Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова, О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 1, 62–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 09:48:32

© 2012 г. НЕФЕДОВА Ю. С.*, ШЕВЦОВА И. Г.*

**О НЕРАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ
В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ¹⁾**

Уточнены верхние оценки абсолютной постоянной в неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, обладающих моментами порядка $2 + \delta$, $0 < \delta \leq 1$. В частности, показано, что при существовании третьего момента эта константа не превосходит 18.2. Также показано, что абсолютную константу в указанных оценках можно заменить функцией $C^*(|x|, \delta)$ от аргумента x изучаемой разности допредельной и предельной нормальной функций распределения, для которой найдена положительная ограниченная невозрастающая мажоранта, причем для $\delta = 1$ эта мажоранта является асимптотически точной (неулучшаемой) при $x \rightarrow \infty$ и уточняет оценки В. Никулина [48] при всех x . Для случая же $\delta \in (0, 1)$ подобный результат приводится впервые. Как следствие получены верхние оценки функций Колмогорова, являющихся аналогами правильных и асимптотически правильных констант в (равномерном) неравенстве Берри–Эссеена.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, неравномерная оценка скорости сходимости, неравенство Берри–Эссеена, абсолютная постоянная, асимптотически правильная постоянная.

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения F и таких, что $\mathbf{E} X_1 = 0$, $\mathbf{E} X_1^2 = 1$, $\mathbf{E} |X_1|^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1]$. Обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$ множество всех функций распределения F случайной величины X_1 , удовлетворяющих указанным условиям. Пусть $F_n(x) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n < x) =$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: julia_n@inbox.ru, ishevtsova@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00515а, 11-07-00112а), а также Министерством образования и науки РФ (грант МК-581.2010.1, государственные контракты П1181, П958, П779 и 16.740.11.0133 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы»).

$F^{*n}(x)$, $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ — соответственно плотность и функция распределения стандартного нормального закона. Положим

$$\Delta_n(x) = |F_n(x\sqrt{n}) - \Phi(x)|, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \geq 1.$$

Известно, что при указанных условиях существует (см., например, [22]) абсолютная положительная конечная константа $C_0(\delta)$ такая, что

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq C_0(\delta) L_n^{2+\delta}, \quad \text{где } L_n^{2+\delta} = \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}. \quad (1)$$

Данное неравенство впервые было доказано в 1941–1942 гг. при $\delta = 1$ независимо Э. Берри [31] и К.-Г. Эссееном [34]. При $0 < \delta < 1$ его можно вывести из полученной в 1945 г. Эссееном [36] оценки

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq A_1(\delta)(L_n^{2+\delta} + (L_n^{2+\delta})^{1/\delta}),$$

справедливой для необязательно одинаково распределенных слагаемых, где $A_1(\delta)$ зависит только от δ . Неравенство (1) также можно вывести из оценки

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq A_2 \cdot \mathbf{E} X_1^2 g(X_1) / g(\sqrt{n}),$$

доказанной в 1963 г. М. Кацем [39] для одинаково распределенных слагаемых, и обобщенной позже на случай разнораспределенных слагаемых В. В. Петровым [21], где $g(x)$ — четная функция, не убывающая вместе с $x/g(x)$, A_2 — положительная конечная абсолютная постоянная. Недавно В. Ю. Королев и С. В. Попов [41] показали, что в общем случае необязательно одинаково распределенных слагаемых $A_2 \leq 2.011$, какой бы ни была функция g , удовлетворяющая указанным выше условиям.

Уточнению оценок констант $C_0(\delta)$ при разных δ посвящено много работ (см. исторические обзоры в [11], [12], [40], [29]). В последнее время усилиями В. Ю. Королева, И. Г. Шевцовой и И. С. Тюрина верхнюю оценку для $C_0(1)$ удалось существенно снизить. В работе Тюрина [26] доказана оценка $C_0(1) \leq 0.4785$. Королевым и Шевцовой получена оценка $C_0(1) \leq 0.4784$ как следствие доказанного в работах [12], [40] неравенства

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq 0.33477(\beta_3 + 0.429)/\sqrt{n},$$

являющегося структурным уточнением неравенства (1) (так как $0.33477(\beta_3 + 0.429) \leq 0.33477(1 + 0.429)\beta_3 < 0.4784\beta_3$ в силу условия $\beta_3 \geq 1$). Нижняя оценка $C_0(1)$ приведена в статье Эссеена [35]. Таким образом, относительно $C_0(1)$ в настоящий момент известно [35], [12], [40],

что

$$0.4097 \approx \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \leq C_0(1) < 0.4784.^{2)}$$

Наилучшие на сегодняшний день верхние оценки констант $C_0(\delta)$ при $0 < \delta < 1$ получены в работе Григорьевой и Шевцовой [5], нижние оценки доказаны Шевцовой в [29] (см. табл. 1).

Таблица 1. Двусторонние оценки констант $C_0(\delta)$ для некоторых $\delta \in (0, 1)$, полученные в работах [5], [29].

$\delta =$	$C_0(\delta) \geq$	$C_0(\delta) \leq$	$\delta =$	$C_0(\delta) \geq$	$C_0(\delta) \leq$	$\delta =$	$C_0(\delta) \geq$	$C_0(\delta) \leq$
0.9	0.2383	0.5383	0.6	0.2651	0.6276	0.3	0.3257	0.6195
0.8	0.2446	0.5723	0.5	0.2803	0.6413	0.2	0.3603	0.6094
0.7	0.2534	0.6026	0.4	0.3000	0.6342	0.1	0.4097	0.6028

В работах [12], [40] была получена оценка, также являющаяся структурным уточнением неравенства (1)

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq 0.3041(\beta_3 + 1)/\sqrt{n}. \quad (2)$$

Несложно убедиться, что оценка (2) точнее (1) при $\beta_3 \geq 1.93$.

Для случая $\delta = 0$ известна тривиальная оценка $\sup_x \Delta_n(x) \leq 0.5409 \dots$ [3] (см. лемму 4 ниже). Для этого случая в 1966 г. Л. В. Осипов [18] доказал, что существует такая конечная положительная абсолютная постоянная A_3 , что

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq A_3 \cdot \mathbf{E} X_1^2 \min \left\{ 1, \frac{|X_1|}{\sqrt{n}} \right\}, \quad (3)$$

(также см. [23, глава V, § 3, теорема 7]). Результат Осипова был доказан для необязательно одинаково распределенных слагаемых. Также не предполагая одинаковой распределенности слагаемых, Л. Падитца показал [54], [56], что для константы A_3 в (3) справедлива оценка $A_3 \leq 4.77$. В 1986 г. в работе [57] он же отметил, что с учетом леммы 12.2 из монографии [3] с помощью техники, использованной в работах [54], [56], верхнюю оценку константы A_3 можно снизить до $A_3 \leq 3.51$. По-видимому, не будучи знакомыми с упомянутыми работами Падитца, в 2001 г. Чен и Шао

²⁾ Пока данная статья готовилась к печати, этот результат был улучшен в работе *Shevtsova I. On the absolute constants in the Berry–Esseen type inequalities for identically distributed summands*, arXiv:1111.6554, 28 November 2011, где доказано неравенство $\sup_x \Delta_n(x) \leq 0.33554(\beta_3 + 0.415)/\sqrt{n}$, следствием которого является наилучшая на сегодняшний день оценка $C_0(1) \leq 0.4748$. Независимо в работе Тюрина И. С. «Уточнение остаточного члена в теореме Ляпунова» (см. Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 4, с. 808–811) получена оценка $C_0(1) \leq 0.4774$.

опубликовали работу [32], в которой с помощью метода Тихомирова–Стейна неравенство (3) было доказано с константой $A_3 = 4.1$. В недавней работе [9] показано, что $A_3 \leq 2.011$, откуда вытекает равномерная по $\delta \in [0, 1]$ оценка $C_0(\delta) \leq 2.011$.

Оценка скорости сходимости $F_n(x\sqrt{n})$ к $\Phi(x)$, устанавливаемая неравенством Берри–Эссеена (1), *равномерна* по x . Но поскольку и $F_n(x\sqrt{n})$, и $\Phi(x)$ — функции распределения, должно выполняться соотношение $\Delta_n(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Это обстоятельство не учитывается в равномерных оценках. Вместе с тем точность нормальной аппроксимации для функции распределения сумм случайных величин именно при больших значениях аргумента представляет особый интерес, например, при вычислении рисков критически больших потерь. В данной статье мы рассмотрим неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме.

Вопрос о зависимости остаточного члена в центральной предельной теореме от n и x рассматривался еще в работе Крамера [33] для распределений с экспоненциально убывающими хвостами, т.е. таких, что $\mathbf{E} \exp\{a|X_1|\} < \infty$ для некоторого $a > 0$. Для распределений же, удовлетворяющих рассматриваемым моментным условиям, по-видимому, исторически первая оценка величины $\Delta_n(x)$ была получена К.-Г. Эссееном [36] в 1945 г. для случая $\delta = 1$ и одинаково распределенных слагаемых и имела вид

$$\Delta_n(x) \leq \frac{A_4(\beta_3)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\ln(2 + |x|)}{1 + |x|^3},$$

где $A_4(\beta_3)$ зависит только от β_3 . В работе Л. Д. Мешалкина и Б. А. Рогозина [13] с помощью неравенства сглаживания, отличного от неравенства сглаживания, использованного Эссееном, было доказано существование абсолютной постоянной A_5 такой, что при всех $x \in \mathbf{R}$ и $n \geq 1$

$$\Delta_n(x) \leq A_5 \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\max\{\ln n, \ln(2 + |x|)\}}{1 + |x|^3},$$

а также существование абсолютной постоянной A_6 такой, что при всех $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} (1 + x^2) \Delta_n(x) \leq A_6 \cdot L_n^3.$$

Результаты работ [36] и [13] затем были усилены и обобщены в работах С. В. Нагаева [15] (для случая одинаково распределенных слагаемых и $\delta = 1$) и А. Бикялиса [1] (для случая необязательно одинаково распределенных слагаемых и $0 < \delta \leq 1$), где было показано, что существуют такие положительные конечные числа $C(\delta)$, что

$$\sup_x (1 + |x|^{2+\delta}) \Delta_n(x) \leq C(\delta) L_n^{2+\delta}. \quad (4)$$

Вопрос о «правильности» (точности) устанавливаемого оценкой (4) порядка по n и x изучался в работах Л. В. Осипова и В. В. Петрова [19], А. Бикялиса [2], К. Хейди [38], Т. Накаты [45], Р. Михеля [42], В. В. Петрова [24], Л. В. Розовского [25].

Впервые верхние оценки для $C(\delta)$ были получены в работах Л. Падитца [50], [51], [52], [53] для необязательно одинаково распределенных слагаемых. В частности, в своей первой работе на эту тему [52], опубликованной лишь в 1978 г., для $C(1)$ им была получена оценка, превосходящая 1955. Затем в [53] приведены оценки

$$\begin{aligned} C(0.9) &\leq 820.4, & C(0.7) &\leq 569.5, & C(0.5) &\leq 376.7, \\ C(0.3) &\leq 241.4, & C(0.1) &\leq 151.3. \end{aligned}$$

В [51] было показано, что $C(1) \leq 114.7$. В работе Р. Михеля [43] для случая одинаково распределенных слагаемых было показано, что $C(1) \leq C_0(1) + 8(1+e)$, что с учетом оценки для $C_0(1)$, полученной в работе [12], влечет оценку $C(1) \leq 30.2247$. В работе В. Тысиака [61] для случая $0 < \delta \leq 1$ и необязательно одинаково распределенных слагаемых были получены оценки

$$\begin{aligned} C(1.0) &\leq 32.88, & C(0.9) &\leq 29.83, & C(0.8) &\leq 27.21, & C(0.7) &\leq 25.06, \\ C(0.6) &\leq 23.41, & C(0.5) &\leq 21.94, & C(0.4) &\leq 20.58, & C(0.3) &\leq 19.32, \\ C(0.2) &\leq 18.17, & C(0.1) &\leq 17.05. \end{aligned}$$

Ш. А. Мирахмедов [14] утверждал, что оценка Михеля $C(1) \leq C_0(1) + 8(1+e)$ справедлива и в общем случае произвольно распределенных слагаемых. Однако вычисления в работах [61], [14] содержали неточности (см. замечания в [20] и [58]). В [20] Л. Падитц и Ш. Мирахмедов получили оценку $C(1) \leq 32.153$. В 1986 г. Л. Падитц [57] показал, что $C(1) \leq 31.935$. Недавно указанные оценки были уточнены для случая одинаково распределенных слагаемых в работе авторов [16], где было показано, что

$$\begin{aligned} C(1.0) &\leq 25.80, & C(0.9) &\leq 24.23, & C(0.8) &\leq 22.41, & C(0.7) &\leq 20.68, \\ C(0.6) &\leq 19.01, & C(0.5) &\leq 17.37, & C(0.4) &\leq 15.69, & C(0.3) &\leq 14.08, \\ C(0.2) &\leq 12.65, & C(0.1) &\leq 11.37. \end{aligned}$$

В статье [4] для случая $\delta = 1$ была получена неравномерная оценка уточненной структуры вида

$$(1+|x|^3)\Delta_n(x) \leq 22.7707 \cdot (\beta_3 + 1)/\sqrt{n}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \geq 1, \quad F \in \mathcal{F}_3. \quad (5)$$

При этом, поскольку всегда $\beta_3 \geq 1$, при больших значениях β_3 оценка (5) точнее, чем (4) за счет меньшего значения абсолютной константы.

В 2001 г. Чен и Шао [32] получили неравномерное уточнение неравенства Осипова (3), построив неравномерную оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме, не требующую существования моментов порядка выше двух у суммируемых случайных величин. А именно, если $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с $\mathbf{E} X_i = 0$ и $\mathbf{E} X_1^2 + \dots + \mathbf{E} X_n^2 = 1$, то, как показано в [32], существует константа C_{CS} такая, что для всех $x \in \mathbf{R}$

$$\Delta_n(x) \leq C_{CS} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\mathbf{E} X_i^2 I(|X_i| \geq 1 + |x|)}{(1 + |x|)^2} + \frac{\mathbf{E} |X_i|^3 I(|X_i| < 1 + |x|)}{(1 + |x|)^3} \right\}.$$

Верхним оценкам константы C_{CS} посвящены работы [46], [60], [47]. Примечательно, что эти оценки зависят от значения x . В частности, в [47] приведена оценка $C_{CS} \leq 76.17$, а также показано, что $C_{CS} \leq 39.39$, если $|x| \geq 14$.

В работе В. Н. Никулина [17] (также см. [49]) было показано, что для случая $\delta = 1$ абсолютную константу $C(1)$ в неравенстве

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3} \sup_{x \in \mathbf{R}} (1 + |x|^3) \Delta_n(x) \leq C(1)$$

можно заменить на невозрастающую функцию $C_N(x)$ от $x \geq 0$ такую, что

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3} \sup_{|t| \geq x} |t|^3 \Delta_n(t) \leq C_N(x).$$

В статье В. Н. Никулина [48] вычислены значения функции $C_N(x)$ при некоторых $x \geq 3.18$ (см. табл. 2). Несмотря на то, что использованный в [48] алгоритм подсчета $C_N(x)$ при больших x дает лишь оценку $\lim_{x \rightarrow \infty} C_N(x) \leq 1 + e$ (равномерную по $n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_3$), там же при каждом фиксированном $n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_3$ было аналитически исследовано предельное поведение $C_N(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и показано, что для такой ситуации $\lim_{x \rightarrow \infty} C_N(x) = 1$, т.е. $\sup_{n \geq 1, F \in \mathcal{F}_3} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^3 \Delta_n(x) / L_n^3 \leq 1$.

Таблица 2. Значения функции $C_N(x)$ из работы [48].

x	$C_N(x)$	x	$C_N(x)$	x	$C_N(x)$
3.18	28.4057	7.00	9.0590	20.00	4.9095
4.00	22.1853	8.00	7.2512	50.00	4.2732
5.00	16.0240	9.00	6.0329	100.00	4.0200
6.00	11.8046	10.00	5.7370	∞	$1+e$

В 1953 г. А. Н. Колмогоров [7] ввел в рассмотрение функции

$$D_*(x) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1, F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \Delta_n(x) / \ell, \quad D^*(x) = \sup_{n \geq 1, F \in \mathcal{F}_3} \Delta_n(x) / L_n^3$$

и поставил вопрос о возможно более точной оценке функций $D_*(x)$, $D^*(x)$ (получение точных или асимптотически точных оценок). В 1990 г. Г. П. Чистяков [27] показал, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^3 D_*(x) = 1,$$

откуда вытекает, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^3 D^*(x) \geq 1$, поскольку $D_*(x) \leq D^*(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Однако задача о построении точных или асимптотически точных оценок функции $D^*(x)$ оставалась нерешенной. В данной работе заполняются некоторые пробелы, связанные с изучением асимптотического поведения функции $D^*(x)$ и построением асимптотически точных мажорирующих функций для $D^*(x)$ и $D_*(x)$ при всех $0 < \delta \leq 1$.

Введем аналоги правильной и асимптотически правильной постоянной в классическом (равномерном) неравенстве Берри–Эссеена для неравномерных оценок и $0 < \delta \leq 1$:

$$C_*(x, \delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \sup_{|t| \geq x} |t|^{2+\delta} \Delta_n(t) / \ell, \quad x \geq 0,$$

$$C^*(x, \delta) = \sup_{n \geq 1, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \sup_{|t| \geq x} |t|^{2+\delta} \Delta_n(t) / L_n^{2+\delta}, \quad x \geq 0.$$

Тогда $\sup_{|t| \geq x} |t|^3 D_*(t) \leq C_*(x, 1)$, $\sup_{|t| \geq x} |t|^3 D^*(t) \leq C^*(x, 1)$ для всех $x \geq 0$, а также с учетом результата работы Чистякова [27] $\lim_{x \rightarrow \infty} C_*(x, 1) \geq 1$.

Отметим, что с использованием функции $C_N(x)$ величины $C_*(x, 1)$ и $C^*(x, 1)$ при каждом $x \geq 0$ можно оценить следующим образом: $C_*(x, 1) \leq C^*(x, 1) \leq C_N(x)$ (см. таблицу 2). Однако для предельного при $x \rightarrow \infty$ значения $C^*(x, 1)$ из работы [48] вытекает лишь оценка $\lim_{x \rightarrow \infty} C^*(x, 1) \leq 1 + \epsilon$, поскольку асимптотика $C_N(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, доказанная в [48], не является *равномерной* по $n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_3$.

В данной работе мы опишем *алгоритм*, позволяющий при каждом $0 < \delta \leq 1$ строить ограниченную невозрастающую мажоранту $C(x, \delta)$ функции $C^*(x, \delta)$, т.е. такую функцию, что при каждом $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{|t| \geq x} |t|^{2+\delta} \Delta_n(t) \leq C(x, \delta) L_n^{2+\delta}, \quad n \geq 1, \quad F \in \mathcal{F}_{2+\delta} \quad (6)$$

(см. теорему 4). При этом $C(x, \delta) = C(\delta) - C_0(\delta)$ при $0 \leq x \leq K_0(\delta)$, $C(x, \delta) < C(0, \delta)$ при $x > K_0(\delta)$ (значения констант $K_0(\delta)$ будут указаны ниже) и $C(x, \delta) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. функция $C(x, 1)$ является *асимптотически точной* (неулучшаемой при $x \rightarrow \infty$) мажорантой для функций $C_*(x, 1)$ и $C^*(x, 1)$. Таким образом, оценка (6) с указанной функцией $C(x, \delta)$ дополняет и обобщает результат работы Чистякова [27]: для

асимптотического значения функции Колмогорова $D^*(x)$ получаем

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^3 D^*(x) = 1,$$

а также $\lim_{x \rightarrow \infty} C_*(x, \delta) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} C^*(x, \delta) \leq 1$ для всех $0 < \delta \leq 1$.

Значения функции $C(x, 1)$ для $\delta = 1$ и некоторых $x \geq K_0(1)$ и $x = 0$ приведены в табл. 3. Несложно убедиться, что $C(x, 1) \leq C_N(x)$, т.е. для $\delta = 1$ неравенство (6) также уточняет результат работы [48]. При $0 < \delta < 1$ неравенство (6) приводится впервые.

Таблица 3. Значения функции $C(x, 1)$ в (6) из теоремы 4.

x	$C(x, 1)$	x	$C(x, 1)$	x	$C(x, 1)$
0	17.6355	3.8	15.3061	50	1.4388
3.5	16.4933	4.0	14.5837	100	1.1565
3.6	16.0383	10.0	4.6334	1000	1.0131
3.7	15.6706	20.0	2.3099	∞	1

Поскольку $\sup_{x \in \mathbf{R}} |x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq C(0, \delta)$, из неравенства (6) легко получить следующую верхнюю оценку константы $C(\delta)$ в (4): $C(\delta) \leq C(0, \delta) + C_0(\delta)$ (см. следствие 1). Результаты вычислений для $\delta = 0.1, 0.2, \dots, 1$, проведенных в соответствии с алгоритмом построения мажоранты $C(\delta)$, описываемым в данной работе, приведены в табл. 4.

Таблица 4. Оценки констант $C(\delta)$ в (4) из следствия 1.

$\delta =$	$C(\delta) \leq$	$\delta =$	$C(\delta) \leq$
1.0	18.1139	0.5	13.0258
0.9	17.2651	0.4	11.9605
0.8	16.1524	0.3	10.9675
0.7	15.0866	0.2	10.0561
0.6	14.0576	0.1	9.2114

Идея, лежащая в основе описанного Л. Падитцем [58] конструктивного метода построения неравномерных оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин, позволяющего получить явные оценки абсолютных констант, заключается в подходящем разбиении вещественной прямой на зоны «малых», «умеренных» и «больших» значений x . Традиционно используются разбиения вида

- (i) («малые» значения x): $0 \leq x^2 \leq K^2$;
- (ii) («умеренные» значения x): $K^2 \leq x^2 \leq c_n(x; \delta, a, b, c)$;
- (iii) («большие» значения x): $c_n(x; \delta, a, b, c) \leq x^2 < \infty$,

где $K > 0$, $a > 0$, $b > c \geq 1$ — вспомогательные свободные параметры, $c_n(x; \delta, a, b, c)$ — некоторая функция, монотонно возрастающая по x (см., в частности, [59], [58]). Положим

$$c_n(x; \delta, a, b, c) = \frac{b^2}{2(b-c)} \left[\ln |x|^{2+\delta} - \ln(aL_n^{2+\delta}) \right] \equiv \frac{b^2}{2(b-c)} \ln \frac{|x|^{2+\delta} n^{\delta/2}}{a\beta_{2+\delta}}.$$

Здесь мы развиваем методы и идеи, изложенные в [58] и [48]. Поскольку в некоторых работах, использующих эти методы, имеются пробелы, все утверждения, формулируемые в данной статье, снабжены подробными доказательствами.

2. Вспомогательные утверждения. Метод доказательства основан на усечении случайной величины X_1 :

$$\bar{X}_1 = \begin{cases} X_1, & \text{если } |X_1| \leq y, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $y > 0$ — параметр усечения. Обозначим

$$F_n^y(x) = \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n \bar{X}_k < x \right).$$

Также для параметра $h \geq 0$ введем следующее обозначение:

$$f(h) = \mathbf{E} e^{h\bar{X}_1} = \mathbf{E} \exp\{hX_1 \mathbf{1}(|X_1| \leq y)\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для произвольных параметров $h \geq 0$ и $y > 0$ справедливости неравенства

$$h - \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} \left(1 + hy + \frac{(hy)^2}{2} \right) \leq m_1 \equiv \mathbf{E} \bar{X}_1 e^{h\bar{X}_1} \leq h + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} e^{hy}, \quad (7)$$

$$1 - \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} (1 + hy) \leq m_2 \equiv \mathbf{E} \bar{X}_1^2 e^{h\bar{X}_1} \leq 1 + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} e^{hy}, \quad (8)$$

$$m_3 \equiv \mathbf{E} |\bar{X}_1|^3 e^{h\bar{X}_1} \leq \beta_{2+\delta} y^{1-\delta} e^{hy}, \quad (9)$$

$$f(h) \equiv \mathbf{E} e^{h\bar{X}_1} \leq 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{2+\delta}} \leq \exp \left\{ \frac{h^2}{2} + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{2+\delta}} e^{hy} \right\}, \quad (10)$$

$$f(h) \geq 1 - \frac{h\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}}. \quad (11)$$

Доказательство. Доказательство основано на применении формулы Маклорена

$$e^{h\bar{X}_1} = 1 + h\bar{X}_1 + \frac{(h\bar{X}_1)^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(h\bar{X}_1)^k}{k!}.$$

Найдем двусторонние оценки моментов случайной величины $\bar{X}_1$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} \bar{X}_1| &= |\mathbf{E} X_1 - \mathbf{E} X_1 \mathbf{1}(|X_1| > y)| \leq \mathbf{E} |X_1| \mathbf{1}(|X_1| > y) \\ &\leq y^{-1-\delta} \mathbf{E} |X_1|^{2+\delta} \mathbf{1}(|X_1| > y) \leq \beta_{2+\delta}/y^{1+\delta}, \\ \mathbf{E} \bar{X}_1^2 - 1 &= \mathbf{E} (\bar{X}_1^2 - X_1^2) \\ &= -\mathbf{E} X_1^2 \mathbf{1}(|X_1| > y) \begin{cases} \leq 0, \\ \geq -y^{-\delta} \mathbf{E} |X_1|^{2+\delta} \mathbf{1}(|X_1| > y) \geq -\beta_{2+\delta}/y^\delta. \end{cases} \\ |\mathbf{E} (\bar{X}_1)^k| &\leq \mathbf{E} |\bar{X}_1|^k = \mathbf{E} |X_1|^k \mathbf{1}(|X_1| \leq y) \leq \beta_{2+\delta} y^{k-2-\delta}, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

Отсюда с использованием верхних оценок получаем

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv \mathbf{E} \bar{X}_1 e^{h\bar{X}_1} = \mathbf{E} \left(\bar{X}_1 \left(1 + h\bar{X}_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(h\bar{X}_1)^k}{k!} \right) \right) \\ &= \mathbf{E} \bar{X}_1 + h \mathbf{E} \bar{X}_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k \mathbf{E} \bar{X}_1^{k+1}}{k!} \leq \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + h + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hy)^k}{k!} \\ &= \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + h + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} (e^{hy} - 1 - hy) = h + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} (e^{hy} - hy), \\ m_2 &\equiv \mathbf{E} \bar{X}_1^2 e^{h\bar{X}_1} = \mathbf{E} \left(\bar{X}_1^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h\bar{X}_1)^k}{k!} \right) \right) \\ &= \mathbf{E} \bar{X}_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k \mathbf{E} \bar{X}_1^{k+2}}{k!} \leq 1 + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hy)^k}{k!} = 1 + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} (e^{hy} - 1), \\ m_3 &\equiv \mathbf{E} |\bar{X}_1|^3 e^{h\bar{X}_1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k \mathbf{E} |\bar{X}_1|^{k+3}}{k!} \leq \beta_{2+\delta} y^{1-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hy)^k}{k!} = \beta_{2+\delta} y^{1-\delta} e^{hy}, \\ f(h) &\equiv \mathbf{E} e^{h\bar{X}_1} \leq 1 + h \mathbf{E} \bar{X}_1 + \frac{(h \mathbf{E} \bar{X}_1)^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{h^k \mathbf{E} |\bar{X}_1|^k}{k!} \\ &\leq 1 + \frac{h\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + \frac{h^2}{2} + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{2+\delta}} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(hy)^k}{k!} \\ &= 1 + \frac{h\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + \frac{h^2}{2} + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{2+\delta}} \left(e^{hy} - 1 - hy - \frac{h^2 y^2}{2} \right) \\ &= 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{2+\delta}} \left(e^{hy} - 1 - \frac{h^2 y^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Для доказательства (7) дополнительно заметим, что $xe^{hx} \geq x(1 + hx + (hx)^2/2)$, $x \in \mathbf{R}$, и тогда получим оценку

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv \mathbf{E} \bar{X}_1 e^{h\bar{X}_1} \geq \mathbf{E} \left(\bar{X}_1 (1 + h\bar{X}_1 + 0.5(h\bar{X}_1)^2) \right) \\ &\geq -\frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + h \left(1 - \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} \right) - 0.5h^2 \beta_{2+\delta} y^{1-\delta} \\ &= h - \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} (1 + hy + 0.5(hy)^2). \end{aligned}$$

Замечая, что $e^{hx} \geq 1 + hx$, $x \in \mathbf{R}$, получаем нижние оценки для m_2 и $f(h)$:

$$\begin{aligned} m_2 &\equiv \mathbf{E} \bar{X}_1^2 e^{h\bar{X}_1} \geq \mathbf{E} \left(\bar{X}_1^2 (1 + h\bar{X}_1) \right) \\ &\geq 1 - \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} - \beta_{2+\delta} h y^{1-\delta} = 1 - \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} (1 + hy), \\ f(h) &\equiv \mathbf{E} e^{h\bar{X}_1} \geq \mathbf{E} (1 + h\bar{X}_1) \geq 1 - \frac{h\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для параметра усечения $y > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n^y(x) - F_n(x)| \leq n\mathbf{P}(|X_1| > y).$$

Доказательство. Замечая, что для любого $y > 0$ события $\cap_{k=1}^n \{|X_k| \leq y\}$ и $\cup_{k=1}^n \{|X_k| > y\}$ образуют полную группу, для любого $x \in \mathbf{R}$ получаем

$$\begin{aligned} &|F_n^y(x) - F_n(x)| \\ &= \left| \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n \bar{X}_k < x, \bigcap_{k=1}^n \{|X_k| \leq y\} \right) + \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n \bar{X}_k < x, \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > y\} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n X_k < x, \bigcap_{k=1}^n \{|X_k| \leq y\} \right) - \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n X_k < x, \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > y\} \right) \right| \\ &= \left| \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n \bar{X}_k < x, \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > y\} \right) - \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n X_k < x, \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > y\} \right) \right| \\ &\leq \max \left\{ \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n \bar{X}_k < x, \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > y\} \right), \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n X_k < x, \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > y\} \right) \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > y\} \right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(|X_k| > y) = n\mathbf{P}(|X_1| > y). \end{aligned}$$

Лемма 3. 1°. Пусть $q > 0$ и $A > 0$. Тогда

$$\sup_{v \geq A} |\Phi(v) - \Phi(qv)| \leq \frac{1}{2} \max \left\{ q^2 - 1, \frac{1 - q^2}{q^2} \right\} \cdot (v\varphi(v)) \Big|_{v=\max\{1, A \min\{1, q\}\}}.$$

2°. Пусть $a \in \mathbf{R}$ и $A > 0$. Тогда

$$\sup_{v \geq A} |\Phi(v+a) - \Phi(v)| \leq |a| \varphi(\min\{A+a, A\}).$$

Доказательство. 1°. Пользуясь формулой Лагранжа, получаем

$$\sup_{v \geq A} |\Phi(v) - \Phi(qv)| \leq |q - 1| \sup_{v \geq A} v \varphi(v \cdot \min\{1, q\})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|q-1|}{\min\{1, q\}} \sup_{v \geq A} (v \min\{1, q\} \varphi(v \min\{1, q\})) \\
&= |q-1| \max\left\{1, \frac{1}{q}\right\} \sup\{s\varphi(s): s \geq A \min\{1, q\}\}.
\end{aligned}$$

Как несложно убедиться, для любого $q > 0$

$$|q-1| \max\left\{1, \frac{1}{q}\right\} = \max\left\{q-1, \frac{1-q}{q}\right\} \leq \frac{1}{2} \max\left\{q^2-1, \frac{1-q^2}{q^2}\right\}.$$

Замечание о том, что функция $s\varphi(s)$, $s \geq 0$, монотонно возрастает при $0 < s < 1$ и монотонно убывает при $s > 1$, а следовательно, ее максимальное значение при $s \geq A \min\{1, q\}$ достигается в точке $s = \max\{1, A \min\{1, q\}\}$, завершает доказательство пункта 1°.

2°. Также применяя формулу Лагранжа, имеем

$$\sup_{v \geq A} |\Phi(v+a) - \Phi(v)| \leq |a| \sup_{v \geq A} \varphi(\min\{v+a, v\}) \leq |a| \varphi(\min\{A+a, A\}).$$

Лемма 4 (см. [3]). Для любой функции распределения F с нулевым средним и единичной дисперсией

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F(x) - \Phi(x)| \leq \sup_{x > 0} \left(\Phi(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right) = 0.54093654 \dots \equiv \kappa.$$

Лемма 5. Для любой случайной величины X с $\mathbf{E}|X|^3 < \infty$ и $\mathbf{E}X = a$ при любом a справедливо неравенство

$$\mathbf{E}|X-a|^3 \leq \min\{L \cdot \mathbf{E}|X|^3, \mathbf{E}|X|^3 + 3|a|\mathbf{E}X^2 + a^2\mathbf{E}|X| - |a|^3\},$$

$$L = \frac{17+7\sqrt{7}}{27} < 1.3156,$$

причем равенство $\mathbf{E}|X-a|^3 = L\mathbf{E}|X|^3$ достигается на двуточечном распределении вида

$$\mathbf{P}\left(X = \frac{6a}{4 - \sqrt{7} \pm \sqrt{1+2\sqrt{7}}}\right) = \frac{3 \pm \sqrt{1+2\sqrt{7}}}{6}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X-a|^3 &= \mathbf{E}|X-a|(X-a)^2 \leq \mathbf{E}(|X|+|a|)(X^2-2aX+a^2) \\
&= \mathbf{E}|X|^3 - 2a\mathbf{E}(X|X|) + a^2\mathbf{E}|X| + |a|\mathbf{E}X^2 - 2|a|a\mathbf{E}X + |a|^3 \\
&\leq \mathbf{E}|X|^3 + 2|a|\mathbf{E}X^2 + a^2\mathbf{E}|X| + |a|\mathbf{E}X^2 - |a|^3,
\end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{E}|X-a|^3$ не превосходит второго аргумента минимума. Докажем, что $\mathbf{E}|X-a|^3$ не превосходит и первого аргумента минимума,

т.е. $\mathbf{E}|X - a|^3 \leq L \mathbf{E}|X|^3$. Для этого рассмотрим функционал $J_a(X) = \mathbf{E}|X - a|^3 - L \mathbf{E}|X|^3$ и покажем, что $\sup_a \sup_{X: \mathbf{E}X=a} J_a(X) = 0$. Из результатов В.Хёффдинга [37] и В.М.Золотарева [6] вытекает, что экстремум линейного по функции распределения случайной величины X функционала $J_a(X)$ с одним линейным ограничением $\mathbf{E}X = a$ моментного типа достигается на некотором двухточечном распределении. Пусть $\mathbf{P}(X = x) = p$, $\mathbf{P}(X = y) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. Тогда $a = \mathbf{E}X = px + qy$, $\mathbf{E}|X|^3 = p|x|^3 + q|y|^3$, $\mathbf{E}|X - a|^3 = pq(p^2 + q^2)|x - y|^3$. Обозначив $z = y/x$, получаем

$$\sup_X \frac{\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^3}{\mathbf{E}|X|^3} = \sup_{0 < p < 1, z \in \mathbf{R}} f(z, p), \quad \text{где } f(z, p) = pq(p^2 + q^2) \frac{|1 - z|^3}{p + q|z|^3}.$$

Раскроем модули и покажем, что в каждом случае $f(z, p) \leq L$.

1) Пусть $z < 0$. Тогда $f(z, p) = pq(p^2 + q^2)(1 - z)^3/(p - qz^3)$. Уравнение $f'_z(z, p) = 0$ равносильно $qz^2 = p$, откуда находим, что $z = -\sqrt{p/q}$. Имеем

$$f\left(-\sqrt{\frac{p}{q}}, p\right) = (p^2 + q^2)(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 = (1 - 2pq)(1 + 2\sqrt{pq}).$$

Положим $s = \sqrt{pq}$ и рассмотрим функцию $g(s) = (1 - 2s^2)(1 + 2s)$, $s > 0$. Она достигает своего максимального значения $(17 + 7\sqrt{7})/27 = 1.315565\dots$ в точке $s = (\sqrt{7} - 1)/6 \approx 0.2743$, т.е. экстремальное распределение X задается параметрами

$$p = \frac{3 - \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}{6}, \quad q = \frac{3 + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}{6},$$

$$\frac{y}{x} = -\sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{2 + \sqrt{7} + 3\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}}.$$

2) Пусть $0 \leq z \leq 1$. Тогда $f(z, p) = pq(p^2 + q^2)(1 - z)^3/(p + qz^3)$. С точностью до неотрицательного множителя производная $f'_z(z, p)$ имеет вид $-3(1 - z)^2(p + qz^2)$, откуда заключаем, что $f'_z(z, p) \leq 0$ при $0 \leq z \leq 1$, а следовательно, максимальное значение функции $f(z, p)$ на отрезке $0 \leq z \leq 1$ достигается в точке $z = 0$ и имеет вид $f(0, p) = q(p^2 + q^2) = (1 - p)(1 - 2p + 2p^2)$. Несложно убедиться, что $f'_p(0, p) < 0$ для всех $p \in \mathbf{R}$, а следовательно, $\sup_{0 < p < 1} f(0, p) = \lim_{p \rightarrow 0+} f(0, p) = 1 < L$.

3) Пусть $z > 1$. Тогда $f(z, p) = pq(p^2 + q^2)(z - 1)^3/(p + qz^3)$. С точностью до неотрицательного множителя производная $f'_z(z, p)$ имеет вид $3(z - 1)^2(p + qz^2)$, откуда получаем, что $f'_z(z, p) \geq 0$ при $z > 1$, а следовательно, $\sup_{z > 1} f(z, p) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z, p) = p(p^2 + q^2)$. Аналогично случаю 2) заключаем, что и здесь $f(z, p)$ не превосходит 1. Лемма доказана.

3. Случаи (i) и (iii) — «малые» и «большие» значения x .

В случае (i), т.е. для $0 \leq |x| \leq K$, в соответствии с неравенством (1) мы имеем

$$|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq C_0(\delta) K^{2+\delta} L_n^{2+\delta}. \quad (12)$$

В случае же (iii), т.е. для

$$x^2 \geq \frac{b^2}{2(b-c)} \ln \frac{|x|^{2+\delta} n^{\delta/2}}{a\beta_{2+\delta}}$$

справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Предположим, что $c_n(x; \delta, a, b, c) > 0$, $x^2 \geq \max\{(2\pi)^{-1}, c_n(x; \delta, a, b, c)\}$, $b > c \geq 1$, $a > 0$. Тогда для любого $n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$*

$$|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq P(\delta, a, b, c, x) L_n^{2+\delta}, \quad (13)$$

где

$$P(\delta, a, b, c, x) = b^{2+\delta} + a \exp \left\{ \frac{b^{2+\delta}}{a} - \frac{2(b-c)(c-1)}{b^2} x^2 \right\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, функция $P(\delta, a, b, c, x)$ монотонно не возрастает по $|x|$. Также несложно убедиться, что функция $P(\delta, a, b, c, x)$ аргумента $a > 0$ при фиксированных δ, b, c и x достигает своего минимального значения в точке $a = b^{2+\delta}$:

$$\inf_{a>0} P(\delta, a, b, c, x) = b^{2+\delta} \left(1 + \exp \left\{ 1 - \frac{2(b-c)(c-1)}{b^2} x^2 \right\} \right),$$

при этом $P(\delta, a, b, c, x) \geq 1$ для всех рассматриваемых значений δ, a, b, c, x . Кроме того, для любого $0 < \delta \leq 1$

$$\inf_{a>0, b>c \geq 1} \lim_{|x| \rightarrow \infty} P(\delta, a, b, c, x) = \lim_{b \rightarrow 1+} b^{2+\delta} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Без ограничения общности пусть $x \geq 0$. Поскольку

$$\Delta_n(x) = \max \left\{ (1 - F_n(x\sqrt{n})) + (\Phi(x) - 1), (F_n(x\sqrt{n}) - 1) + (1 - \Phi(x)) \right\},$$

и величины $F_n(x\sqrt{n}) - 1$ и $\Phi(x) - 1$ неположительны для любого $t \in \mathbf{R}$, получаем

$$\Delta_n(x) \leq \max \left\{ 1 - F_n(x\sqrt{n}), 1 - \Phi(x) \right\}.$$

Для всех $x \geq \max\{(2\pi)^{-1/2}, \sqrt{c_n(x; \delta, a, b, c)}\}$ справедливо неравенство

$$1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \leq e^{-x^2/2} \leq \left[\frac{a\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta} n^{\delta/2}} \right]^{b^2/(4(b-c))}.$$

Замечая, что $b^2/(4(b-c)) \geq c$ при $b \geq c$ и для рассматриваемого диапазона значений x

$$\frac{a\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta}n^{\delta/2}} \leq \exp \left\{ -\frac{2(b-c)x^2}{b^2} \right\} < 1, \quad (14)$$

окончательно заключаем, что

$$1 - \Phi(x) \leq \left[\frac{a\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta}n^{\delta/2}} \right]^c.$$

С другой стороны, для $1 - F_n(x\sqrt{n})$ мы имеем

$$1 - F_n(x\sqrt{n}) \leq 1 - F_n^y(x\sqrt{n}) + \left| F_n^y(x\sqrt{n}) - F_n(x\sqrt{n}) \right|$$

с параметром усечения $y = x\sqrt{n}/b$, $b > 1$. Тогда по лемме 2 и по неравенству Маркова получим

$$\left| F_n^y(x\sqrt{n}) - F_n(x\sqrt{n}) \right| \leq n\mathbf{P}(|X_1| > y) \leq \frac{b^{2+\delta}\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta}n^{\delta/2}}. \quad (15)$$

Обозначим

$$h = \frac{1}{y} \ln \frac{n^{\delta/2}x^{2+\delta}}{\beta_{2+\delta}a} \equiv \frac{2(b-c)}{bx\sqrt{n}} c_n(x; \delta, a, b, c).$$

Используя неравенство Маркова и учитывая верхнюю оценку (10) для $f(h) = \mathbf{E} e^{h\bar{X}_1}$ из леммы 1 для указанного h , получаем

$$\begin{aligned} 1 - F_n^y(x\sqrt{n}) &= \mathbf{P}(h\bar{X}_1 + \dots + h\bar{X}_n \geq hx\sqrt{n}) \leq f^n(h) \exp\{-hx\sqrt{n}\} \\ &\leq \exp \left\{ -hx\sqrt{n} + \frac{1}{2} h^2 n + \frac{n\beta_{2+\delta}}{y^{2+\delta}} e^{hy} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2(b-c)}{b} c_n(x; \delta, a, b, c) + \frac{2(b-c)^2}{b^2 x^2} c_n^2(x; \delta, a, b, c) + \frac{b^{2+\delta}}{a} \right\}. \end{aligned}$$

Для $x^2 \geq c_n(x; \delta, a, b, c)$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - F_n^y(x\sqrt{n}) &\leq \exp \left\{ -\frac{2c(b-c)}{b^2} c_n(x; \delta, a, b, c) + \frac{b^{2+\delta}}{a} \right\} \\ &= \left(\frac{a\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta}n^{\delta/2}} \right)^c \exp \left\{ \frac{b^{2+\delta}}{a} \right\}, \end{aligned}$$

откуда видно, что мажоранта для $1 - F_n(x\sqrt{n})$ не меньше, чем мажоранта для $1 - \Phi(x)$. Далее, учитывая (14), получаем

$$1 - F_n^y(x\sqrt{n}) \leq a \exp \left\{ \frac{b^{2+\delta}}{a} - \frac{2(b-c)(c-1)}{b^2} x^2 \right\} \frac{\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta}n^{\delta/2}}. \quad (16)$$

Суммируя оценки (15) и (16), приходим к (13). Теорема 1 доказана.

4. Случай (ii) — «умеренные» значения x . Переопределим величины

$$y = \gamma x \sqrt{n}, \quad h = \frac{(1 - \gamma)x}{\sqrt{n}}, \quad \gamma \in (0, 1).$$

Обозначим $S_n^* = X_1^* + \dots + X_n^*$ сумму независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения

$$\mathbf{P}(X_1^* < u) = \frac{1}{f(h)} \int_{-\infty}^u e^{ht} d\mathbf{P}(\bar{X}_1 < t).$$

Легко проверить справедливость следующих равенств:

$$1 - \Phi(x) = \exp \left\{ \frac{h^2 n}{2} \right\} \int_x^{+\infty} e^{-h\sqrt{nt}} d\Phi(t - h\sqrt{n}), \quad (17)$$

$$1 - F_n^y(x\sqrt{n}) = f^n(h) \int_x^{+\infty} e^{-h\sqrt{nt}} d\mathbf{P}(S_n^* < t\sqrt{n}). \quad (18)$$

Пусть без ограничения общности $x \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| 1 - \Phi(x) + (F_n(x\sqrt{n}) - F_n^y(x\sqrt{n})) + F_n^y(x\sqrt{n}) - 1 \right| \\ &\leq \left| F_n(x\sqrt{n}) - F_n^y(x\sqrt{n}) \right| + \left| 1 - \Phi(x) + F_n^y(x\sqrt{n}) - 1 \right|. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся неравенством леммы 2 и выражениями (17), (18):

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &\leq n\mathbf{P}(|X_1| > y) \\ &\quad + \left| \left(\exp \left\{ \frac{h^2 n}{2} \right\} - f^n(h) \right) \int_x^{+\infty} e^{-h\sqrt{nt}} d\mathbf{P}(S_n^* < t\sqrt{n}) \right| \\ &\quad + \left| \exp \left\{ \frac{h^2 n}{2} \right\} \int_x^{+\infty} e^{-h\sqrt{nt}} d(\Phi(t - h\sqrt{n}) - \mathbf{P}(S_n^* < t\sqrt{n})) \right|. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Маркова к первому слагаемому и интегрируя по частям последнее, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &\leq \frac{\beta_{2+\delta}}{\gamma^{2+\delta} x^{2+\delta} n^{\delta/2}} + |f^n(h) - e^{h^2 n/2}| \exp \{ -hx\sqrt{n} \} \cdot \mathbf{P}(S_n^* > x\sqrt{n}) \\ &\quad + 2 \exp \left\{ \frac{h^2 n}{2} - hx\sqrt{n} \right\} \cdot \sup_{u \geq x} \left| \mathbf{P}(S_n^* < u\sqrt{n}) - \Phi(u - h\sqrt{n}) \right| \\ &\equiv \frac{\beta_{2+\delta}}{\gamma^{2+\delta} x^{2+\delta} n^{\delta/2}} + I_1 \cdot I_2 + 2 \exp \left\{ \frac{h^2 n}{2} - hx\sqrt{n} \right\} \cdot I_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Сформулируем два утверждения, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Во-первых, если $x^2 \leq c_n(x; \delta, a, b, c)$, то (см. (ii))

$$L_n^{2+\delta} \leq \frac{x^{2+\delta}}{a} \exp \left\{ -\frac{2(b-c)}{b^2} x^2 \right\}, \quad (20)$$

а следовательно,

$$\frac{1}{n} \leq (L_n^{2+\delta})^{2/\delta} \leq \frac{x^{2+4/\delta}}{a^{2/\delta}} \exp \left\{ -\frac{4(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq (L_n^{2+\delta})^{1/\delta} \leq \frac{x^{1+2/\delta}}{a^{1/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\}, \quad (22)$$

$$n^{\delta/2-1} \leq (L_n^{2+\delta})^{(2-\delta)/\delta} \leq \frac{x^{(2+\delta)(2-\delta)/\delta}}{a^{(2-\delta)/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(2-\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\}, \quad (23)$$

$$n^{(\delta-1)/2} \leq (L_n^{2+\delta})^{(1-\delta)/\delta} \leq \frac{x^{(2+\delta)(1-\delta)/\delta}}{a^{(1-\delta)/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(1-\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\}. \quad (24)$$

Во-вторых, если $x^2 \geq K^2$, то при $x \geq \sqrt{r/(2s)}$, $r > 0$, или при $r \leq 0$

$$x^r \exp\{-sx^2\} \leq K^r \exp\{-sK^2\}, \quad s > 0. \quad (25)$$

Всюду далее мы будем предполагать, что параметры $b > c \geq 1$, $\gamma \in (0, 1)$, $K > 0$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{2(b-c)}{b^2} > \gamma(1-\gamma), \quad (26)$$

$$K^2 \geq \frac{b^2}{b-c}, \quad (27)$$

$$K^2 \geq \frac{4+5\delta}{2\delta} \left[\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right]^{-1}, \quad (28)$$

$$K^2 \geq \frac{4+5\delta}{4\delta} \left[\frac{2(1+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right]^{-1}, \quad (29)$$

$$K^2 \geq \frac{3}{2} \left[\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma) \right]^{-1}, \quad (30)$$

$$K^2 \geq \frac{4+3\delta}{2\delta} \left[\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - 2\gamma(1-\gamma) \right]^{-1}, \quad (31)$$

$$K^2 \geq \frac{2(1-\delta)}{\delta} \left[\frac{4(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right]^{-1}, \quad (32)$$

$$K^2 \geq \frac{3}{(1-\gamma)^2}, \quad (33)$$

$$K^2 \geq \frac{4}{1-\gamma^2}. \quad (34)$$

4.1. Оценка I_1 . Оценим выражение

$$I_1 = \left| f^n(h) - \exp \left\{ \frac{nh^2}{2} \right\} \right| \exp \{ -hx\sqrt{n} \}.$$

Применяя оценку (10) из леммы 1 и неравенство $|e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$, получим

$$\left| f^n(h) - \exp \left\{ \frac{nh^2}{2} \right\} \right| \leq \exp \left\{ \frac{h^2 n}{2} \right\} \left| \exp \left\{ \frac{n\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{2+\delta}} \right\} - 1 \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{n\beta_{2+\delta}}{y^{2+\delta}} \exp \left\{ \frac{n\beta_{2+\delta}e^{hy}}{y^{2+\delta}} + hy + \frac{h^2n}{2} \right\} \\
&= \frac{\beta_{2+\delta}}{(\gamma x)^{2+\delta}n^{\delta/2}} \exp \left\{ \frac{\beta_{2+\delta}e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{2+\delta}n^{\delta/2}} + \frac{(1-\gamma^2)x^2}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой (20):

$$\left| f^n(h) - \exp \left\{ \frac{nh^2}{2} \right\} \right| \leq \frac{\beta_{2+\delta}}{(\gamma x)^{2+\delta}n^{\delta/2}} \exp \left\{ \frac{(1-\gamma^2)x^2}{2} \right\} A_1(x),$$

где

$$\ln A_1(x) \equiv \frac{1}{a\gamma^{2+\delta}} \exp \left\{ - \left(\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \leq \ln A_1(K),$$

при $x \geq K$, если выполнено условие (26). Здесь и далее символами $A(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$, ... будут обозначаться положительные функции аргумента x , также зависящие от δ и параметров a , b , c , γ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{\gamma^{2+\delta}} \exp \left\{ - (1-\gamma)x^2 + (1-\gamma^2)x^2/2 \right\} A_1(x) \frac{\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta}n^{\delta/2}} \\
&\leq A_1(K)A_2(K) \frac{\beta_{2+\delta}}{x^{2+\delta}n^{\delta/2}},
\end{aligned}$$

где $A_2(x) = \gamma^{-(2+\delta)} \exp \{ -(1-\gamma)^2 x^2/2 \} \leq A_2(K)$ при $x \geq K$.

4.2. Оценка I_2 . Оценим выражение $I_2 \equiv \mathbf{P}(S_n^* > x\sqrt{n})$. С учетом (2) мы получаем

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left| \mathbf{P}(S_n^* < x\sqrt{n}) - \Phi \left(\frac{x\sqrt{n} - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D} S_n^*}} \right) \right| + \Phi \left(- \frac{x\sqrt{n} - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D} S_n^*}} \right) \\
&\leq 0.3041 \frac{\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3}{\sqrt{n}(\mathbf{D} X_1^*)^{3/2}} + \frac{0.3041}{\sqrt{n}} + \Phi \left(- \frac{x\sqrt{n} - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D} S_n^*}} \right).
\end{aligned}$$

Формально вместо первых двух слагаемых последнего выражения можно поставить минимум из $0.3041(\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3/(\mathbf{D} X_1^*)^{3/2} + 1)/\sqrt{n}$ и $0.33477(\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3/(\mathbf{D} X_1^*)^{3/2} + 0.429)/\sqrt{n}$ (обе оценки получены в [12], [40]), однако, как показывают вычисления, в экстремальном случае этот минимум достигается на той оценке, у которой абсолютная константа при ляпуновской дроби меньше (т.е. на оценке (2)), поэтому для краткости всюду далее мы будем использовать лишь оценку (2).

Для удобства дальнейших ссылок заметим, что в силу оценок (11), (20) и (21)

$$\begin{aligned}
f(h) &\geq 1 - \frac{h\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} = 1 - \frac{(1-\gamma)\beta_{2+\delta}}{\gamma^{1+\delta}x^\delta n^{1+\delta/2}} \\
&\geq 1 - \frac{(1-\gamma)x^{4+4/\delta}}{a^{1+2/\delta}\gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ - \frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} \\
&\equiv A_3(x) \geq A_3(K),
\end{aligned} \tag{35}$$

если, в соответствии с (25), $K^2 \geq (1 + \delta)/(2 + \delta) \cdot b^2/(b - c)$, а это условие вытекает из (27). Теперь оценим $(\mathbf{E} X_1^*)^2 = (m_1/f(h))^2$. С учетом (7), (20) и (22) имеем

$$\mathbf{E} (X_1^*)^2 \leq \frac{1}{A_3^2(K)} \left(h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right)^2 \leq A_4(x), \quad (36)$$

где

$$A_4(x) = \frac{1}{A_3^2(K)} \left[\frac{(1 - \gamma)x^{2+2/\delta}}{a^{1/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(b - c)}{\delta b^2} x^2 \right\} + \frac{x^{2+2/\delta}}{a^{1+1/\delta} \gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ -\left(\frac{2(1 + \delta)(b - c)}{\delta b^2} - \gamma(1 - \gamma) \right) x^2 \right\} \right]^2.$$

В соответствии с (25) заключаем, что $A_4(x) \leq A_4(K)$, если выполнены условия

$$K^2 \geq \frac{(1 + \delta)b^2}{2(b - c)}, \quad K^2 \geq \frac{(1 + \delta)}{\delta} \left[\frac{2(1 + \delta)(b - c)}{\delta b^2} - \gamma(1 - \gamma) \right]^{-1},$$

вытекающие соответственно из (27) и (29). Далее, с учетом (10) имеем

$$(f(h))^{-1} \geq 2 - f(h) \geq 1 - \frac{h^2}{2} - \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{2+\delta}} \geq 1 - A_5(x),$$

где

$$A_5(x) = \frac{(1 - \gamma)^2 x^{4+4/\delta}}{2a^{2/\delta}} \exp \left\{ -\frac{4(b - c)x^2}{\delta b^2} \right\} + \frac{x^{2+4/\delta}}{a^{1+2/\delta} \gamma^{2+\delta}} \exp \left\{ -\left(\frac{2(2 + \delta)(b - c)}{\delta b^2} - \gamma(1 - \gamma) \right) x^2 \right\}.$$

При этом $A_5(x) \leq A_5(K)$, если справедливы более сильные условия (27) и (28). Таким образом, используя нижнюю оценку (8) для $m_2 = f(h)\mathbf{E} (X_1^*)^2$ и неравенства (35), (20), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} X_1^* &= \mathbf{E} (X_1^*)^2 - (\mathbf{E} X_1^*)^2 \geq \frac{1}{f(h)} - \frac{\beta_{2+\delta}}{f(h)y^\delta} (1 + hy) - (\mathbf{E} X_1^*)^2 \\ &\geq 1 - A_5(K) - \frac{1}{A_3(K)} \cdot \frac{\beta_{2+\delta}}{(\gamma x)^\delta n^{\delta/2}} (1 + \gamma(1 - \gamma)x^2) - A_4(K) \\ &\geq 1 - A_6(x), \end{aligned}$$

где

$$A_6(x) = A_4(K) + A_5(K) + \frac{1}{A_3(K)} \cdot \frac{x^2}{a\gamma^\delta} (1 + \gamma(1 - \gamma)x^2) \exp \left\{ -\frac{2(b - c)x^2}{b^2} \right\}.$$

При этом $A_6(x) \leq A_6(K)$ в силу (27). Таким образом,

$$\mathbf{D}X_1^* \geq 1 - A_6(K) \equiv A_7(K). \quad (37)$$

Из леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X_1^* - \mathbf{E}X_1^*|^3 &\leq \min \left\{ L \mathbf{E}|X_1^*|^3, \mathbf{E}|X_1^*|^3 + 3 \mathbf{E}(X_1^*)^2 |\mathbf{E}X_1^*| \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}|X_1^*|(\mathbf{E}X_1^*)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Оценим входящие в правую часть моменты по лемме 1. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X_1^*|^3 &= \frac{m_3}{f(h)} \leq \frac{y^{1-\delta} e^{hy} \beta_{2+\delta}}{A_3(K)} \\ &= \frac{(\gamma x)^{1-\delta}}{A_3(K)} \exp\{\gamma(1-\gamma)x^2\} n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta} \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{A_3(K)} \cdot \frac{\gamma^{1-\delta} x^3}{a} \exp\left\{-\left(\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma)\right)x^2\right\}, \\ 3 \mathbf{E}(X_1^*)^2 |\mathbf{E}X_1^*| &= 3 \frac{m_2}{f(h)} \cdot \frac{m_1}{f(h)} \leq \frac{3}{A_3^2(K)} \left(1 + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^\delta}\right) \left(h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{n}}{A_3^2(K)} \left[\frac{(1-\gamma)x}{n} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{1+\delta} n^{1+\delta/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^\delta n^{\delta/2}} \cdot \frac{(1-\gamma)x}{n} + \frac{\beta_{2+\delta}^2 e^{2\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{1+2\delta} n^{1+\delta}} \right] \\ &\leq \frac{3\sqrt{n}}{A_3^2(K)} \left[\frac{(1-\gamma)x^{3+4/\delta}}{a^{2/\delta}} \exp\left\{-\frac{4(b-c)x^2}{\delta b^2}\right\} \right. \\ &\quad + \frac{x^{3+4/\delta}}{a^{1+2/\delta} \gamma^{1+\delta}} \exp\left\{-\left(\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma)\right)x^2\right\} \\ &\quad + \frac{(1-\gamma)x^{5+4/\delta}}{a^{1+2/\delta} \gamma^\delta} \exp\left\{-\left(\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma)\right)x^2\right\} \\ &\quad \left. + \frac{x^{5+4/\delta}}{a^{2+2/\delta} \gamma^{1+2\delta}} \exp\left\{-\left(\frac{4(1+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - 2\gamma(1-\gamma)\right)x^2\right\} \right] \\ &\equiv A_8(x) \sqrt{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X_1^*|(\mathbf{E}X_1^*)^2 &\leq \sqrt{\mathbf{E}(X_1^*)^2 (\mathbf{E}X_1^*)^2} \leq \left(\frac{m_2}{f(h)}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{m_1}{f(h)}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{A_3^{5/2}(K)} \left(1 + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^\delta}\right)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{n}}{A_3^{5/2}(K)} \left(\frac{1}{n} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^\delta n^{1+\delta/2}}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{(1-\gamma)x}{\sqrt{n}} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{1+\delta} n^{(1+\delta)/2}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sqrt{n}}{A_3^{5/2}(K)} \left(\frac{x^{2+4/\delta}}{a^{2/\delta}} \exp \left\{ -\frac{4(b-c)x^2}{\delta b^2} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{4+4/\delta}}{a^{1+2/\delta}\gamma^\delta} \exp \left\{ -\left(\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\frac{(1-\gamma)x^{2+2/\delta}}{a^{1/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{2+2/\delta}}{a^{1+1/\delta}\gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ -\left(\frac{2(1+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \right)^2 \\
&\equiv A_9(x)\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3 \leq A_{10}(x)\sqrt{n}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{10}(x) = \min \left\{ \frac{L\gamma^{1-\delta}x^3}{aA_3(K)} e^{-(2(b-c)/b^2 - \gamma(1-\gamma))x^2}, \right. \\
\left. \frac{\gamma^{1-\delta}x^3}{aA_3(K)} e^{-(2(b-c)/b^2 - \gamma(1-\gamma))x^2} + A_8(x) + A_9(x) \right\}.
\end{aligned}$$

В соответствии с (25) заключаем, что $A_{10}(x) \leq A_{10}(K)$, если справедливо более сильное условие (27) и условия (28), (29), (30). Следовательно, по неравенству (2) с учетом (37) и (38), а также с учетом (22), получаем

$$\begin{aligned}
\left| \mathbf{P} \left(\frac{S_n^* - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D} S_n^*}} < u \right) - \Phi(u) \right| &\leq 0.3041 \frac{\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3}{\sqrt{n}(\mathbf{D} X_1^*)^{3/2}} + \frac{0.3041}{\sqrt{n}} \\
&\leq 0.3041 \frac{A_{10}(K)}{A_7^{3/2}(K)} + 0.3041 \frac{x^{1+2/\delta}}{a^{1/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Теперь оценим величину

$$u \equiv \frac{x\sqrt{n} - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D} S_n^*}} = \frac{x - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*}{\sqrt{\mathbf{D} X_1^*}}.$$

Используя верхнюю оценку (7) для $m_1 \equiv \mathbf{E} \bar{X}_1 e^{h\bar{X}_1} = f(h) \mathbf{E} X_1^*$ и нижние оценки (11), (35) для $f(h)$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} X_1^* - h &= \frac{m_1}{f(h)} - h \leq \frac{1}{f(h)} \left(h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right) - h = \frac{(1-f(h))h}{f(h)} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{f(h)y^{1+\delta}} \\
&\leq \frac{h^2 \beta_{2+\delta}}{A_3(K)y^{1+\delta}} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{A_3(K)y^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}A_3(K)} \left(\frac{(1-\gamma)^2 x^2 \beta_{2+\delta}}{(\gamma x)^{1+\delta} n^{\delta/2+1}} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{1+\delta} n^{\delta/2}} \right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}A_3(K)} \left(\frac{(1-\gamma)^2 x^{5+4/\delta}}{a^{1+2/\delta}\gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(2+\delta)(b-c)x^2}{\delta b^2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{x}{a\gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ - \left(\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \equiv \frac{A_{11}(x)}{\sqrt{n}}. \quad (40)$$

В соответствии с (25) заключаем, что $A_{11}(x) \leq A_{11}(K)$ при $x \geq K$ в силу (27) и (30).

Далее нам понадобится следующая верхняя оценка для $\mathbf{D}X_1^*$, которую мы получим с учетом верхней оценки (8) для m_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X_1^* &\leq \mathbf{E}(X_1^*)^2 = \frac{m_2}{f(h)} \leq \frac{1}{A_3(K)} \left(1 + \frac{e^{hy}\beta_{2+\delta}}{y^\delta} \right) \\ &\leq \frac{1}{A_3(K)} \left(1 + \frac{e^{\gamma(1-\gamma)x^2}\beta_{2+\delta}}{(\gamma x)^\delta n^{\delta/2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{A_3(K)} \left(1 + \frac{x^2}{a\gamma^\delta} \exp \left\{ - \left(\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \right) \\ &\equiv A_{13}(x) \leq A_{13}(K), \end{aligned}$$

если $K^2 \geq (2(b-c)/b^2 - \gamma(1-\gamma))^{-1}$, что вытекает из (30).

Найдем верхнюю оценку для $\sqrt{n} \mathbf{E} X_1^* - x$. Учитывая (40), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^* - x &= \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^* - h\sqrt{n} + h\sqrt{n} - x = \sqrt{n}(\mathbf{E} X_1^* - h) - \gamma x \\ &\leq A_{11}(K) - \gamma K, \end{aligned}$$

т.е. при $x \geq K$

$$\frac{x - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*}{\sqrt{\mathbf{D}X_1^*}} \geq \frac{\gamma K - A_{11}(K)}{\sqrt{A_{13}(K)}} \equiv A_{14}(K). \quad (41)$$

Отсюда, учитывая также оценку (39) и условие (27), мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left| \mathbf{P}(S_n^* < x\sqrt{n}) - \Phi \left(\frac{x\sqrt{n} - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D}S_n^*}} \right) \right| + \Phi \left(- \frac{x - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*}{\sqrt{\mathbf{D}X_1^*}} \right) \\ &\leq 0.3041 \frac{A_{10}(K)}{A_7^{3/2}(K)} + 0.3041 \frac{K^{1+2/\delta}}{a^{1/\delta}} \exp \left\{ - \frac{2(b-c)}{\delta b^2} K^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi} A_{14}(K)} \exp \left\{ - \frac{A_{14}^2(K)}{2} \right\} \equiv A_{15}(K). \end{aligned} \quad (42)$$

Оценка (42) справедлива при $A_{14}(K) > 0$.

4.3. Оценка I_3 . Приступим к оцениванию величины $I_3 \equiv \sup_{u \geq x} |\mathbf{P}(S_n^* < u\sqrt{n}) - \Phi(u - h\sqrt{n})|$. Имеем

$$I_3 = \sup_{u \geq x} \left| \mathbf{P} \left(\frac{S_n^* - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D}S_n^*}} < \frac{u\sqrt{n} - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D}S_n^*}} \right) - \Phi \left(\frac{u\sqrt{n} - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D}S_n^*}} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \Phi\left(\frac{u - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*}{\sqrt{\mathbf{D} X_1^*}}\right) - \Phi(u - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*) \\
& + \Phi(u - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*) - \Phi(u - h\sqrt{n}) \Big| \\
\leq & \sup_{v \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\left(\frac{S_n^* - \mathbf{E} S_n^*}{\sqrt{\mathbf{D} S_n^*}} < v\right) - \Phi(v) \right| \\
& + \sup_{v \geq (x - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*)/\sqrt{\mathbf{D} X_1^*}} \left| \Phi(v) - \Phi(v\sqrt{\mathbf{D} X_1^*}) \right| \\
& + \sup_{u \geq x} \left| \Phi(u - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*) - \Phi(u - h\sqrt{n}) \right| = I_{31} + I_{32} + I_{33}.
\end{aligned}$$

Для оценки I_{31} воспользуемся неравенством (2), из которого получаем

$$I_{31} \leq 0.3041 \frac{\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3}{\sqrt{n}(\mathbf{D} X_1^*)^{3/2}} + \frac{0.3041}{\sqrt{n}}.$$

Величину $\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3$ оценим аналогично (38), только выделив множитель $n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta} = L_n^{2+\delta} \sqrt{n}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3 & \leq \min \{ L \mathbf{E} |X_1^*|^3, \mathbf{E} |X_1^*|^3 + 3 \mathbf{E} (X_1^*)^2 |\mathbf{E} X_1^*| \\
& \quad + \mathbf{E} |X_1^*| (\mathbf{E} X_1^*)^2 \}, \\
\mathbf{E} |X_1^*|^3 & = \frac{m_3}{f(h)} \leq \frac{y^{1-\delta} e^{hy} \beta_{2+\delta}}{A_3(K)} = \frac{(\gamma x)^{1-\delta}}{A_3(K)} \exp\{\gamma(1-\gamma)x^2\} n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta}, \\
3 \mathbf{E} (X_1^*)^2 |\mathbf{E} X_1^*| & = 3 \frac{m_2}{f(h)} \cdot \frac{m_1}{f(h)} \leq \frac{3}{A_3^2(K)} \left(1 + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^\delta} \right) \left(h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right) \\
& = \frac{3\sqrt{n}}{A_3^2(K)} \left[\frac{(1-\gamma)x}{n} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{1+\delta} n^{1+\delta/2}} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^\delta n^{\delta/2}} \cdot \frac{(1-\gamma)x}{n} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta_{2+\delta}^2 e^{2\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{1+2\delta} n^{1+\delta}} \right] \\
& \leq \frac{3n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta}}{A_3^2(K)} \left[\frac{(1-\gamma)x^{(2+\delta)(2-\delta)/\delta+1}}{a^{(2-\delta)/\delta}} \exp\left\{ -\frac{2(2-\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} \right. \\
& \quad + \frac{x^{4/\delta+1-\delta} + x^{4/\delta+3-\delta} \gamma(1-\gamma)}{a^{2/\delta} \gamma^{1+\delta}} \exp\left\{ -\left(\frac{4(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \\
& \quad \left. + \frac{x^{4/\delta+3-\delta}}{a^{1+2/\delta} \gamma^{1+2\delta}} \exp\left\{ -\left(\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - 2\gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \right] \\
& \equiv \widehat{A}_8(x) n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta}, \\
\mathbf{E} |X_1^*| (\mathbf{E} X_1^*)^2 & \leq \sqrt{\mathbf{E} (X_1^*)^2 (\mathbf{E} X_1^*)^2} = \sqrt{m_2/f(h)} \cdot \left(\frac{m_1}{f(h)} \right)^2 \\
& \leq \frac{1}{A_3^{5/2}(K)} \left(1 + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^\delta} \right)^{1/2} \cdot \left(h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta}}{A_3^{5/2}(K)} n^{\delta/2-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^\delta n^{1+\delta/2}} \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left((1-\gamma)x + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^{1+\delta} n^{\delta/2}} \right)^2 \\
&\leq \frac{n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta} x^{(2+\delta)(2-\delta)/\delta}}{A_3^{5/2}(K) a^{(2-\delta)/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(2-\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} \\
&\quad \times \left[\frac{x^{4/\delta+2}}{a^{2/\delta}} \exp \left\{ -\frac{4(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} + \frac{x^{4/\delta+4}}{a^{1+2/\delta} \gamma^\delta} \right. \\
&\quad \times \exp \left\{ -\left(\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \left. \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[x(1-\gamma) + \frac{x}{a \gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ -\left(\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \right]^2 \\
&\leq \hat{A}_9(x) n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{A}_9(x) &= \frac{x^{(2+\delta)(2-\delta)/\delta+2}}{A_3^{5/2}(K) a^{(2-\delta)/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(2-\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} \\
&\quad \times \left[\frac{K^{4/\delta+2}}{a^{2/\delta}} \exp \left\{ -\frac{4(b-c)}{\delta b^2} K^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{K^{4/\delta+4}}{a^{1+2/\delta} \gamma^\delta} \exp \left\{ -\left(\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) K^2 \right\} \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[1 - \gamma + \frac{1}{a \gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ -\left(\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) K^2 \right\} \right]^2
\end{aligned}$$

в силу (26), (27) и (28). Таким образом, $\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3 \leq \hat{A}_{10}(x) n^{(1-\delta)/2} \beta_{2+\delta}$, где

$$\hat{A}_{10}(x) = \min \left\{ \frac{L(\gamma x)^{1-\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{A_3(K)}, \frac{(\gamma x)^{1-\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{A_3(K)} + \hat{A}_8(x) + \hat{A}_9(x) \right\}.$$

Воспользуемся неравенством (37), чтобы оценить величину $\mathbf{D} X_1^*$, неравенством (24) и условием (27), чтобы оценить $n^{(\delta-1)/2}$. Тогда для I_{31} окончательно получим

$$\begin{aligned}
I_{31} &\leq 0.3041 \frac{\mathbf{E} |X_1^* - \mathbf{E} X_1^*|^3}{\sqrt{n} (\mathbf{D} X_1^*)^{3/2}} + \frac{0.3041}{\sqrt{n}} \\
&\leq 0.3041 \left(\frac{\hat{A}_{10}(x)}{A_7^{3/2}(K)} + \frac{K^{(2+\delta)(1-\delta)/\delta}}{a^{(1-\delta)/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(1-\delta)(b-c)}{\delta b^2} K^2 \right\} \right) \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.
\end{aligned}$$

Для I_{32} в силу (41) имеем

$$\begin{aligned} I_{32} &\equiv \sup_{v \geq (x - \sqrt{n} \mathbf{E} X_1^*) / \sqrt{\mathbf{D} X_1^*}} \left| \Phi(v) - \Phi(v \sqrt{\mathbf{D} X_1^*}) \right| \\ &\leq \sup_{v \geq A_{14}(K)} \left| \Phi(v) - \Phi(v \sqrt{\mathbf{D} X_1^*}) \right|. \end{aligned}$$

Используя утверждение 1° леммы 3 в предположении, что $A_{14}(K) > 0$, а также оценку $\min\{1, \sqrt{\mathbf{D} X_1^*}\} \geq \min\{1, \sqrt{A_7(K)}\} = \sqrt{A_7(K)}$ (см. (37)) и замечая, что функция $v\varphi(v)$ монотонно убывает при $v > 1$, получаем

$$I_{32} \leq \frac{1}{2} \max \left\{ \mathbf{D} X_1^* - 1, \frac{1 - \mathbf{D} X_1^*}{\mathbf{D} X_1^*} \right\} \cdot (v\varphi(v)) \Big|_{v = \max\{1, A_{14}(K)\sqrt{A_7(K)}}}.$$

Оценим $\mathbf{D} X_1^*$ (аналогично случаю I_2 , только будем выделять ляпуновскую дробь $\beta_{2+\delta}/n^{\delta/2}$). Во-первых,

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} X_1^*)^2 &\leq \frac{1}{A_3^2(K)} \left(h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right)^2 \\ &= \frac{\beta_{2+\delta} n^{\delta/2-1}}{n^{\delta/2} A_3^2(K)} \left((1-\gamma)x + \frac{\beta_{2+\delta} e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(x\gamma)^{1+\delta} n^{\delta/2}} \right)^2 \leq \hat{A}_4(x) L_n^{2+\delta}, \end{aligned}$$

где в силу (26)

$$\begin{aligned} \hat{A}_4(x) &= \frac{x^{(2+\delta)(2-\delta)/\delta+2}}{A_3^2(K) a^{(2-\delta)/\delta}} \exp \left\{ - \frac{2(2-\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} \\ &\times \left[(1-\gamma) + \frac{1}{a\gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ - \left(\frac{2(b-c)}{b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) K^2 \right\} \right]^2. \end{aligned}$$

Далее, по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(h)} &\geq 2 - f(h) \geq 1 - \frac{h^2}{2} - \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{2+\delta}} \geq 1 - \left(\frac{(1-\gamma)^2 x^2}{2n^{1-\delta/2}} + \frac{e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(x\gamma)^{2+\delta} n} \right) L_n^{2+\delta} \\ &\geq 1 - \hat{A}_5(x) L_n^{2+\delta}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_5(x) &= \frac{(1-\gamma)^2 x^{(2+\delta)(2-\delta)/\delta+2}}{2a^{(2-\delta)/\delta}} \exp \left\{ - \frac{2(2-\delta)(b-c)}{\delta b^2} x^2 \right\} \\ &+ \frac{x^{4/\delta-\delta}}{a^{2/\delta} \gamma^{2+\delta}} \exp \left\{ - \left(\frac{4(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\}, \end{aligned}$$

а также

$$m_2 = f(h) \mathbf{E} (X_1^*)^2 \geq 1 - \frac{\beta_{2+\delta}}{y^\delta} (1 + hy) = 1 - \frac{1 + \gamma(1-\gamma)x^2}{(x\gamma)^\delta} L_n^{2+\delta}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X_1^* &= \mathbf{E}(X_1^*)^2 - (\mathbf{E}X_1^*)^2 \geq \frac{1}{f(h)} - \frac{\beta_{2+\delta}}{f(h)y^\delta} (1 + hy) - (\mathbf{E}X_1^*)^2 \\ &\geq 1 - \frac{\hat{A}_5(x)\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}} - \frac{1}{A_3(K)(\gamma x)^\delta} (1 + \gamma(1 - \gamma)x^2)L_n^{2+\delta} - \hat{A}_4(x)L_n^{2+\delta} \\ &= 1 - \hat{A}_6(x)L_n^{2+\delta}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{A}_6(x) = \hat{A}_4(x) + \hat{A}_5(x) + \frac{1 + \gamma(1 - \gamma)x^2}{A_3(K)(\gamma x)^\delta}.$$

Замечая, что $\hat{A}_6(x) > 0$ и учитывая оценку $\mathbf{D}X_1^* \geq A_7(K)$ (см. (37)), получаем

$$\frac{1 - \mathbf{D}X_1^*}{\mathbf{D}X_1^*} \leq \frac{\hat{A}_6(x)}{A_7(K)} L_n^{2+\delta}.$$

С другой стороны, в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X_1^* - 1 &\leq \frac{m_2 - f(h)}{f(h)} \leq \frac{e^{hy}\beta_{2+\delta}}{f(h)y^\delta} + \frac{1 - f(h)}{f(h)} \leq \frac{\beta_{2+\delta}}{f(h)y^\delta} \left(e^{hy} + \frac{h}{y} \right) \\ &\leq \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}A_3(K)(\gamma x)^\delta} \left[\exp\{\gamma(1 - \gamma)x^2\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \gamma)x^{4/\delta+2}}{a^{2/\delta}\gamma} \exp\left\{ -\frac{4(b - c)x^2}{\delta b^2} \right\} \right] \leq A_{12}(x) \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}, \end{aligned}$$

где в силу (27)

$$\begin{aligned} A_{12}(x) &= \frac{1}{\gamma^\delta A_3(K)} \left[x^{-\delta} \exp\{\gamma(1 - \gamma)x^2\} + \frac{(1 - \gamma)K^{4/\delta-\delta+2}}{a^{2/\delta}\gamma} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left\{ -\frac{4(b - c)K^2}{\delta b^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для I_{32} окончательно получаем

$$I_{32} \leq \frac{1}{2} \max \left\{ A_{12}(x), \frac{\hat{A}_6(x)}{A_7(K)} \right\} L_n^{2+\delta} \cdot (v\varphi(v)) \Big|_{v=\max\{1, A_{14}(K)\sqrt{A_7(K)}\}}.$$

Наконец, рассмотрим величину I_{33} :

$$\begin{aligned} I_{33} &= \sup_{u \geq x} \left| \Phi(u - \mathbf{E}S_n^*/\sqrt{n}) - \Phi(u - h\sqrt{n}) \right| \\ &= \sup_{v \geq x - h\sqrt{n}} \left| \Phi(v + \sqrt{n}(h - \mathbf{E}X_1^*)) - \Phi(v) \right|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $x - h\sqrt{n} = x\gamma \geq \gamma K > 0$, и пользуясь утверждением 2° леммы 3, получим

$$I_{33} \leq \left| \sqrt{n}(\mathbf{E} X_1^* - h) \right| \varphi \left(\min \{ \gamma K + \sqrt{n}(h - \mathbf{E} X_1^*), \gamma K \} \right).$$

Воспользуемся нижней оценкой (7) для $m_1 \equiv \mathbf{E} \bar{X}_1 e^{h\bar{X}_1} = f(h) \mathbf{E} X_1^*$:

$$\begin{aligned} h - \mathbf{E} X_1^* &= h - \frac{m_1}{f(h)} = \frac{1}{f(h)} (hf(h) - m_1) \\ &\leq \frac{1}{f(h)} \left(h(f(h) - 1) + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} \left(1 + hy + \frac{(hy)^2}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Оценим выражение $h(f(h) - 1)$ с помощью неравенства (10):

$$\begin{aligned} h(f(h) - 1) &\leq \left(\frac{h^2}{2} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{2+\delta}} \right) h = (hy)^3 \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} \left(\frac{1}{2y^{2-\delta}} + \frac{e^{hy}}{y^4 h^2} \right) \\ &= (hy)^3 \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} \left(\frac{n^{\delta/2-1}}{2(\gamma x)^{2-\delta}} + \frac{e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(\gamma x)^4 n(1-\gamma)^2 x^2} \right) \\ &\leq (hy)^3 \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} A(x), \\ A(x) &\equiv \frac{x^{4/\delta-2}}{2a^{(2-\delta)/\delta} \gamma^{2-\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(2-\delta)(b-c)x^2}{\delta b^2} \right\} \\ &\quad + \frac{x^{4/\delta-4}}{a^{2/\delta} \gamma^4 (1-\gamma)^2} \exp \left\{ -\left(\frac{4(b-c)}{\delta b^2} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\}. \end{aligned}$$

При этом $A(x) \leq A(K)$, при $x^2 \geq K^2$, если выполнено более сильное условие (27) и условие (32). Далее, в предположении, что $A(K) \leq 1/6$, мы имеем

$$\begin{aligned} h - \mathbf{E} X_1^* &\leq \frac{1}{A_3(K)} \left(\frac{(hy)^3}{6} \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} \left(1 + hy + \frac{(hy)^2}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{A_3(K)} \left(1 + hy + \frac{(hy)^2}{2} + \frac{(hy)^3}{6} \right) \frac{\beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} \leq \frac{1}{A_3(K)} \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, при оценке величины I_2 было показано, что

$$\mathbf{E} X_1^* - h = \frac{1}{f(h)} \left((1 - f(h))h + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right) \leq \frac{1}{A_3(K)} \left(\frac{h^2 \beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right).$$

Сравнивая эту оценку с оценкой для $h - \mathbf{E} X_1^*$, мы получаем в силу (27)

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} X_1^* - h| &\leq \frac{1}{A_3(K)} \left(\frac{h^2 \beta_{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + \frac{\beta_{2+\delta} e^{hy}}{y^{1+\delta}} \right) \\ &\leq \frac{\beta_{2+\delta}}{\sqrt{n} A_3(K) n^{\delta/2}} \left(\frac{(1-\gamma)^2 x^2}{(x\gamma)^{1+\delta} n} + \frac{e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{(x\gamma)^{1+\delta}} \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{(1-\delta)/2} A_3(K)} \left[\frac{(1-\gamma)^2 K^{3-\delta+4/\delta}}{a^{2/\delta} \gamma^{1+\delta}} \exp \left\{ -\frac{4(b-c)}{\delta b^2} K^2 \right\} + \frac{\exp\{\gamma(1-\gamma)x^2\}}{\gamma^{1+\delta} x^{1+\delta}} \right] \equiv \frac{\hat{A}_{11}(x)}{\sqrt{n}} L_n^{2+\delta}.$$

С помощью полученной при рассмотрении I_2 оценки $\sqrt{n}(h - \mathbf{E} X_1^*) \geq -A_{11}(K)$, где $A_{11}(K) > 0$, величина I_{33} оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{33} &\leq |\sqrt{n}(\mathbf{E} X_1^* - h)| \varphi \left(\min \{ \gamma K - A_{11}(K), \gamma K \} \right) \\ &\leq \frac{\hat{A}_{11}(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\gamma K - A_{11}(K)]^2 \right\} L_n^{2+\delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку $I_3 \leq A_{16}(x) \beta_{2+\delta} / n^{\delta/2}$, где

$$\begin{aligned} A_{16}(x) &= 0.3041 \left(\frac{\hat{A}_{10}(x)}{A_7^{3/2}(K)} + \frac{K^{(2+\delta)(1-\delta)/\delta}}{a^{(1-\delta)/\delta}} \exp \left\{ -\frac{2(1-\delta)(b-c)}{\delta b^2} K^2 \right\} \right) \\ &\quad + \frac{\max\{1, A_{14}(K)\sqrt{A_7(K)}\}}{\sqrt{8\pi}} \max \left\{ A_{12}(x), \frac{\hat{A}_6(x)}{A_7(K)} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\max \left\{ 1, A_{14}(K)\sqrt{A_7(K)} \right\} \right]^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\hat{A}_{11}(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\gamma K - A_{11}(K)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

В итоге для каждого x из рассматриваемого диапазона (ii) справедливо неравенство

$$\Delta_n(x) \leq \frac{\beta_{2+\delta}}{\gamma^{2+\delta} |x|^{2+\delta} n^{\delta/2}} + I_1 \cdot I_2 + 2I_3 e^{-(1-\gamma^2)x^2/2} \leq A_{17}(x) \frac{\beta_{2+\delta}}{|x|^{2+\delta} n^{\delta/2}}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} A_{17}(x) &= A_{17}(x, \delta, a, b, c, \gamma) \\ &= \frac{1}{\gamma^{2+\delta}} + A_1(K) A_2(K) A_{15}(K) + 2A_{16}(|x|) |x|^{2+\delta} e^{-(1-\gamma^2)x^2/2}. \end{aligned}$$

Покажем, что для $x \geq K$ при всех рассматриваемых значениях δ, a, b, c, γ выполняется неравенство $A_{17}(x, \delta, a, b, c, \gamma) \leq A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma)$. Для этого, пользуясь соотношением (25), покажем, что для всех $x \geq K$

$$A_{16}(x) x^{2+\delta} \exp \left\{ -\frac{(1-\gamma^2)x^2}{2} \right\} \leq A_{16}(K) K^{2+\delta} \exp \left\{ -\frac{(1-\gamma^2)K^2}{2} \right\}.$$

Заметим прежде всего, что в силу (34) функция $x^{2+\delta} \exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$ монотонно убывает при $x \geq K$.

Далее, рассмотрим выражение $\hat{A}_{10}(x)x^{2+\delta}\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$. В него входят следующие слагаемые вида $x^r\exp\{-sx^2\}$:

$$x^3\exp\left\{-\frac{(1-\gamma)^2x^2}{2}\right\} \quad \text{и} \quad (\hat{A}_8(x) + \hat{A}_9(x))x^{2+\delta}\exp\left\{-\frac{(1-\gamma^2)x^2}{2}\right\}.$$

Первое слагаемое убывает в силу (33). В выражении $\hat{A}_8(x)x^{2+\delta}\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$ интересующие нас слагаемые имеют вид

$$\begin{aligned} & x^{(2+\delta)(2-\delta)/\delta}\exp\left\{-\frac{2(2-\delta)(b-c)}{\delta b^2}x^2\right\} \cdot x^{3+\delta}\exp\left\{-\frac{(1-\gamma^2)x^2}{2}\right\}, \\ & (x^{4/\delta+1} + x^{4/\delta+3})\exp\left\{-\frac{4(b-c)}{\delta b^2}x^2\right\} \cdot x^2\exp\left\{-\frac{(1-\gamma)^2x^2}{2}\right\}, \\ & x^{4/\delta+3}\exp\left\{-\left(\frac{2(2+\delta)(b-c)}{\delta b^2} - 2\gamma(1-\gamma)\right)x^2\right\} \cdot x^2\exp\left\{-\frac{(1-\gamma^2)x^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Первое из них убывает, если справедливо более сильное условие (27) и условие $K^2 \geq (3+\delta)/(1-\gamma^2)$, которое вытекает из (34). Второе слагаемое убывает, если $K^2 \geq (4+3\delta)/8 \cdot b^2/(b-c)$ и $K^2 \geq 2/(1-\gamma)^2$. При этом оба условия слабее уже перечисленных условий (27) и (33) соответственно. Условия (26), (31) и (34) гарантируют убывание третьего слагаемого.

В выражении $\hat{A}_9(x)x^{2+\delta}\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$ интересующий нас сомножитель имеет вид $x^{4/\delta}\exp\{-2(2-\delta)(b-c)x^2/(\delta b^2)\} \cdot x^4\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$, и он убывает, если выполнены условия (27) и (34).

В выражениях $A_{12}(x)x^{2+\delta}\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$ и $\hat{A}_{11}(x)\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$ интересующие нас слагаемые имеют вид $x^2\exp\{-(1-\gamma)^2x^2/2\}$ и $x\exp\{-(1-\gamma)^2x^2/2\}$ соответственно, и они убывают в силу (33).

Рассмотрим «наихудшие» слагаемые вида $x^r\exp\{-sx^2\}$, входящие в $\hat{A}_6(x)x^{2+\delta}\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$:

$$(x^{2-\delta} + \hat{A}_4(x) + \hat{A}_5(x))x^{2+\delta}\exp\left\{-\frac{(1-\gamma^2)x^2}{2}\right\}.$$

Первое слагаемое убывает в силу (34). Слагаемое вида $x^r\exp\{-sx^2\}$, присутствующее в выражении $\hat{A}_4(x)x^{2+\delta}\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$, имеет вид $x^{4/\delta}\exp\{-2(2-\delta)(b-c)x^2/(\delta b^2)\} \cdot x^4\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$, и оно убывает, если выполнены (27) и (34). Аналогичные рассуждения применимы к первому слагаемому вида $x^r\exp\{-sx^2\}$ в выражении $\hat{A}_5(x)x^{2+\delta}\exp\{-(1-\gamma^2)x^2/2\}$. Второе слагаемое этого выражения $x^{4/\delta}\exp\{-4(b-c)x^2/(\delta b^2)\} \cdot x^2\exp\{-(1-\gamma)^2x^2/2\}$ убывает в силу (27) и (33).

Резюмируя сказанное, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что $K > 0$, $K^2 \leq x^2 \leq c_n(x; \delta, a, b, c)$, $0 < \gamma < 1$, $a > 0$, $b > c \geq 1$ таковы, что $A(K) \leq 1/6$, $A_3(K) > 0$,*

$A_7(K) > 0$, $A_{14}(K) > 0$ и выполнены условия (26)–(34). Тогда для всех $n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$

$$|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma) L_n^{2+\delta}.$$

З а м е ч а н и е 2. Несложно убедиться, что при $K \rightarrow \infty$ величины $A(K) \rightarrow 0$, $A_3(K) \rightarrow 1$, $A_7(K) \rightarrow 1$, $A_{14}(K) \rightarrow \infty$, так что все условия теоремы 2, кроме (26), выполняются автоматически для любых фиксированных a, b, c, γ . Кроме того,

$$\inf_{a,b,c,\gamma} \lim_{K \rightarrow \infty} A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma) = \inf_{a,b,c,\gamma} \gamma^{-(2+\delta)} = \lim_{\gamma \rightarrow 1-} \gamma^{-(2+\delta)} = 1.$$

При $\gamma \rightarrow 1$ справедливость условия (26) также становится очевидной для любых фиксированных $b > c \geq 1$.

5. Основные результаты.

Теорема 3. Для константы $U(\delta)$ в неравенстве

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq U(\delta) L_n^{2+\delta}, \quad n \geq 1, \quad F \in \mathcal{F}_{2+\delta},$$

справедлива оценка

$$U(\delta) = \inf_{K,a,b,c,\gamma} \max \{C_0(\delta) K^{2+\delta}, A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma), P(\delta, a, b, c, K)\}, \quad (44)$$

где инфимум берется по множеству всех значений вспомогательных параметров a, b, c, γ, K , удовлетворяющих условиям теоремы 2, а также условиям $K \geq 1/\sqrt{2\pi}$ и $a \leq P(\delta, a, b, c, K)/\varkappa$ (величина $\varkappa = 0.54 \dots$ определена в лемме 4).

Следствие 1. Неравенство (4) при всех $n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ справедливо с $C(\delta) = U(\delta) + C_0(\delta)$.

Таблица 5. Оптимальные значения $K_0(\delta)$, $a_0(\delta)$, $b_0(\delta)$, $c_0(\delta)$, $\gamma_0(\delta)$, доставляющие минимум в (44), и соответствующие значения констант $U(\delta)$ и $C(\delta)$.

δ	$K_0(\delta)$	$a_0(\delta)$	$b_0(\delta)$	$c_0(\delta)$	$\gamma_0(\delta)$	$U(\delta)$	$C(\delta)$
1.0	3.3281	9.4865	1.5978	1.0144	0.4796	17.6355	18.1139
0.9	3.2705	9.3306	1.5999	1.0209	0.4704	16.7268	17.2651
0.8	3.2545	8.4107	1.6006	1.0211	0.4678	15.5801	16.1524
0.7	3.2466	8.4508	1.6408	1.0466	0.4665	14.4840	15.0866
0.6	3.2485	8.5886	1.6621	1.0699	0.4668	13.4299	14.0576
0.5	3.2683	8.0718	1.6918	1.0865	0.4700	12.3845	13.0258
0.4	3.3236	7.9432	1.7428	1.1165	0.4789	11.3263	11.9605
0.3	3.4014	7.6738	1.7685	1.1339	0.4810	10.3480	10.9675
0.2	3.4760	7.2242	1.7914	1.1466	0.4702	9.4467	10.0561
0.1	3.5472	6.9864	1.8266	1.1665	0.4616	8.6086	9.2114

В таблице 5 приведены значения величин $U(\delta)$ и $C(\delta)$ при некоторых $\delta \in (0, 1]$. Алгоритм оптимизации в (44) реализован с использованием пакета Matlab 7.10.0, при этом применялась процедура `fminsearch(...)` от аргументов K, a, b, c, γ . Оптимальные значения $K_0(\delta), a_0(\delta), b_0(\delta), c_0(\delta)$ и $\gamma_0(\delta)$, доставляющие минимум $U(\delta)$, также приведены в таблице 5.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что для любых значений параметров K, a, b, c, γ , удовлетворяющих условиям теоремы, при всех $x \in \mathbf{R}, n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ выполняется неравенство $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq \max\{C_0(\delta)K^{2+\delta}, A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma), P(\delta, a, b, c, K)\}L_n^{2+\delta}$. Зафиксируем K и x . Возможны два варианта:

1) $|x| \leq K$, тогда $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq C_0(\delta)K^{2+\delta}L_n^{2+\delta}$;

2) $|x| > K$, тогда для заданных $a, b, c, n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ имеются три возможности:

2.1) $c_n(x; \delta, a, b, c) \leq 0$, но это условие означает, что $aL_n^{2+\delta} \geq |x|^{2+\delta}$, откуда по лемме 4 получаем, что $\Delta_n(x) \leq \varkappa \leq P(\delta, a, b, c, K)/a \leq P(\delta, a, b, c, K)L_n^{2+\delta}/|x|^{2+\delta}$;

2.2) $0 < c_n(x; \delta, a, b, c) < x^2$, т.е. $x^2 \geq \max\{(2\pi)^{-1}, c_n(x; \delta, a, b, c)\}$ и мы находимся в условиях теоремы 1, согласно которой $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq P(\delta, a, b, c, x)L_n^{2+\delta} \leq P(\delta, a, b, c, K)L_n^{2+\delta}$, так как $|x| \geq K$, а функция $P(\delta, a, b, c, x)$ монотонно не возрастает по x ;

2.3) $x^2 \leq c_n(x; \delta, a, b, c)$. Учитывая также условие $x^2 \geq K^2$, по теореме 2 получаем $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma)L_n^{2+\delta}$.

Теорема 3 доказана.

Теоремы 1, 2 и 3 позволяют указать алгоритм нахождения при каждом $0 < \delta \leq 1$ и $x \geq 0$ значений функции $C(x, \delta)$, гарантирующей справедливость неравенства (6).

Теорема 4. Для любых $n \geq 1, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ и $K \geq 0$ неравенство $\sup_{|x| \geq K} |x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq C(K, \delta)L_n^{2+\delta}$ справедливо с

$$C(K, \delta) = \begin{cases} U(\delta), & K \leq K_0(\delta), \\ \inf_{a,b,c,\gamma} \max\{A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma), P(\delta, a, b, c, K)\}, & K > K_0(\delta), \end{cases}$$

где при каждом $K > K_0(\delta)$ минимум берется по множеству всех значений вспомогательных параметров a, b, c, γ , удовлетворяющих условиям теоремы 2, а также условию $a \leq P(\delta, a, b, c, K)/\varkappa$ (величина $\varkappa = 0.54 \dots$ определена в лемме 4), $K_0(\delta) \geq 1/\sqrt{2\pi}$ — оптимальное значение параметра K в (44).

Значения функции $C(x, \delta)$ для некоторых $\delta \in (0, 1]$ и $x > K_0(\delta)$ приведены в таблицах 6 и 7.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, при всех $K \geq 0$ $\sup_{|x| \geq K} |x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq U(\delta)L_n^{2+\delta}$ в силу теоремы 3.

Покажем, что при $K \geq K_0(\delta)$ для любых $n \geq 1, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}, |x| \geq K$ и a, b, c, γ , удовлетворяющих условиям теоремы, справедливо неравенство

$|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq \max\{A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma), P(\delta, a, b, c, K)\} L_n^{2+\delta}$. Имеются две возможности:

1) $c_n(K; \delta, a, b, c) \leq 0$. Тогда для $|x| \geq K$ возможны варианты:

1.1) $c_n(x; \delta, a, b, c) \leq 0$, но это означает, что $aL_n^{2+\delta}/|x|^{2+\delta} \geq 1$, откуда по лемме 4 получаем, что $\Delta_n(x) \leq \varkappa \leq P(\delta, a, b, c, K)/a \leq P(\delta, a, b, c, K)L_n^{2+\delta}/|x|^{2+\delta}$;

Таблица 6. Значения функции $C(x, \delta)$ из теоремы 4 для некоторых x и $\delta = 1.0, \dots, 0.6$.

$x \backslash \delta$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6
3.6	16.0383	14.9325	13.9304	13.0058	12.1428
3.7	15.6706	14.5953	13.6128	12.7035	11.8538
3.8	15.3061	14.2565	13.2949	12.4019	11.5664
3.9	14.9414	13.9203	12.9793	12.1043	11.2847
4.0	14.5837	13.5890	12.6694	11.8129	11.0099
5.0	11.4967	10.7357	10.0227	9.3529	8.7234
6.0	9.1885	8.6148	8.0740	7.5641	7.0839
7.0	7.4723	7.0385	6.6280	6.2396	5.8722
8.0	6.2210	5.8870	5.5697	5.2682	4.9819
9.0	5.3089	5.0452	4.7938	4.5540	4.3254
10.0	4.6334	4.4199	4.2156	4.0202	3.8332
15.0	2.9524	2.8536	2.7580	2.6653	2.5755
20.0	2.3099	2.2494	2.1903	2.1327	2.0764
50.0	1.4388	1.4220	1.4054	1.3890	1.3727
100	1.1565	1.1510	1.1456	1.1402	1.1349
200	1.0605	1.0585	1.0566	1.0546	1.0527
500	1.0252	1.0243	1.0235	1.0227	1.0219
1000	1.0131	1.0126	1.0122	1.0118	1.0114
∞	1+	1+	1+	1+	1+

1.2) $0 < c_n(x; \delta, a, b, c) \leq x^2$. Поскольку при этом также $x^2 \geq K^2 \geq (2\pi)^{-1}$, по теореме 1 заключаем, что $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq P(\delta, a, b, c, x) L_n^{2+\delta} \leq P(\delta, a, b, c, K) L_n^{2+\delta}$, т.к. $|x| \geq K$, а функция $P(\delta, a, b, c, x)$ монотонно не возрастает по x ;

1.3) $c_n(x; \delta, a, b, c) \geq x^2 \geq K^2$. Для этого случая по теореме 2 получаем $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma) L_n^{2+\delta}$.

2) $c_n(K; \delta, a, b, c) > 0$. Отсюда вытекает, что $c_n(x; \delta, a, b, c) > c_n(K; \delta, a, b, c) > 0$ для всех $|x| \geq K$, следовательно для $c_n(x; \delta, a, b, c)$ возможны два варианта:

2.1) $0 < c_n(x; \delta, a, b, c) \leq x^2$. Поскольку при этом также $x^2 \geq K^2 \geq (2\pi)^{-1}$, по теореме 1 заключаем, что $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq P(\delta, a, b, c, x) L_n^{2+\delta} \leq P(\delta, a, b, c, K) L_n^{2+\delta}$;

Таблица 7. Значения функции $C(x, \delta)$ из теоремы 4 для некоторых x и $\delta = 0.5, \dots, 0.1$.

$x \backslash \delta$	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
3.6	11.3303	10.5615	9.8322	9.1409	8.4863
3.7	11.0530	10.2962	9.5797	8.9017	8.2609
3.8	10.7798	10.0368	9.3343	8.6706	8.0441
3.9	10.5133	9.7848	9.0974	8.4482	7.8366
4.0	10.2539	9.5411	8.8687	8.2351	7.6384
5.0	8.1311	7.5747	7.0521	6.5612	6.1005
6.0	6.6315	6.2046	5.8036	5.4253	5.0699
7.0	5.5247	5.1961	4.8854	4.5918	4.3143
8.0	4.7101	4.4519	4.2068	3.9741	3.7532
9.0	4.1074	3.8997	3.7016	3.5129	3.3330
10.0	3.6542	3.4831	3.3194	3.1628	3.0130
15.0	2.4885	2.4043	2.3227	2.2437	2.1671
20.0	2.0216	1.9681	1.9159	1.8649	1.8152
50.0	1.3566	1.3407	1.3249	1.3093	1.2939
100	1.1296	1.1242	1.1189	1.1136	1.1083
200	1.0508	1.0488	1.0469	1.0449	1.0430
500	1.0211	1.0203	1.0195	1.0187	1.0179
1000	1.0109	1.0105	1.0101	1.0097	1.0093
∞	1+	1+	1+	1+	1+

2.2) $c_n(x; \delta, a, b, c) \geq x^2 \geq K^2$, и по теореме 2 получаем $|x|^{2+\delta} \Delta_n(x) \leq A_{17}(K, \delta, a, b, c, \gamma) L_n^{2+\delta}$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 можно получить асимптотические при $x \rightarrow \infty$ оценки функций $C_*(x, \delta)$ и $C^*(x, \delta)$.

Следствие 2. Для функций

$$C_*(x, \delta) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \sup_{|t| \geq x} |t|^{2+\delta} \Delta_n(t) / \ell, \quad x \geq 0,$$

$$C^*(x, \delta) = \sup_{n \geq 1} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \sup_{|t| \geq x} |t|^{2+\delta} \Delta_n(t) / L_n^{2+\delta}, \quad x \geq 0,$$

при всех $0 < \delta \leq 1$ справедливы асимптотические оценки $\lim_{x \rightarrow \infty} C_*(x, \delta) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} C^*(x, \delta) \leq 1$, при этом для $\delta = 1$ в обеих случаях имеет место знак равенства.

Доказательство. Неравенство $C_*(x, \delta) \leq C^*(x, \delta)$ очевидно при всех $x \geq 0$ и $0 < \delta \leq 1$. Из теоремы 4 для всех $0 < a \leq 1/\varkappa$, $b > c \geq 1$ и $0 < \gamma < 1$ таких, что $2(b-c)/b^2 > \gamma(1-\gamma)$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} C^*(x, \delta) &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} C(x, \delta) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} (A_{17}(x, \delta, a, b, c, \gamma) \vee P(\delta, a, b, c, x)) \\ &\leq \gamma^{-(2+\delta)} \vee b^{2+\delta} \end{aligned}$$

(знаком $\vee$ обозначен максимум). Выбирая теперь, например, $b = 1/\gamma$, $c = 2/(1 + \gamma)$ (можно убедиться, что такой выбор параметров b и c является допустимым при любых значениях $0 < \gamma < 1$) и устремляя $\gamma \rightarrow 1-$, окончательно получаем оценку $\lim_{x \rightarrow \infty} C^*(x, \delta) \leq 1$. При этом для случая $\delta = 1$ в последнем неравенстве имеет место знак равенства, поскольку из результата работы Чистякова [27] вытекает нижняя оценка $\lim_{x \rightarrow \infty} C_*(x, 1) \geq 1$. Следствие доказано.

В заключение авторы выражают глубокую признательность В.Ю. Королеву за стимулирующие дискуссии и постоянное внимание к работе, Ю.В. Прохорову за поддержку, а также Л. Падитцу за неоценимую библиографическую помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бикялис А. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. — Литов. матем. сб., 1966, т. 6, в. 3, с. 323–346.
2. Бикялис А. О точности аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин нормальным распределением. — Литов. матем. сб., 1971, т. 11, в. 2, с. 237–240.
3. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением. М.: Наука, 1982, 286 с.
4. Гавриленко С. В. Уточнение неравномерных оценок скорости сходимости распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону. — Информатика и ее применения, 2011, т. 5, в. 1, с. 12–24.
5. Григорьева М. Е., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена. — Информатика и ее применения, 2010, т. 4, в. 2, с. 78–85.
6. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
7. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. наук, 1953, в. 7, № 10, с. 29–38.
8. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.
9. Королев В. Ю., Попов С. В. Уточнение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при отсутствии моментов порядков, больших второго. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 4, с. 797–805.
10. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена. — Докл. РАН, 2010, т. 430, в. 6, с. 738–742.
11. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 671–695.
12. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 1, с. 25–56.
13. Мешалкин Л. Д., Rogozin Б. А. Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме. — В сб. «Предельные теоремы теории вероятностей». Ташкент: изд-во АН УзССР, 1963, с. 49–55.
14. Мирахмедов Ш. А. Об абсолютной постоянной в неравномерной оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1984, в. 4, с. 26–30.

15. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, в. 2, с. 231–254.
16. *Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм. — Информатика и ее применения, 2011, т. 5, в. 1, с. 39–45.
17. *Никулин В. Н.* Неравномерные оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 34, в. 4, с. 831–832.
18. *Осипов Л. В.* Уточнение теоремы Линдеберга. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 2, с. 339–342.
19. *Осипов Л. В., Петров В. В.* Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 2, с. 322–329.
20. *Падитц Л., Мирахмедов Ш. А.* Письмо в редакцию (Замечание к оценке абсолютной постоянной в неравномерной оценке скорости сходимости в ц.п.т.) — Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1986, в. 3, с. 80.
21. *Петров В. В.* Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона. — Докл. АН СССР, 1965, т. 160, в. 5, с. 1013–1015.
22. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
23. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
24. *Петров В. В.* Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме. — Записки научных семинаров ПОМИ, 2007, т. 341, с. 142–146.
25. *Розовский Л. В.* Неравномерная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Записки научных семинаров ПОМИ, 2007, т. 351, с. 238–241.
26. *Тюрин И. С.* Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова. — Успехи матем. наук, 2010, т. 65, в. 3, с. 201–202.
27. *Чистяков Г. П.* Об одной задаче А. Н. Колмогорова. — Записки научных семинаров ПОМИ, 1990, т. 184, с. 289–319.
28. *Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 1, с. 3–28.
29. *Шевцова И. Г.* Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца. — Теория вероятностей и ее применения, 2010, т. 55, в. 2, с. 271–304.
30. *Bening V., Korolev V.* Generalized Poisson Models and their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002.
31. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
32. *Chen L. H. Y., Shao Q. M.* A non-uniform Berry–Esseen bound via Steins method. — Probability Theory and Related Fields, 2001, v. 120, p. 236–254.
33. *Cramér H.* Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. — Actualités scientifiques et industrielles, 1938, № 736, Paris.
34. *Esseen C.-G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
35. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
36. *Esseen C.-G.* Fourier analysis of distribution functions: a mathematical study of the Laplace-Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.
37. *Hoeffding W.* The extrema of the expected value of a function of independent random variables. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, p. 239–325.
38. *Heyde C. C.* A nonuniform bound on convergence to normality. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 5, p. 903–907.
39. *Katz M. L.* Note on the Berry–Esseen theorem. — Ann. Math. Statist., 1963, v. 34, p. 1107–1108.
40. *Korolev V., Shevtsova I.* An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. — Scandinavian Actuarial Journal, 2010, Online first: <http://www.informaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370>, 04 June 2010.

41. Королев В. Ю., Попов С. В. Уточнение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при ослабленных моментных условиях. — Докл. РАН, 2012 (в печати).
42. Michel R. On the accuracy of nonuniform Gaussian approximation to the distribution functions of sums of independent and identically distributed random variables. — Z. Wahrsch. verw. Geb., 1976, v. 35, № 4, p. 337–347.
43. Michel R. On the constant in the nonuniform version of the Berry–Esseen theorem. — Z. Wahrsch. verw. Geb., 1981, v. 55, p. 109–117.
44. Michel R. On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution. — Insurance: Mathematics and Economics, 1993, v. 13, № 1, p. 35–37.
45. Nakata T. A nonuniform bound on convergence to normality for independent random variables. — Advances in Applied Probability, 1977, v. 11, № 2, p. 285–286.
46. Neammanee K. On the constant in the nonuniform version of the Berry–Esseen theorem. — International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005, v. 12, p. 1951–1967.
47. Neammanee K., Thongtha P. Improvement of the non-uniform version of Berry–Esseen inequality via Paditz–Siganov theorems. — Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2007, v. 8, № 4, p. 92.
48. Nikulin V. An algorithm to estimate a nonuniform convergence bound in the central limit theorem, 2010, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1004/1004.0552v1.pdf
49. Nikulin V., Paditz L. A note on nonuniform CLT–bounds. — 7th Vilnius Conference on Probability Theory and 22nd European Meeting of Statisticians. Abstracts. 1998, p. 358–359.
50. Paditz L. Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. der TU Dresden, 1976, v. 25, p. 1169–1177.
51. Paditz L. Über die Annäherung der Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen unter besonderer beachtung der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. — Dissertation A. Technische Universität Dresden. Dresden, 1977.
52. Paditz L. Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Voraussetzung einseitiger Momente. — Math. Nachr., 1978, v. 82, p. 131–156.
53. Paditz L. Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. der TU Dresden, 1979, v. 28, № 5, p. 1197–1200.
54. Paditz L. Bemerkungen zu einer Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — In: Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List», 1980, v. 27, № 4, p. 829–837.
55. Paditz L. Einseitige Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz. — Math. Operationsforsch. und Statist., ser. Statist., 1981, v. 12, p. 587–604.
56. Paditz L. On error–estimates in the central limit theorem for generalized linear discounting. — In: Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Statistics, 1984, v. 15, № 4, p. 601–610.
57. Paditz L. Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List». Dresden. 1986, v. 33, № 2, p. 399–404.
58. Paditz L. On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics (Berlin: Akademie-Verlag), 1989, v. 20, № 3, p. 453–464.
59. Rychlik Z. Nonuniform central limit bounds and their applications. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 3, с. 646–652.
60. Thongtha P., Neammanee K. Refinement on the constants in the non-uniform version of the Berry–Esseen theorem. — Thai Journal of Mathematics, 2007, v. 5, p. 1–13.
61. Tysiak W. Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen-Abschätzungen. Dissertation. Wuppertal, 1983.

Поступила в редакцию
11.III.2011