Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, В. Н. Соболев, О новых формах асимптотических разложений в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 1, 124–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:08:45

© 2012 г.

СЕНАТОВ В. В.^{*}, СОБОЛЕВ В. Н.^{**}О НОВЫХ ФОРМАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ¹⁾

Получены новые асимптотические разложения для плотностей в центральной предельной теореме. Приведены явные выражения для главных частей разложения Эджворта–Крамера в терминах моментов Чебышёва–Эрмита.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным моментом $\beta_{m+2} = \mathbf{E}|X_1|^{m+2}$, где m — целое число, $m \geq 2$. Обозначим через P общее распределение этих случайных величин и P_n — распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$. Нас интересуют асимптотические разложения в центральной предельной теореме (ЦПТ) для плотности p_n распределения P_n , при этом мы предполагаем, что $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty$ для некоторого положительного числа ν , где $f(t)$ — характеристическая функция распределения P . Сходимость этого интеграла гарантирует существование непрерывной плотности $p_n(x)$ при всех $n \geq \nu$, кроме того, эту плотность можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Для построения асимптотических разложений плотности p_n мы будем использовать моменты Чебышёва–Эрмита распределения P , которые определяются равенствами

$$\theta_k = \theta_k(P) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) P(dx),$$

^{*}Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: v.senatov@yandex.ru

^{**}Российский государственный торгово-экономический университет, кафедра высшей и прикладной математики, ул. Смольная, 36, 125993 Москва, Россия; e-mail: sobolev_vn@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00362).

где $H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x)$, $k = 0, 1, \dots$, — многочлены Чебышёва–Эрмита. Здесь и далее $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — плотность стандартного нормального закона Φ . При выполнении условий, наложенных на распределение P , величины θ_k существуют для всех $k \leq m+2$ и $\theta_1 = \theta_2 = 0$, а $\theta_0 = 1$ для любого распределения P .

В [2] получены асимптотические разложения для плотностей p_n , $n \geq \max(\nu, m+1)$, в том числе разложения, называемые короткими разложениями Грама–Шарлье:

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l(P_n)}{l!} H_l(x) \varphi(x) + \sum_{l=m+2, l \neq 3m-4}^{3m-3} \frac{\theta_l^{(m+1)}(P_n)}{l!} H_l(x) \varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right) \quad (1)$$

при $n \rightarrow \infty$, причем для величин $O(1/n^{m/2})$ указаны явные оценки. Моменты Чебышёва–Эрмита $\theta_l(P_n)$ распределения P_n для $l = 3, \dots, m+1$ вычисляются с помощью моментов Чебышёва–Эрмита $\theta_3, \dots, \theta_{m+1}$ распределения P по формулам

$$\frac{\theta_l(P_n)}{l!} = \sum \frac{n!}{(n - (k_3 + \dots + k_l))! k_3! \dots k_l!} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}}\right)^{k_3} \dots \left(\frac{\theta_l}{l! n^{l/2}}\right)^{k_l},$$

где суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_3, \dots, k_l$ таким, что $3k_3 + \dots + lk_l = l$. Известно, что $\theta_l(P_n) = O(1/n^{l/2 - [l/3]})$ при $n \rightarrow \infty$. Квазимоменты $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$, $l = m+2, \dots, 3m-3$, Чебышёва–Эрмита распределения P_n вычисляются по той же формуле, в которой следует оставить только слагаемые, связанные с величинами θ_j , $j \leq m+1$; эти квазимоменты при росте n убывают так же, как и $\theta_l(P_n)$.

Суммы слагаемых в правых частях равенств вида (1), для которых указаны явные выражения, мы будем называть главными частями асимптотических разложений, а разности между $p_n(x)$ и главными частями разложений — остаточными частями.

Величины $\theta_l(P_n)$ и $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$ при $l \geq 6$ являются суммами слагаемых, которые при росте n убывают с различными скоростями (явный вид величин $\theta_l(P_n)$ для $l \leq 12$ указан в приложении к [2]), причём среди слагаемых, формирующих $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$, есть слагаемые, убывающие при росте n быстрее $1/n^{m/2}$. Например, при $m \geq 4$ и $l = 3m-3$ одним из наборов неотрицательных целых чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$ таких, что $3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} = 3m-3$, является набор, в котором $k_3 = m-1$, а числа $k_4, \dots, k_{m+1}$ — нули. Этому набору соответствует слагаемое

$$C_n^{m-1} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}}\right)^{m-1} = \frac{n(n-1) \dots (n-m+2)}{(m-1)! n^{m-1}} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}}\right)^{m-1}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^{m-1} \frac{1}{n^{(m-1)/2}} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{m-2}{n} \right),$$

входящее в $\theta_{3m-3}^{(m+1)}(P_n)/(3m-3)!$ и являющееся, в свою очередь, суммой $(1/(m-1)!)(\theta_3/3!)^{m-1}/n^{(m-1)/2}$ и слагаемых, убывающих при росте n быстрее $1/n^{(m-1)/2}$.

При желании мы можем записать все слагаемые из суммы по $l \geq m+2$ в правой части (1) в виде сумм величин $(C(P)/n^{j/2})H_k(x)\varphi(x)$, $j \geq 2$, $k \geq m+2$, где числа $C(P)$ не зависят от n , и перенести те слагаемые, где $j \geq m$, из главной части разложения в остаточную часть. Так мы придем к разложению

$$\begin{aligned} p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l(P_n)}{l!} H_l(x)\varphi(x) \\ + \sum_{l=m+2, l \neq 3m-4}^{3m-3} \frac{\tilde{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)}{l!} H_l(x)\varphi(x) + R, \end{aligned} \quad (2)$$

где $R = O(1/n^{m/2})$ при $n \rightarrow \infty$. Это разложение мы будем называть разложением Эджворта–Крамера. Представив все слагаемые из сумм по $3 \leq l \leq m+1$ и по $m+2 \leq l \leq 3m-3$, $l \neq 3m-4$, главной части разложения (2) в виде сумм величин $(C(P)/n^{j/2})H_k(x)\varphi(x)$, $1 \leq j \leq m-1$, $3 \leq k \leq 3m-3$, $k \neq 3m-4$, и собрав вместе все слагаемые с одним и тем же значением j , мы получим более привычный вид разложения Эджворта–Крамера

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{K_j(x)}{n^{j/2}} \varphi(x) + R, \quad (3)$$

где $K_j(x)$ — линейные комбинации многочленов Чебышёва–Эрмита с коэффициентами, зависящими только от моментов распределения P . Во избежание недоразумений отметим, что численные значения как правых частей, так и величин R в (2) и (3) совпадают. Главные части этих разложений отличаются друг от друга только способом упорядочения слагаемых. При этом стоит отметить, что один и тот же многочлен $H_k(x)$, $k \geq 6$, участвует в формировании нескольких функций $K_j(x)$, $j \geq 2$. Например, при $m \geq 5$ в главную часть разложения (1) входит функция $H_6(x)\varphi(x)$ с коэффициентом

$$\frac{\theta_6(P_n)}{6!} = \frac{\theta_6}{6!n^2} + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n}.$$

Поэтому в разложении (3) две функции, а именно K_2 и K_4 , будут содержать многочлен H_6 . В функцию K_2 этот многочлен входит с коэффициентом $(\theta_3/3!)^2/2$, а в функцию K_4 — с коэффициентом $\theta_6/6! - (\theta_3/3!)^2/2$.

Разложение (3) является самой привычной, но одновременно и самой сложной формой записи асимптотических разложений в ЦПТ. Здесь мы имеем в виду, что если в (3) записать функции $K_j(x)$ в явном виде (указанном ниже в теореме 2), то получится асимптотическое разложение плотности $p_n(x)$, наиболее громоздкое по сравнению с другими известными разложениями.

Точность, которую гарантируют разложения (1)–(3), увеличивается (во всяком случае при больших n) при увеличении m (здесь мы считаем, что распределение P имеет достаточно большое число моментов). Взглянув на явный вид главных частей асимптотических разложений (хотя бы из [2]), можно заметить, что для получения все более точных разложений необходимо использовать все более сложные комбинации моментных характеристик распределения P . При $m = 2$ главные части разложений содержат только момент θ_3 (первые степени моментов Чебышёва–Эрмита более высоких порядков участвуют в формировании главных частей разложений при всех $m \geq 2$), при $m \geq 3$ главные части разложений содержат произведения пар, в том числе квадраты, моментов Чебышёва–Эрмита (при $m = 3$ в главных частях появляется θ_3^2), при $m \geq 4$ главные части разложений содержат произведения троек моментов и т.д. Это обстоятельство наводит на мысль о построении асимптотических разложений, в которых упорядочение слагаемых $(C(P)/n^{j/2})H_k(x)\varphi(x)$ в главной части ведется по количеству сомножителей (моментов Чебышёва–Эрмита), входящих в величины $C(P)$. Эта идея реализована в теореме 1, формулировка и доказательство которой приведены ниже. По-видимому, форма главной части асимптотического разложения, указанная в этой теореме, является одной из простейших среди известных. С помощью теоремы 1 мы получим явные выражения многочленов $K_j(x)$ из (3) в терминах моментов Чебышёва–Эрмита.

Далее нам понадобятся дополнительные обозначения.

Пусть пара (μ, T) , где $T > 0$, а $\mu = \mu(t)$ — чётная функция, удовлетворяющая условию $e^{-t^2/2} \leq \mu(t) \leq 1$ для всех действительных t , такова, что $|f(t)| \leq \mu(t)$ при $|t| \leq T$. О выборе конкретных пар (μ, T) см. [2, гл. 4, § 6]. Обозначим

$$B_{k,n-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt.$$

Нетрудно показать, что для распределения P с конечным четвертым моментом пару (μ, T) можно подобрать так, что $B_{k,n-1} \rightarrow B_k$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $k > 0$, где B_k — абсолютный момент порядка k стандартного нормального закона, деленный на $\sqrt{2\pi}$.

Нетрудно проверить, что моменты θ_k Чебышёва–Эрмита распределения P и его степенные моменты $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(dx)$, $k \leq m+2$, связаны

равенствами

$$\frac{\theta_k}{k!} = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{\alpha_{k-2j}}{(k-2j)!} \frac{(-1)^j}{j! 2^j}. \quad (4)$$

Обозначим $\|\theta_k\|$ величины, определенные при четных k равенством (4), в котором числа $(-1)^j$ заменяются на 1, а при нечетных k равенством (4), в котором, помимо этого, величины α_{k-2j} , $j \geq 1$, заменяются их абсолютными значениями, а α_k заменяется на β_k . Обозначим $\|\theta_k^{(s)}\|$, $k \leq m+2$, $s \leq m+1$, величины, которые определяются теми же равенствами, что и $\|\theta_k\|$, но в правых частях этих равенств сохраняются лишь слагаемые, связанные с моментами порядков, не больших s .

В [2, гл. 4, § 7] получено следующее представление:

$$\begin{aligned} e^{t^2/2} f(t) &= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\theta_k}{k!} (it)^k + \gamma e^{t^2/2} \frac{\|\theta_{m+2}\|}{(m+2)!} t^{m+2} \\ &+ \gamma e^{t^2/2} \frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} t^{m+3}, \quad -\infty < t < \infty, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\gamma = \gamma(t)$ — непрерывные комплекснозначные функции такие, что $|\gamma| \leq 1$.

Следствием этого разложения являются равенства

$$\begin{aligned} e^{t^2/2} f(t) &= \sum_{k=0}^s \frac{\theta_k}{k!} (it)^k + \gamma e^{t^2/2} \frac{\|\theta_{s+1}\|}{(s+1)!} t^{s+1} \\ &+ \gamma e^{t^2/2} \frac{\|\theta_{s+2}\|}{(s+2)!} t^{s+2}, \quad -\infty < t < \infty, \end{aligned}$$

для натуральных $s \leq m$. Функции γ , $|\gamma| \leq 1$, в различных местах работы, вообще говоря, различны.

Нам понадобятся идеальные метрики ζ_s , $s > 0$, введенные В. М. Золотарёвым (см., например, [1]), при этом мы будем использовать только расстояние $\zeta_3 = \zeta_3(P, \Phi)$, которое можно определить как

$$\sup \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x)(P(dx) - \Phi(dx)) \right| : u \in \mathfrak{F}_3 \right\},$$

где $\mathfrak{F}_3$ — множество действительных трижды дифференцируемых функций $u(x)$, $-\infty < x < \infty$, таких, что $|u^{(3)}(x)| \leq 1$. Можно показать, что величина ζ_3 не изменится, если вместо множества действительных функций $\mathfrak{F}_3$ рассматривать аналогичное множество комплекснозначных функций, и почти очевидно, что для любого действительного t справедливо неравенство $|f(t) - e^{-t^2/2}| \leq |t|^3 \zeta_3$. Отметим, что $|\theta_3|/3! \leq \zeta_3$, причем это неравенство неулучшаемо в том смысле, что для любого числа $0 < c < 1$ существует распределение P с нулевым средним и единичной дисперсией такое, что $|\theta_3|/3! > c\zeta_3$.

Лемма. При любом $n \geq m+1$ для разности характеристических функций $f^n(t/\sqrt{n})$ и $e^{-t^2/2}$ при $|t| \leq T\sqrt{n}$ справедливо представление:

$$f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} = \sum_{s=1}^{m-1} C_n^s \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \Theta_{s,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l e^{-t^2/2} + \sum_{s=1}^{m-1} r_s + \sum_{s=1}^{m-1} R_s. \quad (6)$$

Здесь $\Theta_{s,l} = \sum_{t_1+\dots+t_s=l} \theta_{t_1} \dots \theta_{t_s} / (t_1! \dots t_s!)$, где суммирование ведется по наборам неотрицательных целых чисел $t_1, \dots, t_s$ таким, что $t_1 + \dots + t_s = l$, $s = 1, \dots, m-1$, $l = 3s, \dots, m-1+2s$, и $t_j \geq 3$, $j = 1, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} |r_1| &\leq \frac{1}{n^{m/2}} \left(\frac{\|\theta_{m+2}\|}{(m+2)!} |t|^{m+2} + \frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)! \sqrt{n}} |t|^{m+3} \right) \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right), \\ |r_s| &\leq \frac{1}{s! n^{m/2}} \sum_{l=3(s-1)}^{m-2+2(s-1)} \|\Theta_{s-1,l}\| \\ &\quad \times \left(\frac{\|\theta_{m+2s-l}\|}{(m+2s-l)!} |t|^{m+2s} + \frac{\|\theta_{m+2s+1-l}\|}{(m+2s+1-l)! \sqrt{n}} |t|^{m+2s+1} \right) \\ &\quad \times \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right), \quad s = 2, \dots, m-1, \\ |R_s| &\leq \frac{1}{(s+1)! n^{m/2}} \|\Theta_{s,m-1+2s}\| \zeta_3 |t|^{m+2s+2} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right), \\ &\quad s = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

а величины $\|\Theta_{s,l}\|$ определяются аналогично $\Theta_{s,l}$ с заменой величин $\theta_{t_1}, \dots, \theta_{t_s}$ на их абсолютные значения.

Доказательство. Рассмотрим разность $f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}$, которую можно записать в виде $f^n(t/\sqrt{n}) - g^n(t/\sqrt{n})$, где $g(t) = e^{-t^2/2}$. В рассуждениях, проводимых ниже, мы — там, где это не приводит к недоразумениям — будем опускать аргументы некоторых функций, все эти аргументы суть $t/\sqrt{n}$. Из хорошо известного равенства $a^n - b^n = (a-b) \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b^j$, справедливого для любых комплексных чисел a и b , следует, что

$$\begin{aligned} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= f^n - g^n = (f - g) \sum_{j_1=0}^{n-1} f^{n-j_1-1} g^{j_1} \\ &= \psi \sum_{j_1=0}^{n-1} f^{n-j_1-1} g^{j_1+1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\psi = \psi(t/\sqrt{n}) = e^{t^2/(2n)} f(t/\sqrt{n}) - 1$. Из представления функции $e^{t^2/2} f(t)$, о котором говорилось выше, следует, что правая часть (7) равна

$$\left(\sum_{t_1=3}^{m+1} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1} + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+2}\|}{(m+2)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{m+3} \sum_{j_1=0}^{n-1} f^{n-j_1-1} g^{j_1+1} \\
& = \left(\sum_{t_1=3}^{m+1} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{t_1} \right) \sum_{j_1=0}^{n-1} f^{n-j_1-1} g^{j_1+1} + r_1,
\end{aligned}$$

где

$$|r_1| \leq \left(\frac{\|\theta_{m+2}\|}{(m+2)!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+2} + \frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+3} \right) n \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Так как

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1=0}^{n-1} f^{n-j_1-1} g^{j_1+1} &= \sum_{j_1=0}^{n-2} (f^{n-j_1-1} - g^{n-j_1-1}) g^{j_1+1} + \sum_{j_1=0}^{n-1} g^n \\
&= \sum_{j_1=0}^{n-1} g^n + \sum_{j_1=0}^{n-2} \left((f-g) \sum_{j_2=0}^{n-j_1-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_2} \right) g^{j_1+1} \\
&= \sum_{j_1=0}^{n-1} g^n + (f-g) \sum_{j_1=0}^{n-2} \sum_{j_2=0}^{n-j_1-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+1} \\
&= \sum_{j_1=0}^{n-1} g^n + \psi \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-2-j_1-j_2} g^{j_1+j_2+2},
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
f^n - g^n &= \left(\sum_{t_1=3}^{m+1} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{t_1} \right) \sum_{j_1=0}^{n-1} g^n + \left(\sum_{t_1=3}^m \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{t_1} \psi \right) \\
&\quad \times \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2} + r_1 + R_1,
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
|R_1| &\leq \frac{\|\Theta_{1,m+1}\|}{(m+1)!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+1} \left| (f-g) \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+1} \right| \\
&\leq \frac{\|\Theta_{1,m+1}\|}{(m+1)!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+1} C_n^2 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \zeta_3 \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^3.
\end{aligned}$$

Чтобы убедиться в справедливости последнего неравенства, достаточно заметить, что для любого натурального $l < n$ количество наборов неотрицательных целых чисел $j_1, \dots, j_l$ таких, что $0 \leq j_1 + \dots + j_l \leq n-l$, равно C_n^l .

При $m = 2$ второе слагаемое в правой части (8) следует опустить, при этом (8) принимает вид

$$f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} = \frac{\theta_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} e^{-t^2/2} + R_1 + r_1,$$

где

$$|R_1| \leq \frac{1}{2n} \frac{\|\Theta_{1,3}\| \zeta_3}{3!} |t|^6 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right),$$

$$|r_1| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\|\theta_4\|}{4!} |t|^4 + \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5! \sqrt{n}} |t|^5 \right) \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right),$$

что совпадает с утверждением леммы. Отметим, что $\|\Theta_{1,3}\| = |\theta_3|/3!$.

Далее мы считаем, что $m \geq 3$.

Рассмотрим сумму по $3 \leq t_1 \leq m$ из второго слагаемого в (8). Ее можно записать в виде

$$\sum_{t_1=3}^m \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1} \left(\sum_{t_2=3}^{m+3-t_1} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_2} + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+4-t_1}\|}{(m+4-t_1)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+4-t_1} \right. \\ \left. + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+5-t_1}\|}{(m+5-t_1)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+5-t_1} \right).$$

Отсюда следует, что второе слагаемое в правой части (8) равно

$$\left(\sum_{t_1=3}^m \sum_{t_2=3}^{m+3-t_1} \frac{\theta_{t_1} \theta_{t_2}}{t_1! t_2!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+t_2} \right) \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2} + r_2,$$

где

$$|r_2| \leq \left(\sum_{t_1=3}^m \frac{|\theta_{t_1}|}{t_1!} \frac{\|\theta_{m+4-t_1}\|}{(m+4-t_1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+4} \right. \\ \left. + \sum_{t_1=3}^m \frac{|\theta_{t_1}|}{t_1!} \frac{\|\theta_{m+5-t_1}\|}{(m+5-t_1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+5} \right) C_n^2 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right).$$

Так мы приходим к равенству

$$f^n - g^n = \left(\sum_{t_1=3}^{m+1} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1} \right) \sum_{j_1=0}^{n-1} g^n \\ + \left(\sum_{6 \leq t_1+t_2 \leq m+3} \frac{\theta_{t_1} \theta_{t_2}}{t_1! t_2!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+t_2} \right) \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2} \\ + r_1 + r_2 + R_1, \quad (9)$$

при этом $t_1, t_2 \geq 3$. Далее будут появляться величины t_j , $j \geq 3$, и мы всегда считаем, что $t_j \geq 3$. При $m = 3$ равенство (9) можно записать в виде

$$f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-t^2/2} = \frac{\theta_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} e^{-t^2/2} + \frac{\theta_4}{4!} \frac{(it)^4}{n} e^{-t^2/2} \\ + \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2} \\ + r_1 + r_2 + R_1.$$

Нетрудно проверить (см. рассуждения, приводящие к правой части (8)), что последняя сумма по $0 \leq j_1 + j_2 \leq n - 2$ равна

$$C_n^2 g^n + \sum_{0 \leq j_1 + j_2 + j_3 \leq n-3} f^{n-j_1-j_2-j_3-3} g^{j_1+j_2+j_3+2} (f - g).$$

Отсюда легко вывести, что

$$\begin{aligned} f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-t^2/2} &= \frac{\theta_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} e^{-t^2/2} + \frac{\theta_4}{4!} \frac{(it)^4}{n} e^{-t^2/2} \\ &+ \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{(it)^6}{n} e^{-t^2/2} + r_1 + r_2 + R_1 + R_2, \end{aligned}$$

где

$$|R_2| \leq C_n^3 \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \zeta_3 \frac{|t|^9}{n^{9/2}} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right),$$

откуда следует утверждение леммы при $m = 3$. Отметим, что $\|\Theta_{2,6}\| = (\theta_3/3!)^2$.

Далее мы считаем, что $m \geq 4$. Покажем, что для любого $2 \leq k \leq m - 1$

$$\begin{aligned} f^n - g^n &= \sum_{s=1}^{k-1} \left(\sum_{l=3s}^{m-1+2s} \Theta_{s,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \right) \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_s \leq n-s} g^n \\ &+ \left(\sum_{l=3k}^{m-1+2k} \Theta_{k,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \right) \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k} f^{n-j_1-\dots-j_k-k} g^{j_1+\dots+j_k+k} \\ &+ \sum_{s=1}^k r_s + \sum_{s=1}^{k-1} R_s. \end{aligned} \quad (10)$$

При $k = 2$ это равенство, с точностью до обозначений, совпадает с (9). Предположим, что оно выполнено при каком-либо $2 \leq k < m - 1$. Преобразуем k -е слагаемое в правой части (10), представив сумму по $0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n - k$ в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k-1} (f^{n-j_1-\dots-j_k-k} - g^{n-j_1-\dots-j_k-k}) g^{j_1+\dots+j_k+k} + \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k} g^n \\ &= \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k} g^n \\ &+ \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k-1} \left(\sum_{j_{k+1}=0}^{n-j_1-\dots-j_k-(k+1)} f^{n-j_1-\dots-j_k-j_{k+1}-(k+1)} g^{j_{k+1}} (f - g) \right) \\ &\quad \times g^{j_1+\dots+j_k+k} \\ &= \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k} g^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_{k+1} \leq n-(k+1)} f^{n-j_1-\dots-j_{k+1}-(k+1)} g^{j_1+\dots+j_{k+1}+k} (f-g) \\
= & \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k} g^n \\
& + \psi \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_{k+1} \leq n-(k+1)} f^{n-j_1-\dots-j_{k+1}-(k+1)} g^{j_1+\dots+j_{k+1}+k+1}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Теперь нетрудно понять, что k -е слагаемое в правой части (10) равно

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=3k}^{m-1+2k} \Theta_{k,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_k \leq n-k} g^n + \left(\sum_{l=3k}^{m-1+2k} \Theta_{k,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \psi \right) \\
& \times \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_{k+1} \leq n-(k+1)} f^{n-j_1-\dots-j_{k+1}-(k+1)} g^{j_1+\dots+j_{k+1}+k+1}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в этой сумме имеет тот же вид, что и слагаемые из суммы по $1 \leq s < k-1$ в (10). Вторую сумму по l в (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=3k}^{m-1+2k} \sum_{t_1+\dots+t_k=l} \frac{\theta_{t_1} \dots \theta_{t_k}}{t_1! \dots t_k!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \psi \\
& = \sum_{3k \leq t_1+\dots+t_k \leq m-1+2k-1} \frac{\theta_{t_1} \dots \theta_{t_k}}{t_1! \dots t_k!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+\dots+t_k} \psi \\
& + \sum_{t_1+\dots+t_k=m-1+2k} \frac{\theta_{t_1} \dots \theta_{t_k}}{t_1! \dots t_k!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{m-1+2k} \psi. \quad (13)
\end{aligned}$$

Первую из сумм в правой части (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{3k \leq t_1+\dots+t_k \leq m-2+2k} \frac{\theta_{t_1} \dots \theta_{t_k}}{t_1! \dots t_k!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+\dots+t_k} \sum_{t_{k+1}=3}^{m+1+2k-(t_1+\dots+t_k)} \frac{\theta_{t_{k+1}}}{t_{k+1}!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_{k+1}} \\
& + \sum_{3k \leq t_1+\dots+t_k \leq m-2+2k} \frac{\theta_{t_1} \dots \theta_{t_k}}{t_1! \dots t_k!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+\dots+t_k} \\
& \times \left(\gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+2+2k-(t_1+\dots+t_k)}\|}{(m+2+2k-(t_1+\dots+t_k))!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{m+2+2k-(t_1+\dots+t_k)} \right. \\
& \left. + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+3+2k-(t_1+\dots+t_k)}\|}{(m+3+2k-(t_1+\dots+t_k))!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{m+3+2k-(t_1+\dots+t_k)} \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

Первая из этих сумм равна

$$\begin{aligned}
& \sum_{3(k+1) \leq t_1+\dots+t_{k+1} \leq m+2k+1} \frac{\theta_{t_1} \dots \theta_{t_{k+1}}}{t_1! \dots t_{k+1}!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+\dots+t_{k+1}} \\
& = \sum_{l=3(k+1)}^{m-1+2(k+1)} \Theta_{k+1,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l,
\end{aligned}$$

а абсолютная величина второй не превосходит

$$e^{t^2/(2n)} \sum_{l=3k}^{m-2+2k} \|\Theta_{k,l}\| \left(\frac{\|\theta_{m+2+2k-l}\|}{(m+2+2k-l)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2+2k} + \frac{\|\theta_{m+3+2k-l}\|}{(m+3+2k-l)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+3+2k} \right). \quad (15)$$

Умножение первой из них на сумму по $0 \leq j_1 + \dots + j_{k+1} \leq n - (k+1)$ из (12) дает нам аналог k -го слагаемого из (10), в котором k заменяется на $k+1$, а умножение второй на сумму по $0 \leq j_1 + \dots + j_{k+1} \leq n - (k+1)$ из (12) дает нам величину r_{k+1} , которую можно оценить произведением величины (15) без множителя $e^{t^2/(2n)}$ и $C_n^{k+1} \mu^{n-1} (t/\sqrt{n})$.

Для завершения доказательства равенства (10), в котором k заменяется на $k+1$, осталось рассмотреть величину R_k , являющуюся произведением второй суммы из правой части (13) и суммы по $0 \leq j_1 + \dots + j_{k+1} \leq n - (k+1)$ из (12). Ясно, что

$$|R_k| \leq \|\Theta_{k,m-1+2k}\| \zeta_3 C_n^{k+1} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2+2k} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right).$$

Так мы убеждаемся в справедливости (10) при всех $2 \leq k \leq m-1$.

Положим в (10) $k = m-1$. Ясно, что при этом $(m-1)$ -е слагаемое будет равно

$$\Theta_{m-1,3m-3} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{3m-3} \times \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_{m-1} \leq n-(m-1)} f^{n-j_1-\dots-j_{m-1}-(m-1)} g^{j_1+\dots+j_{m-1}+m-1}.$$

Действуя аналогично предыдущему, легко проверить, что эта величина равна

$$C_n^{m-1} \Theta_{m-1,3m-3} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{3m-3} e^{-t^2/2} + R_{m-1},$$

где

$$|R_{m-1}| \leq C_n^m \|\Theta_{m-1,3m-3}\| \zeta_3 \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{3m} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right),$$

и доказательство леммы закончено.

В следующей теореме нам понадобятся величины

$$L_k(u) = \frac{1}{\pi} \int_u^\infty t^k e^{-t^2/2} dt, \quad u > 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и

$$\alpha(u) = \max \{ |f(t)| : t \geq u \}.$$

Отметим, что величины $L_k(u)$ при $u \rightarrow \infty$ убывают экспоненциально быстро и при выполнении условия $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^\nu dt < \infty$ величина $\alpha(u)$ строго меньше единицы для любого $u > 0$.

Теорема 1. При выполнении условий, наложенных на распределение P , для любого $n \geq \max(\nu, m+1)$ при всех действительных x

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{s=1}^{m-1} C_n^s \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \frac{\Theta_{s,l}}{n^{l/2}} H_l(x) \varphi(x) + R, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} |R| \leq & \frac{1}{n^{m/2}} \left(\frac{\|\theta_{m+2}\|}{(m+2)!} B_{m+2,n-1} + \frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} \frac{B_{m+3,n-1}}{\sqrt{n}} \right. \\ & + \sum_{s=2}^{m-1} \frac{1}{s!} \sum_{l=3(s-1)}^{m-4+2s} \|\Theta_{s-1,l}\| \left(\frac{\|\theta_{m+2s-l}\|}{(m+2s-l)!} B_{m+2s,n-1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\|\theta_{m+2s+1-l}\|}{(m+2s+1-l)!} \frac{B_{m+2s+1,n-1}}{\sqrt{n}} \right) \\ & + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(s+1)!} \|\Theta_{s,m-1+2s}\| \zeta_3 B_{m+2+2s,n-1} \Big) \\ & + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{T\sqrt{n}} e^{-T^2 n/2} \\ & + \sum_{s=1}^{m-1} C_n^s \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \frac{|\Theta_{s,l}|}{n^{l/2}} L_l(T\sqrt{n}). \end{aligned}$$

При $m = 2$ сумму по $2 \leq s \leq m-1$ в оценке величины R следует опустить.

Доказательство. Разность плотностей $p_n(x)$ и $\varphi(x)$ можно записать с помощью формулы обращения

$$\begin{aligned} p_n(x) - \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что абсолютная величина последнего слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^\infty e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\pi T\sqrt{n}} e^{-T^2 n/2},$$

а абсолютная величина предпоследнего слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^\infty \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt$$

и ясно, что правые части этих неравенств при росте n убывают экспоненциально быстро.

Для завершения доказательства теоремы нужно воспользоваться утверждением только что доказанной леммы и при этом учесть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it)^k e^{-t^2/2} dt = H_k(x) \varphi(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt = B_{k,n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad n \geq \max(\nu, m+1).$$

Теорема 1 доказана.

Далее мы будем использовать величины

$$M_{s,l} = C_n^s \Theta_{s,l} \frac{H_l(x)}{n^{l/2}},$$

с помощью которых можно записать главную часть разложения (16) без величин $\varphi(x)$ в виде

$$\sum_{s=1}^{m-1} \sum_{l=3s}^{m-1+2s} M_{s,l}. \quad (17)$$

Множество точек (s, l) , по которым производится суммирование, состоит из целочисленных точек плоскости, принадлежащих замкнутому треугольнику, стороны которого принадлежат прямым $s = 1$, $l = 3s$, $l = m - 1 + 2s$. Ясно, что последняя сумма не изменится, если мы изменим порядок суммирования. Заметим, что величины l на множестве суммирования изменяются от 3 до $3m - 3$. Для $l = 3, \dots, m + 1$ величины s изменяются от 1 до $[l/3]$, где $[\cdot]$ означает целую часть, а для $l = m + 2, \dots, 3m - 3$ величины s изменяются от $](l - m + 1)/2[$ до $[l/3]$, где $]z[$ для положительного числа z означает наименьшее целое число, большее или равное z . Поэтому

$$\sum_{s=1}^{m-1} \sum_{l=3s}^{m-1+2s} M_{s,l} = \sum_{l=3}^{m+1} \sum_{s=1}^{[l/3]} M_{s,l} + \sum_{l=m+2}^{3m-3} \sum_{s=](l-m+1)/2[}^{[l/3]} M_{s,l}. \quad (18)$$

Рассмотрим первую сумму в правой части этого равенства. Она равна

$$\begin{aligned} & \sum_{l=3}^{m+1} \frac{H_l(x)}{n^{l/2}} \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \Theta_{s,l} \\ &= \sum_{l=3}^{m+1} H_l(x) \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \frac{1}{n^{l/2}} \sum_{t_1 + \dots + t_s = l} \frac{\theta_{t_1} \dots \theta_{t_s}}{t_1! \dots t_s!} \\ &= \sum_{l=3}^{m+1} H_l(x) \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \sum_{t_1 + \dots + t_s = l} \left(\frac{\theta_{t_1}}{t_1! n^{t_1/2}} \right) \dots \left(\frac{\theta_{t_s}}{t_s! n^{t_s/2}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Зафиксируем числа l и s , $3 \leq l \leq m+1$, $1 \leq s \leq [l/3]$, и рассмотрим все решения уравнения $t_1 + \dots + t_s = l$ в неотрицательных целых числах, больших или равных трем. Для каждого решения $t_1, \dots, t_s$ обозначим k_3 число входящих в него троек, k_4 — число входящих в него четверок, $\dots$, k_{m+1} — количество входящих в него чисел $m+1$.

Ясно, что для каждого решения $t_1, \dots, t_s$

$$\left(\frac{\theta_{t_1}}{t_1! n^{t_1/2}}\right) \dots \left(\frac{\theta_{t_s}}{t_s! n^{t_s/2}}\right) = \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}}\right)^{k_3} \dots \left(\frac{\theta_{m+1}}{(m+1)! n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}},$$

при этом

$$3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} = l, \quad (20)$$

$$k_3 + \dots + k_{m+1} = s. \quad (21)$$

Нетрудно понять, что для данного набора чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которого выполнено (21), существует $C_s^{k_3} C_{s-k_3}^{k_4} \dots C_{s-(k_3+\dots+k_m)}^{k_{m+1}}$ решений уравнения $t_1 + \dots + t_s = l$ с заданными числами $k_3, \dots, k_{m+1}$ (k_3 троек можно разместить на s позициях в сумме $t_1 + \dots + t_s$ числом способов, равным $C_s^{k_3}$, k_4 четверок можно поместить на $s-k_3$ оставшихся позициях $C_{s-k_3}^{k_4}$ способами и т.д.). Поэтому последняя сумма по $s = 1, \dots, [l/3]$ из (19) равна

$$\sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \sum' C_s^{k_3} C_{s-k_3}^{k_4} \dots C_{s-(k_3+\dots+k_m)}^{k_{m+1}} \times \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}}\right)^{k_3} \dots \left(\frac{\theta_{m+1}}{(m+1)! n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}}, \quad (22)$$

где сумма $\sum'$ берется по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которых выполнены условия (20) и (21). Легко проверить, что сумма (22) равна

$$\sum_{s=1}^{[l/3]} \sum' \frac{n!}{(n - (k_3 + \dots + k_{m+1}))! k_3! \dots k_{m+1}!} \times \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}}\right)^{k_3} \dots \left(\frac{\theta_{m+1}}{(m+1)! n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}}.$$

Очевидно, что для $l \leq m+1$ все величины k_j из (20) с $j \geq l+1$ с необходимостью равны нулю и поэтому условия (20) и (21) можно записать в виде

$$3k_3 + \dots + lk_l = l, \quad (23)$$

$$k_3 + \dots + k_l = s. \quad (24)$$

Из первого из этих равенств следует, что $3k_3 + \dots + 3k_l \leq l$, поэтому заведомо $s \leq [l/3]$, т.е. сумма (22) равна

$$\sum_{s \geq 1} \sum'' \frac{n!}{(n - (k_3 + \dots + k_l))! k_3! \dots k_l!} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}} \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\theta_l}{l! n^{l/2}} \right)^{k_l}, \quad (25)$$

где сумма $\sum''$ берется по наборам неотрицательных целых чисел $k_3, \dots, k_l$, для которых выполнены условия (23) и (24). Легко понять, что сумма (25) не изменится, если мы снимем в ней суммирование по $s \geq 1$, исключив из ограничений условие (24). Отсюда следует, что первая из сумм в правой части (18), умноженная на $\varphi(x)$, совпадает с суммой по $3 \leq l \leq m+1$ из правой части (1).

Рассмотрим сумму по s во втором слагаемом в правой части (18). Рассуждения, аналогичные только что проведенным, приводят к формуле, аналогичной (25), в которой k_l заменяется на k_{m+1} , последний множитель заменяется на $(\theta_{m+1}/((m+1)! n^{(m+1)/2}))^{k_{m+1}}$, суммирование в $\sum''$ ведется по наборам неотрицательных целых чисел, для которых выполняются условия (20) и (21), а суммирование во внешней сумме в (25) ведется по целым $s \geq (l - m + 1)/2$.

Таким образом, главную часть разложения (16) можно записать в виде, аналогичном виду главной части разложения (1) с тем лишь отличием, что в коэффициентах при $H_l(x)\varphi(x)$, $l \geq m+2$, участвуют аналоги квазимоментов $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$ Чебышёва–Эрмита, при определении которых налагается дополнительное условие

$$k_3 + \dots + k_{m+1} \geq \frac{l - m + 1}{2}. \quad (26)$$

Можно сказать, что это разложение находится между разложениями (1) и (2), поскольку если его записать в виде суммы величин $(C(P)/n^{j/2})H_k(x)\varphi(x)$, $j \geq 1$, $3 \leq k \leq 3m-3$, где $C(P)$ не зависят от n , то среди этих слагаемых будут слагаемые с $j \geq m$, а с другой стороны, количество указанных слагаемых будет меньше, чем в разложении (1). Так, в этом разложении коэффициентом при $H_{3m-3}(x)\varphi(x)$ является величина $C_n^{m-1}(\theta_3/3!)^{m-1}/n^{(3m-3)/2} = O(1/n^{(m-1)/2})$ при $n \rightarrow \infty$, а коэффициент при $H_{3m-3}(x)\varphi(x)$ в разложении (1) содержит при $m \geq 5$, помимо только что указанной величины, слагаемые

$$C_n^1 C_n^{m-3} \frac{\theta_6}{6! n^3} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}} \right)^{m-3} = O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/2}} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$C_n^3 \left(\frac{\theta_{m-1}}{(m-1)! n^{(m-1)/2}} \right)^3 = O\left(\frac{1}{n^{3(m-3)/2}} \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Образно говоря, слагаемые, связанные с величинами (27) и (28), в главную часть (18) не пропускает условие (26). Отметим, что в (18) не участвует многочлен Чебышёва–Эрмита порядка $3m-4$.

З а м е ч а н и е. В [2] были получены разложения вида (1), в которых участвовали как квазимоменты $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$, так и квазимоменты $\theta_l^{(m)}(P_n)$, определяемые аналогично. В частности, именно последние квазимоменты использовались в теореме 4 главы 4, в которой $m = 5$. Этим обусловлено отсутствие слагаемого (27), т.е. $C_n^1 C_{n-1}^2 (\theta_6 / (6! n^3)) (\theta_3 / (3! n^{3/2}))^2$, в коэффициенте при $H_{12}(x)\varphi(x)$ в утверждении этой теоремы.

Получим еще одну формулу главной части разложения (16) без величин φ , т.е. для суммы (17).

Так как каждая целочисленная точка (s, l) плоскости принадлежит некоторой прямой $l = j + 2s$ и $j = 0, \pm 1, \dots$, то сумма (17) не изменится, если мы вначале просуммируем числа $M_{s,l}$ по парам (s, l) , лежащим на данной прямой $l = j + 2s$, где j таково, что прямая $l = j + 2s$ пересекается с указанным выше треугольником, а затем просуммируем полученные числа по всем таким j .

Нетрудно понять, что самая верхняя из интересующих нас прямых есть $l = m - 1 + 2s$, а самая нижняя есть $l = 1 + 2s$ (она пересечется с упомянутым выше треугольником в единственной точке $(1, 3)$). Теперь почти очевидно, что сумма (17) равна

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{s=1}^j M_{s,l} = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{s=1}^j C_n^s \frac{\Theta_{s,j+2s}}{n^{j/2+s}} H_{j+2s}(x).$$

Поэтому разложению (16) можно придать вид

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{n^{j/2}} \sum_{s=1}^j \frac{C_n^s}{n^s} \Theta_{s,j+2s} H_{j+2s}(x) \varphi(x) + R, \quad (29)$$

где величина R — та же, что и в утверждении теоремы 1.

Отметим, что $C_n^s / n^s \rightarrow 1/s!$ при $n \rightarrow \infty$.

Преобразуем часть разложения (29) без величин $\varphi(x)$ с тем, чтобы получить в общем случае явный вид многочленов $K_j(x)$, $j = 1, \dots, m-1$, участвующих в разложении Эджворта–Крамера (3).

Очевидно, что величина C_n^s является многочленом s -го порядка переменной n , т.е.

$$C_n^s = \sum_{r=1}^s b_{s,r} n^r,$$

где $b_{s,s} = 1/s!$, $b_{s,s-1} = -1/(2(s-2)!)$, $\dots$, $b_{s,1} = (-1)^{s-1}/s$.

Поэтому сумму $1 \leq j \leq m-1$ из правой части (29) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{n^{j/2}} \sum_{s=1}^j \left(\sum_{r=1}^s b_{s,r} \frac{1}{n^{s-r}} \right) \Theta_{s,j+2s} H_{j+2s}(x) \varphi(x).$$

Ясно, что величина $K_j(x)/n^{j/2}$, $j = 1, \dots, m-1$, является частью суммы

$$\sum_{k=1}^j \frac{1}{n^{k/2}} \sum_{s=1}^k \left(\sum_{r=1}^s b_{s,r} \frac{1}{n^{s-r}} \right) \Theta_{s,k+2s} H_{k+2s}(x),$$

причем суммирование во внешней сумме достаточно проводить по k той же четности, что и j .

Положив $k = j - 2d$, $d = 0, 1, \dots, [j/2]$, мы можем предыдущее выражение записать в виде

$$\frac{1}{n^{j/2}} \sum_{d=0}^{[j/2]} n^d \sum_{s=1}^{j-2d} \left(\sum_{r=1}^s b_{s,r} \frac{1}{n^{s-r}} \right) \Theta_{s,j-2d+2s} H_{j-2d+2s}(x),$$

при этом мы считаем, что сумма пустого множества слагаемых равна нулю. Теперь понятно, что

$$K_j(x) = \sum_{d=0}^{[j/2]} \sum_{s=1}^{j-2d} b_{s,s-d} \Theta_{s,j-2d+2s} H_{j-2d+2s}(x),$$

при этом $s - d \geq 1$. Поэтому

$$K_j(x) = \sum_{d=0}^{[j/2]} \sum_{s=1+d}^{j-2d} b_{s,s-d} \Theta_{s,j-2d+2s} H_{j-2d+2s}(x).$$

Внутренняя сумма в этом выражении содержит непустое множество слагаемых лишь при $1 + d \leq j - 2d$, т.е. при $d \leq (j-1)/3$. Так как $(j-1)/3 \leq [j/2]$ при всех $j \geq 1$, то мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Многочлены $K_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, допускают следующее представление:*

$$K_j(x) = \sum_{d=0}^{[(j-1)/3]} \sum_{s=1+d}^{j-2d} b_{s,s-d} \Theta_{s,j+2s-2d} H_{j+2s-2d}(x).$$

В заключение отметим, что величины, которые формируются примерно так же, как $\Theta_{s,l}$, использовались в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарёв В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
2. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.
3. Сюлюкин А. В. Об асимптотических разложениях Бергстрема–Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, № 1, с. 176–185.

Поступила в редакцию
29.X.2009