Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Барсегян, О распределении сумм одинаково распределенных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 1, 155–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:23:03

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2012 г.

БАРСЕГЯН А. Г.*

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

Уточняется доказательство одной леммы Ф. Спизера о распределении сумм одинаково распределенных случайных величин. Новая формулировка леммы содержит одно дополнительное ограничение по сравнению с исходной леммой.

Ключевые слова и фразы: характеристическая функция, формула обращения, абсолютная сходимость.

1. Введение. Пусть X — случайная величина с симметричной плотностью распределения

$$k(x) = k(|x|) \in L_1(-\infty, \infty). \quad (1)$$

Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, где $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, распределение которых совпадает с распределением X . В работе Ф. Спизера [1] в связи с изучением однородного консервативного уравнения Винера–Хопфа, приведено доказательство следующего утверждения.

Лемма S (см. [1, лемма 3]). *Существует постоянная C такая, что для произвольного $x > 1$, $n \geq 1$, имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\{|S_n| < x\} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} x. \quad (2)$$

Эта лемма представляет самостоятельный интерес, выходящий за рамки задачи, рассмотренной в [1]. Оценка (4), будучи грубой по x (правая часть (2) даже не ограничена при $|x| \rightarrow \infty$), представляет интерес с точки зрения описания скорости «опорожнения» конечных (фиксированных) интервалов значений x при $n \rightarrow \infty$.

Основным мотивом нашего внимания к работе [1] многолетней давности (и в частности к лемме 3) является вопрос об уточнении реальных возможностей методов гармонического анализа в данном круге вопросов теории случайных процессов.

Доказательство леммы S в [1] содержит некоторые неточности и шероховатости, которые поддаются исправлению. Однако один фрагмент изложения ставит под сомнение полноту доказательства в общем случае (3) без привлечения дополнительных ограничений на (симметричную) плотность k .

Настоящая заметка содержит анализ доказательства леммы S в [1], уточнение и подробное изложение отдельных фрагментов этого доказательства. Окончательный

* Институт математики Национальной академии наук Армении, пр. Маршала Баграмяна 246, Ереван, 0019, Республика Армении; e-mail: anibarseghyan@mail.ru

результат формулируется в виде леммы S' , в которой фигурирует одно дополнительное ограничение, по сравнению с леммой S , на плотность k .

Пусть φ — характеристическая функция случайной величины X :

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}[e^{i\lambda X}] = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\lambda t} dt, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \quad (3)$$

Нами будет доказана следующая лемма.

Лемма S' . Пусть функция $(1/\lambda)\varphi(\lambda)$ интегрируема по Лебегу (или абсолютно интегрируема по Риману) в окрестностях $\pm\infty$. Тогда существует постоянная C такая, что для произвольных $x > 1$, $n \geq 1$, имеет место неравенство (4).

2. О доказательстве леммы S в [1]. Приведем начальную часть этого доказательства. «...Если $|\lambda| \leq \lambda_0$, то

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= 1 - 4 \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) k(x) dx \leq 1 - 4 \int_0^{\pi/\lambda_0} \sin^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) k(x) dx \\ &\leq 1 - \frac{4\lambda^2}{\pi^2} \int_0^{\pi/\lambda_0} x^2 k(x) dx \leq e^{-A\lambda^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где A постоянная, зависящая от λ_0 .»

Ясно, что подразумевается, что λ_0 — произвольное (фиксированное) положительное число (далее полагается $\lambda_0 = 2$). Число A предполагается положительным, поскольку в дальнейшем изложении используется сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A\lambda^2) d\lambda$. Однако, если $k(x) = 0$, $|x| \leq \pi/2$, то такой постоянной $A > 0$ не существует.

Далее в [1] автор пишет: «Согласно лемме Римана–Лебега, $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\varphi(\lambda)| = 0$. Поэтому имеет место неравенство

$$|\varphi(\lambda)| \leq 1 - \varepsilon(\lambda_0), \quad \varepsilon(\lambda_0) > 0, \quad \text{при } |\lambda| \leq \lambda_0, \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathbf{P}\{|S_n| < t\} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2} \varphi^n(\lambda) d\lambda \\ &\leq \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-nA\lambda^2) d\lambda + \frac{2}{\pi} \int_{|\lambda| \geq \lambda_0} \frac{(1 - \varepsilon)^n}{\lambda^2} \min\left(1, \frac{1}{2} x^2 \lambda^2\right) d\lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь автор использовал неравенство $\varphi^n(\lambda) \leq e^{-nA\lambda^2}$ при $|\lambda| \leq \lambda_0$, не обращая внимание на то обстоятельство, что в рассматриваемом интервале значений λ функция $\varphi(\lambda)$ может принимать также отрицательные значения и возведение в степень неравенства

$$\varphi(\lambda) \leq e^{-A\lambda^2} \quad (7)$$

незаконно. Нелишне заметить также, что неравенство (7) не следует из одной лишь леммы Римана–Лебега и его вывод требует более подробного разъяснения.

Принципиальным упущением, содержащимся в доказательстве леммы, на наш взгляд, является то, что автором без обоснования (без доказательства или ссылки на литературу) была использована формула

$$\int_0^x \mathbf{P}\{|S_n| < t\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2} \varphi^n(\lambda) d\lambda. \quad (8)$$

Справедливость этой формулы в общем случае (3) вовсе не очевидна (и в литературе нами не найдена). Во всяком случае такая формула не содержится в фундаментальной монографии Лукача [2] по характеристическим функциям. Поэтому в общем случае (3) (симметричной) плотности доказательство леммы S воспринимается как неполное. Более того, нам неизвестно, можно ли в общем случае доказать лемму средствами гармонического анализа?

3. Доказательство леммы S'. Приводимое доказательство леммы S' максимально сближено к схеме доказательства леммы S в [1]. За одно будут уточнены отдельные фрагменты доказательства леммы S (которые были отмечены выше).

Начнем с установления неравенства (7) в окрестности точки $\lambda = 0$. Пусть число $\mu > 0$ удовлетворяет условию $\int_0^\mu k(x) dx > 0$. Тогда $\int_0^\mu x^2 k(x) dx > 0$. Аналогично [1] (см. (4)) получаем: если $|\lambda| < \pi/\mu$, то

$$\varphi(\lambda) \leq 1 - 4 \int_0^\mu \sin^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) k(x) dx \leq 1 - A\lambda^2, \quad (9)$$

где $A = 4/\pi^2 \int_0^\mu x^2 k(x) dx > 0$. Согласно элементарному неравенству $e^{-u} \geq 1 - u$, $u \geq 0$, из (15) следует неравенство (7). Поскольку функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна и $\varphi(0) = 1$, то при достаточно малом значении $\lambda_0 \in (0, \pi/\mu]$ имеем $\varphi(\lambda) \geq 0$ при $|\lambda| \leq \lambda_0$. Поэтому, если $|\lambda| \leq \lambda_0$, то

$$0 \leq \varphi(\lambda) \leq e^{-A\lambda^2}. \quad (10)$$

Неравенство (7) следует из леммы Римана–Лебега с учетом непрерывности функции $\varphi(\lambda)$ и того прямого следствия из (15), что $|\varphi(\lambda)| < 1$ при $\lambda \neq 0$.

Рассмотрим теперь вопрос выполнения равенства (7). Мы воспользуемся следующей основной формулой восстановления распределения случайной величины X (с непрерывным распределением) через ее характеристическую функцию $\varphi(\lambda)$ (см. [2]):

$$\mathbf{P}\{a \leq X < b\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ia\lambda} - e^{-ib\lambda}}{i\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (11)$$

Применяя формулу (14) к распределению S_n с характеристической функцией $\varphi^n(\lambda)$ на промежутке $(a, b) = (-t, t)$, с учетом непрерывности распределения получаем:

$$\mathbf{P}\{|S_n| < t\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \varphi^n(\lambda) d\lambda. \quad (12)$$

Предположим, что несобственный интеграл $\int_0^\infty (\sin \lambda t) \varphi^n(\lambda) / \lambda d\lambda$ сходится по Лебегу (или абсолютно сходится по Риману). Тогда будем иметь

$$\mathbf{P}\{|S_n| < t\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \varphi^n(\lambda) d\lambda. \quad (13)$$

Интегрируя равенство (13) по t от 0 до x и изменяя порядок интегрирования на основании теоремы Фубини, приходим к равенству (10).

Завершающую часть доказательства леммы мы приводить не будем, так как она почти полностью совпадает с [1]. Разница состоит в том, что в отличие от [1], значение λ нами не конкретизируется. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Требование абсолютной сходимости интегралов в (13) (при $n \geq 1$) накладывает хоть и слабое, но вполне определенное ограничение на плотность k . Это условие выполняется, например, когда характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера на бесконечности, с некоторым показателем p , т.е.

$$|\varphi(\lambda)| = O(|\lambda|^{-p}) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty, \quad 0 < p \leq 1. \quad (14)$$

Условие (14) можно заменить более слабыми условиями, известными из анализа, например,

$$|\varphi(\lambda)| = O(|\ln \lambda|^{-p}) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty, \quad p > 1. \quad (15)$$

Выполнение таких асимптотик сопряжено с подходящей гладкостью исходной плотности k .

4. Другой вариант доказательства леммы S' . Ниже мы покажем, что можно несколько видоизменить доказательство леммы S' , не используя при этом неравенство (13) (которое является дополнительным источником погрешности). Говоря неформально, в данной ситуации характеристическая функция не нуждается в нормальной «шляпке» $e^{-A\lambda^2}$.

Схематически опишем этот вариант доказательства. После получения оценки (15) и выбора числа λ_0 (из условия неотрицательности характеристической функции) будем иметь неравенство $|\varphi(\lambda)|^n \leq (1 - A\lambda^2)^n$ при $|\lambda| \leq \min(A^{-1/2}, \lambda_0)$. С его помощью, аналогично [1], оценивается правая часть (13), с использованием элементарных свойств бета и гамма функций Эйлера.

5. Заключительное замечание. Основным результатом работы Ф. Спитцера [1] является следующее важное утверждение, содержащееся в теореме 5.

Предложение А. Пусть $k(x)$ является четной плотностью вероятности. Тогда уравнение

$$F(x) = \int_0^\infty k(x-y)F(y)dy$$

имеет единственное неубывающее решение $F(x)$ с $F(0+) = 1$.

В доказательстве этого предложения была использована лемма S, о которой шла речь в настоящей заметке. В связи со сказанным возникает вопрос полного анализа доказательства теоремы 5 и уточнения тех условий, при которых приведенное в [1] доказательство предложения А сохраняет силу (после надлежащих исправлений).

Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну, по предложению которого была выполнена настоящая работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spitzer F. The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density. — Duke Math. J., 1957, v. 24, № 3, с. 327–343.
2. Лукач Е. Характеристические функции. Пер. с англ. М.: Наука, 1979, 424 с.

Поступила в редакцию
07.11.2011

© 2012 г.

БЕЖАЕВА З. И.*, ОСЕЛЕДЕЦ В. И.**

ЭНТРОПИЯ МЕРЫ ЭРДЁША ДЛЯ ПСЕВДОЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ¹⁾

Пусть $1 < \beta < 2$ — псевдозолотое сечение порядка m :

$$\beta^m = \beta^{m-1} + \dots + \beta + 1.$$

В работе получена формула для энтропии инвариантной меры Эрдёша, отвечающей β и произвольному параметру Бернулли p . Эта

* Московский государственный институт электроники и математики, Трехсвятительский пер., 3, 109028 Москва, Россия; e-mail: bejaeva@gmail.com

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: oseled@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00982-а).