac{R_0}{3(\|F\|_B + 1)} =: \tilde{T}_0. \quad (36)$$

Пусть h удовлетворяет оценке $h \leq h_0$, где h_0 достаточно мало (см. (40) ниже). Пусть $M_0 > 0$ и

$$p_{B', T_0} := \inf_{|x| \leq M_0} \mathbf{P}(x + \bar{W}_{T_0} \in B'), \quad (37)$$

где $\bar{W}$ — винеровский процесс с ковариационной матрицей $V = \text{Cov}(\xi)$, которая положительно определена в силу условия (A2). Заметим, что $p_{B', T_0} > 0$ (верно и несколько более сильное утверждение, см. (41) ниже). В силу центральной предельной теоремы имеем $W_{T_0}^h \Rightarrow \bar{W}_{T_0}$ (слабая сходимости), где $\bar{W}_{T_0} \sim \mathcal{N}(0, VT_0)$; более того, согласно равномерной версии центральной предельной теоремы, $\sup_{z \in \mathbf{R}^d} |\mathbf{P}(W_{T_0}^h \leq z) - \mathbf{P}(\bar{W}_{T_0} \leq z)| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ (см., например, [25]). Поэтому найдется такое достаточно малое h_0 , что при всех $|x| \leq M_0$

$$\inf_{h \leq h_0} \mathbf{P}(x + W_{T_0}^h \in B'') \geq \frac{p_{B', T_0}}{2} > 0. \quad (38)$$

Следовательно, в силу выбора $T_0 \leq \tilde{T}_0$, получаем

$$\inf_{|x| \leq M_0} \inf_{h \leq h_0} \mathbf{P}_x(X_{T_0}^h \in B) \geq \frac{p_{B', T_0}}{2} > 0. \quad (39)$$

Теперь при $T = 2T_0$ искомое неравенство (4) с $\rho = c_0 p_{B', T_0}^2 / 16$ следует из марковского свойства, выбора (35) и неравенств (11) и (39), если $n \geq n_0$, $n_0 \geq [(4c_2)^3]$, так что $n^{-1/3} \leq [4c_2]^{-1}$. Здесь c_2 — вторая постоянная из (11). В самом деле, если X^h и $\tilde{X}^h$ — две независимые копии марковского процесса X^h , то интеграл из (4) оценивается снизу следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{P}_x(X_{2T_0}^h \in dx') \wedge \mathbf{P}_{\tilde{x}}(\tilde{X}_{2T_0}^h \in dx') \\ & \geq \mathbf{P}_x(X_{T_0}^h \in B) \mathbf{P}_{\tilde{x}}(\tilde{X}_{T_0}^h \in B) \inf_{(X_{T_0}^h, \tilde{X}_{T_0}^h) \in B \times B} \int p(X_{T_0}^h, x') \wedge p(\tilde{X}_{T_0}^h, x') dx' \\ & \geq \left(\frac{p_{B', T_0}}{2} \right)^2 \frac{c_0}{4}. \end{aligned}$$

Стало быть, в частности, достаточно выбрать

$$h_0 \leq \frac{T_0}{[(4c_2)^3]}. \quad (40)$$

2) Отметим, что при всяком $T_0 \geq 0$

$$\widehat{p}_{B', T_0} := \inf_{T_0 \leq t \leq 2T_0} \inf_{|x| \leq M_0} \mathbf{P}(x + \overline{W}_t \in B') > 0. \quad (41)$$

В силу равномерной центральной предельной теоремы (см. [25]) при достаточном малом h_0

$$\inf_{T_0 \leq t \leq 2T_0} \inf_{h \leq h_0} \inf_{|x| \leq M_0} \mathbf{P}(x + W_t^h \in B'') \geq \frac{\widehat{p}_{B', T_0}}{2} > 0. \quad (42)$$

Отсюда следует вывод, что имеет место (4) при любом $T_0 \leq T \leq 2T_0$ с $\rho = c_0 \widehat{p}_{B', T_0}^2 / 16$, если только $n^{-1/3} \leq [4c_2]^{-1}$ и выполнено условие (40).

3) Рассмотрим случай $T \geq 2T_0$ и положим $k := [T/T_0]$. В этом случае

$$\frac{T}{T_0} - 1 \leq k \leq \frac{T}{T_0},$$

т.е.

$$T - T_0 \leq kT_0 \leq T, \quad \text{или} \quad kT_0 \leq T \leq (k+1)T_0.$$

Теперь неравенство (4) следует из марковского свойства и предыдущего шага доказательства с

$$\rho = \frac{c_0}{4} \left(\frac{\widehat{p}_{B', T_0}}{2} \right)^{2k}.$$

Следствие 1 доказано.

Авторы искренне благодарны Т. Шервашидзе за полезные консультации относительно оценок в локальных предельных теоремах и Т. Толозовой за многочисленные редакторские вопросы, позволившие существенно уменьшить количество неточностей как в тексте, так и в выкладках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М./Новосибирск: УРСС/Ин-т матем., 1999, 440 с.
2. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
3. Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 1, с. 72–89; в. 4, с. 365–425 (исправл.: 1958, т. 3, в. 4).
4. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.
5. Gulinsky O. V., Veretennikov A. Yu. Large Deviations for Discrete-Time Processes with Averaging. Utrecht: VSP, 1993, 186 p.
6. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
7. Веретенников А. Ю., Клепцына М. Л. Об эргодических фильтрах в непрерывном времени с ошибкой в начальных данных. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 240–276.

8. Клоков С. А. О нижних оценках скорости перемешивания для одного класса марковских процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 51, в. 3, с. 600–607.
9. Веретенников А. Ю., Клоков С. А. О субэкспоненциальной скорости перемешивания для марковских процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 21–35.
10. Klovov S. A., Veretennikov A. Yu. Sub-exponential mixing rate for a class of Markov processes. — Math. Comm., 2004, v. 9, № 1, p. 9–26.
11. Klovov S. A., Veretennikov A. Yu. Mixing and convergence rates for a family of Markov processes approximating SDEs. — Random Oper. Stoch. Equ., 2006, v. 14, № 2, p. 103–126.
12. Konakov V., Mammen E. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. — Probab. Theory Related Fields, 2000, v. 117, № 4, p. 551–587.
13. Крылов Н. А. О выделении марковского процесса из марковской системы процессов и построении квазидиффузионных процессов. — Изв. АН СССР, 1973, т. 37, № 3, с. 691–708.
14. Лапинскас Р. О локальной предельной теореме и асимптотических разложениях в многомерном случае. — Литов. матем. сб., 1971, т. 11, № 4, с. 817–831.
15. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989, 207 с.
16. Pitman J. W. On coupling of Markov chains. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1976, v. 35, p. 315–322.
17. Shervashidze T. Local limit theorems for sums of random variables and parametric estimators of probability density. Dr.Sc. Thesis. Tbilisi: N. Muskhelishvili Institute of Computational Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 1999.
18. Статулявичус В. А. Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 4, с. 645–659.
19. Васерштейн Л. Н. Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов. — Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, в. 3, с. 64–72.
20. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 299–308.
21. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для марковских процессов. — Литов. матем. сб., 1991, т. 31, № 1, с. 40–49.
22. Веретенников А. Ю. О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических дифференциальных и разностных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 312–327.
23. Веретенников А. Ю. О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений. — Матем. сб., 1980, т. 111, № 3, с. 434–452.
24. Veretennikov A. Yu. On lower bounds for mixing coefficients of Markov diffusions. — From Stochastic Calculus to Mathematical Finance. The Shiryaev Festschrift. Ed. by Yu. Kabanov et al. Berlin: Springer, 2006, p. 623–633.
25. Sazonov V. V. On the multi-dimensional central limit theorem. — Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A, 1968, v. 30, № 2, p. 181–204.

Поступила в редакцию
5.I.2007

Исправленный вариант
5.VII.2011