Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Энтропия меры Эрдёша для псевдозолотого сечения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 1, 158–167

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 10:53:35

4. Другой вариант доказательства леммы S' . Ниже мы покажем, что можно несколько видоизменить доказательство леммы S' , не используя при этом неравенство (13) (которое является дополнительным источником погрешности). Говоря неформально, в данной ситуации характеристическая функция не нуждается в нормальной «шляпке» $e^{-A\lambda^2}$.

Схематически опишем этот вариант доказательства. После получения оценки (15) и выбора числа λ_0 (из условия неотрицательности характеристической функции) будем иметь неравенство $|\varphi(\lambda)|^n \leq (1 - A\lambda^2)^n$ при $|\lambda| \leq \min(A^{-1/2}, \lambda_0)$. С его помощью, аналогично [1], оценивается правая часть (13), с использованием элементарных свойств бета и гамма функций Эйлера.

5. Заключительное замечание. Основным результатом работы Ф. Спитцера [1] является следующее важное утверждение, содержащееся в теореме 5.

Предложение А. Пусть $k(x)$ является четной плотностью вероятности. Тогда уравнение

$$F(x) = \int_0^\infty k(x-y)F(y) dy$$

имеет единственное неубывающее решение $F(x)$ с $F(0+) = 1$.

В доказательстве этого предложения была использована лемма S, о которой шла речь в настоящей заметке. В связи со сказанным возникает вопрос полного анализа доказательства теоремы 5 и уточнения тех условий, при которых приведенное в [1] доказательство предложения А сохраняет силу (после надлежащих исправлений).

Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну, по предложению которого была выполнена настоящая работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spitzer F. The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density. — Duke Math. J., 1957, v. 24, № 3, с. 327–343.
2. Лукач Е. Характеристические функции. Пер. с англ. М.: Наука, 1979, 424 с.

Поступила в редакцию
07.11.2011

© 2012 г.

БЕЖАЕВА З. И.*, ОСЕЛЕДЕЦ В. И.**

ЭНТРОПИЯ МЕРЫ ЭРДЁША ДЛЯ ПСЕВДОЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ¹⁾

Пусть $1 < \beta < 2$ — псевдозолотое сечение порядка m :

$$\beta^m = \beta^{m-1} + \dots + \beta + 1.$$

В работе получена формула для энтропии инвариантной меры Эрдёша, отвечающей β и произвольному параметру Бернулли p . Эта

* Московский государственный институт электроники и математики, Трехсвятительский пер., 3, 109028 Москва, Россия; e-mail: bejaeva@gmail.com

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: oseled@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00982-а).

формула позволяет производить вычисление энтропии и хаусдорфовой размерности меры Эрдёша с высокой точностью.

Ранее аналогичная формула для хаусдорфовой размерности меры Эрдёша была получена Дж. Александером и Д. Цагиром для $p = 1/2$, $m = 2$, а также П. Грабнером, П. Киршенхофером и Р. Тиши для $p = 1/2$, $m \geq 3$.

Ключевые слова и фразы: мера Эрдёша, инвариантная мера Эрдёша, псевдозолотое сечение, производное отображение, энтропия, хаусдорфова размерность меры.

1. Введение. Более семидесяти лет назад Эрдёш поставил задачу изучения функции распределения $F(x)$ случайной величины

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \zeta_k,$$

где $0 < \rho < 1$, $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 0, 1, и $\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = 1/2$.

Задаче Эрдёша было посвящено много статей. В [2] авторы дали определения меры Эрдёша на единичном интервале $[0, 1]$ и на компакте Фибоначчи, а также инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи для случая $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ (обратного к β , где β — золотое сечение). Для этого случая авторы доказали, что мера Эрдёша эквивалентна инвариантной мере Эрдёша на компакте Фибоначчи.

А. М. Вершик поставил задачу об эргодических свойствах инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи. Эта задача была решена в [2].

Здесь мы рассмотрим случай $0 < \mathbf{P}(\zeta_i = 0) = q < 1$, $\mathbf{P}(\zeta_i = 1) = p$, а ρ — положительный корень уравнения $\sum_{k=1}^m \rho^k = 1$ ($\beta = 1/\rho$ — псевдозолотое сечение порядка m). Мы будем называть распределение случайной величины ζ мерой Эрдёша на вещественной прямой.

Пусть X обозначает множество допустимых слов, т.е. таких бесконечных слов с алфавитом $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, в которых любая пара соседних букв имеет вид или $0i$, где $0 \leq i \leq m-1$, или $i(i-1)$, где $1 \leq i \leq m-1$. Множество допустимых слов X с метрикой $d(x, y) = \rho^{n(x, y)}$, где $n(x, y)$ — длина наибольшего общего префикса слов x и y , образует компакт.

В настоящей работе мы определим инвариантную меру Эрдёша на компакте X и получим формулу для энтропии инвариантной меры Эрдёша. При этом будет использоваться тот факт, что инвариантная мера Эрдёша является софической мерой (см. [1]).

Отношение энтропии инвариантной меры Эрдёша и $\ln(\beta)$ есть хаусдорфова размерность инвариантной меры Эрдёша. Эта размерность также равна хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на вещественной прямой.

Для $q = 1/2$ наша формула для хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на вещественной прямой совпадает с формулой из [8] (см. также статью [5]). Для этого случая наше доказательство является новым.

Прямое вычисление хаусдорфовой размерности по нашей формуле невозможно, так как ряд для хаусдорфовой размерности сходится слишком медленно для эффективного вычисления.

В наших вычислениях мы использовали ускорение сходимости ряда в формуле для хаусдорфовой размерности. Это ускорение аналогично ускорению из статьи [3]. Заметим, что наши вычисления есть вычисления показателя Ляпунова некоторой последовательности матриц (см. [4]).

2. Инвариантная мера Эрдёша на компакте X . Пусть V — отображение интервала $[0, 1)$ в $[0, 1)$:

$$V: x \rightarrow \{\beta x\},$$

где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Инвариантной мерой Эрдёша на единичном интервале $[0, 1)$ называется мера, инвариантная относительно преобразования V и эквивалентная ограничению меры Эрдёша на отрезок $[0, 1)$.

Существует единственная инвариантная мера Эрдёша на интервале $[0, 1)$. Это утверждение нетрудно получить, следуя работе [1].

Рассмотрим разбиение единичного интервала $[0, 1)$ на интервалы

$$\Delta_0 = [0, \rho), \quad \Delta_1 = [\rho, \rho + \rho^2), \quad \dots, \quad \Delta_{m-1} = [\rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m-1}, 1).$$

Это разбиение является марковским разбиением для отображения V единичного интервала $[0, 1)$, а именно

$$V\Delta_0 = \Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_{m-1}, \quad V\Delta_j = \Delta_{j-1}, \quad 0 < j \leq m-1.$$

Компакт всех допустимых слов X с алфавитом $\{0, 1, \dots, m-1\}$ возникает следующим образом. Точке $x \in [0, 1)$ ставится в соответствие слово $x_1 x_2 \dots$, где $x_n(x) = j$, если $V^{n-1}x \in \Delta_j$. При этом отображение V переходит в сдвиг T на X , а инвариантная мера Эрдёша на интервале $[0, 1)$ переходит в инвариантную меру на компакте X . Инвариантная мера Эрдёша на компакте X — софическая (скрытая марковская) мера, допускающая удобное описание (см. [1]).

Аналогично [1] доказывается, что для $x \in [0, 1)$ мера Эрдёша $dF(x)$ на прямой удовлетворяет уравнению

$$d\bar{F}(x) = M(x_1) d\bar{F}(Vx),$$

где

$$d\bar{F}(x) = (dF(x), dF(x + \rho), dF(x + \rho + \rho^2), \dots, dF(x + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m-1}), dF(x + 1))^T,$$

а $M(0) = M_0$, $M(j) = M_1$, $j \geq 1$.

Ненулевые элементы матрицы

$$M_0 = (M_0(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq m+1)$$

определяются следующим образом:

$$M_0(1, 1) = q, \quad M_0(2, 1) = p, \quad M_0(2, m+1) = q, \quad M_0(i, i-1) = p, \quad 3 \leq i \leq m+1.$$

Ненулевые элементы матрицы

$$M_1 = (M_1(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq m+1)$$

определяются следующим образом:

$$M_1(1, 1) = p, \quad M_1(1, m+1) = q, \quad M_1(2, m+1) = p.$$

Определим блочную матрицу $M = (M(i, j), 0 \leq i, j \leq m-1)$, где

$$M(0, 0) = M(1, 0) = M_0, \quad M(0, i) = M_1, \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

$$M(i, i-1) = M_1, \quad 2 \leq i \leq m-1.$$

Все остальные блоки матрицы M — нулевые.

Спектральный радиус матрицы M равен 1. Пусть $l = (l(0), \dots, l(m-1))$ и $r = (r(0), \dots, r(m-1))$ — соответственно левый и правый собственные векторы этой матрицы с собственным значением 1. Здесь $l(i)$ и $r(i)$ — блоки с номером i блочной строки l и блочного столбца r .

Инвариантная мера Эрдёша на компакте X (аналогично [1]) задается формулой:

$$\mu(\{x: x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n\}) = \frac{l(a_1) M(a_1, a_2) \dots M(a_{n-1}, a_n) r(a_n)}{lr}.$$

Наша цель — вычислить энтропию меры μ .

3. Переход от марковского компакта X к «бернулиевскому» компакт-ту Y . Пусть $X_0 = \{x \in X: x_1 = 0\}$. Слово $x \in X_0$ разбивается на перекрывающиеся блоки $00, 0i(i-1)\dots 10$ (последняя буква блока есть начальная буква следующего блока). Введем функцию возвращения

$$\Phi_0(x) = \min\{n: T^n x \in X_0\}.$$

Производное отображение T' на X_0 имеет вид

$$T'x = T^{\Phi_0(x)}x, \quad x \in X_0.$$

Рассмотрим на X_0 следующее кодирование: поставим в соответствии блоку 00 число 0 , блоку $0i(i-1)\dots 10$ число i . При этом кодировании слово $x \in X_0$ переходит в слово $y = y_1y_2\dots$ в алфавите $\{0, 1, \dots, m-1\}$.

При нашем кодировании производное отображение T' переходит в сдвиг S на множестве Y слов $y = y_1, y_2, \dots$ в алфавите $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Условная мера на множестве X_0 , порожденная мерой μ , переходит в S -инвариантную меру μ_0 .

Теперь получим формулу для меры μ_0 . Введем матрицы

$$t(0) = M(0, 0), \quad t(i) = M(0, i)M(i, i-1)\dots M(1, 0), \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

$$t = \sum_{i=0}^{m-1} t(i).$$

Определим строку $l_t = (l_t(1), \dots, l_t(m+1))$,

$$l_t(1) = p^{m-1}q, \quad l_t(i) = p^{m+1-i}, \quad 2 \leq i \leq m+1.$$

Строка l_t — левый собственный вектор матрицы t с собственным значением 1 .

Определим столбец $r_t = (r_t(1), \dots, r_t(m+1))^T$,

$$r_t(1) = 1 - p^m - p^{m-1}q, \quad r_t(i) = p^{i-1}, \quad 2 \leq i \leq m+1.$$

Столбец r_t — правый собственный вектор матрицы t с собственным значением 1 .

Нетрудно доказать, что мера μ_0 на компакте Y задается формулой

$$\mu_0(\{y: y_1y_2\dots y_n = a_1a_2\dots a_n\}) = \frac{l_t t(a_1)t(a_2)\dots t(a_n)r_t}{l_t r_t}.$$

Тогда

$$m_0 = \int_Y \Phi_0(y) d\mu_0(y) = \frac{p - p^m + qp^{2m}}{q(p + qp^{2m} + p^m(mp - p - 1))}.$$

Из всего предыдущего (см. [6]) следует, что

$$h(\mu) = \frac{h(\mu_0)}{m_0}.$$

4. Кодирование на компакте Y . Теперь мы рассмотрим следующее кодирование на множестве Y : слово разбивается на блоки $0^m, 0^k i, 0 \leq k \leq m-1, 1 \leq i \leq m-1$ ($0^0 = \emptyset$) и мы ставим в соответствие блоку 0^m пару $(m, 0)$, блоку $0^k i$ пару (k, i) . Тогда слово y переходит в бесконечное слово $z = z_1z_2\dots$ в алфавите $C = \{(m, 0), (k, i), 0 \leq k \leq m-1, 1 \leq i \leq m-1\}$.

Определим отображение T_1 на множестве Y формулой

$$T_1 y = \begin{cases} S^m y, & y = 0^m \dots, \\ S^{k+1} y, & y = 0^k i \dots \end{cases}$$

При нашем кодировании это отображение переходит в сдвиг S_1 на множестве Z слов в алфавите C . Мера μ_0 на множестве Y переходит в S_1 -инвариантную меру μ_1 . Нетрудно доказать, что

$$\mu_1(\{z: z_1z_2\dots z_n = a_1a_2\dots a_n\}) = \frac{l_s s(a_1)s(a_2)\dots s(a_n)r_s}{l_s r_s},$$

где $s(c) = t(0)^m$, $c = (m, 0)$,

$$s(c) = t(0)^k t(i), \quad c = (k, i), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

l_s, r_s — левый и правый собственные векторы матрицы $s = \sum_{c \in C} s(c)$ с собственным значением 1. При этом

$$r_s = (1 - p^{m-1}, p, p^2, \dots, p^m),$$

а вектор l_s длины $m+1$ имеет лишь две ненулевые координаты — первую и предпоследнюю:

$$l_s = \left(\frac{1-p^m}{1-q^m}, 0, \dots, 0, 1, 0 \right).$$

Из вида вектора l_s следует, что мера μ_1 на множестве Z задается формулой

$$\mu_1(\{z: z_1 z_2 \dots z_n = a_1 a_2 \dots a_n\}) = \frac{l_w w(a_1) \dots w(a_n) r_w}{l_w r_w}.$$

В этой формуле матрицы $w(c)$ получаются вычеркиванием всех столбцов и всех строк матрицы $s(c)$ кроме первых и предпоследних, т.е.

$$w(c) = \begin{pmatrix} s(c)(1, 1) & s(c)(1, m) \\ s(c)(m, 1) & s(c)(m, m) \end{pmatrix}.$$

Матрицы $w(c)$ имеют вид

$$w(m, 0) = \begin{pmatrix} q^m & 0 \\ p^{m-1}q & p^{m-1}q \end{pmatrix}, \quad w(m-1, 1) = \begin{pmatrix} pq^{m-1} & pq^{m-1} \\ 0 & p^m \end{pmatrix},$$

$$w(m, i) = \begin{pmatrix} p^i q^m & p^i q^m \\ p^{i+m-1}q & p^{i+m-1}q \end{pmatrix}.$$

При остальных значениях $c = (k, i)$

$$w(k, i) = \begin{pmatrix} p^i q^{k+1} & p^i q^{k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $w = \sum_{c \in C} w(c)$:

$$w = \begin{pmatrix} q^m + (1 - p^{m-1})(1 - q^m) & (1 - p^{m-1})(1 - q^m) \\ p^{m-1}(1 - p^m) & p^m + p^{m-1}(1 - p^m) \end{pmatrix}.$$

Строка l_w и столбец r_w задаются формулами

$$l_w = (1 - p^m, 1 - q^m), \quad r_w = (1 - p^{m-1}, p^{m-1}).$$

Строка l_w — левый собственный вектор матрицы w с собственным значением 1.

Столбец r_w — правый собственный вектор матрицы w с собственным значением 1.

Пусть

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} m, & z_1(z) = (m, 0), \\ k+1, & z_1(z) = (k, i). \end{cases}$$

Тогда средняя длина кода равна

$$m_1 = \int_Z \Phi_1(z) d\mu_1(z) = \frac{(1 - q^m)(p + qp^{2m} - p^m(1 + p - mp))}{p(p + p^{2m} - p^{m+1} - (pq)^m)}.$$

Справедливо следующее равенство (см. [7]):

$$h(\mu_0) = \frac{h(\mu_1)}{m_1}.$$

5. Мера μ_1 и процесс регенерации. Среди матриц $w(c)$ лишь матрицы $w(m, 0)$, $w(m-1, 1)$ имеют ранг 2, а все остальные вырождены и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} w(m-1, i) &= u(m-1, i)v, & i \neq 1, \\ w(k, i) &= u(k, i)v, & (k, i) \neq (m, 0), (m-1, 1). \end{aligned}$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} v &= (1, 1), & u(m-1, i) &= (p^i q^m, p^{i+m-1} q)^\top, \\ u(k, i) &= (p^i q^{k+1}, 0)^\top, & (k, i) &\neq (m-1, 1). \end{aligned}$$

Определим множество $C_2 = \{c \in C: c \neq (m, 0), c \neq (m-1, 1)\}$ и множество $Z_2 = \{z \in Z: z_1 \in C_2\}$. Мера μ_1 на множестве Z_2 порождает условную меру μ'_1 .

Введем обозначения $W(0) = w(m, 0)$ и $W(1) = w(m-1, 1)$. Для любого слова $a = a_1 a_2 \dots a_n$ с алфавитом из нулей $(m, 0)$ и единиц $(m-1, 1)$ обозначим

$$W(a) = W(a_1)W(a_2) \dots W(a_n), \quad W(\emptyset) = \text{Id}.$$

Введем

$$\begin{aligned} p(a, m-1, i) &= vW(a)u(m-1, i), & i \neq 1, \\ p(a, k, i) &= vW(a)u(k, i), & (k, i) \neq (m, 0), (m-1, 1). \end{aligned}$$

Слово $z \in Z$ назовем C_2 -регулярным, если в этом слове любая буква $c \in C_2$ встречается бесконечное число раз. C_2 -регулярное слово $z \in Z_2$ разбивается на блоки $c_{j-1}(z)A_j(z)$, $j \in \mathbf{N}$, $c_j \in C_2$, где $A_j(z)$ — двоичное слово. Любое слово $z \in Z_2$ начинается с первого блока $c_0 A_1(z)$, следующий блок — это $c_1(z)A_2(z)$ и так далее.

Вычислим распределение случайного слова $A_1(z)c_1(z)$ при условии, что $z_1(z) = c_0$, $c_0 \in C_2$.

Из определения меры μ_1 вытекает, что

$$\begin{aligned} &\mu_1(\{z \in Z: z_1(z) = c_0\})\mu_1(\{z \in Z_2: A_1(z)c_1(z) = ac\} | \{z: z_1(z) = c_0\}) \\ &= \frac{l_w u(c_0) v W(a) u(c) v r_w}{l_w r_w} = p(a, c) \frac{(l_w u(c_0))(v r_w)}{l_w r_w} \\ &= p(a, c) \mu_1(\{z \in Z: z_1(z) = c_0\}). \end{aligned}$$

Следовательно, при любых $c_0 \in C_2$

$$p(a, c) = \mu_1(\{z \in Z_2: A_1(z)c_1(z) = ac\} | \{z \in Z: z_1(z) = c_0\})$$

есть распределение случайного слова $A_1(z)c_1(z)$ на множестве $\{z \in Z_2\}$ с условной мерой μ'_1 .

В частности, мы получаем равенство $\sum_{a,c} p(a, c) = 1$.

Аналогично вычисляется совместное распределение случайных слов $A_1(z)c_1(z)$, $\dots$, $A_n(z)c_n(z)$ на множестве Z_2 с условной мерой μ'_1 :

$$\begin{aligned} &\mu_1(\{z \in Z_2(C_0): A_1(z)c_1(z) = a_1 c_1, \dots, A_n(z)c_n(z) = a_n c_n\}) \\ &= l_w u(c_0) v W(a_1) u(c_1) v W(a_2) u(c_2) v \dots u(c_{n-1}) v W(a_n) u(c_n) v r_w \\ &= p(a_1, c_1) \dots p(a_n, c_n) \mu_1(\{z \in Z: z_1(z) = c_0\}). \end{aligned}$$

Таким образом, одинаково распределенные случайные слова $A_j(z)c_j(z)$ независимы относительно условной меры μ'_1 на Z_2 .

Рассмотрим функцию возвращения $\Phi_2(z) = \min\{n \geq 1: S^n z \in Z_2\}$ на множестве Z_2 . Она имеет вид $\Phi_2(z) = |A_1(z)| + 1$, где $|A_1(z)|$ — длина двоичного слова $A_1(z)$. Имеем

$$m_2 = \int_{Z_2} \Phi_2(z) d\mu'_1(z) = \frac{p + p^{2m} - p^{m+1} - (qp)^m}{q^{m-1}p^m + p(1 - q^{m-1}) - p^m(1 + q^m p)}.$$

Производное отображение S'_1 на множестве Z_2 имеет вид $S'_1 z = S_1^{\Phi_2(z)} z$. По формуле Абрамова (см. [6])

$$h(\mu_1) = \frac{h(p(\cdot, \cdot))}{m_2}.$$

6. Вычисление энтропии распределения $p(\cdot, \cdot)$. Энтропия $h(p(\cdot, \cdot))$ распределения $p(\cdot, \cdot)$ равна

$$h(p(\cdot, \cdot)) = - \sum_{a,c} p(a, c) \log_2(p(a, c)).$$

Пусть $\alpha = p/q$. Введем матрицы $\widetilde{W}(0)$, $\widetilde{W}(1)$ и $\widetilde{W}(\emptyset)$:

$$\widetilde{W}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^{m-1} & \alpha^{m-1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}(1) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha^m \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}(\emptyset) = \text{Id}.$$

Кроме того, положим $\widetilde{u}_1 = (1, \alpha^{m-1})^\top$, $\widetilde{u}_2 = (1, 0)^\top$. Тогда

$$W(0) = q^m \widetilde{W}(0), \quad W(1) = q^m \widetilde{W}(1), \\ u(m-1, i) = p^i q^m \widetilde{u}_1, \quad u(k, i) = p^i q^{k+1} \widetilde{u}_2.$$

Определим для двоичного слова $a = a_1 \dots a_n$

$$\widetilde{W}(a) = \widetilde{W}(a_1) \dots \widetilde{W}(a_n), \\ \widetilde{p}(a, m-1, i) = v \widetilde{W}(a) \widetilde{u}_1, \quad \widetilde{p}(a, k, i) = v \widetilde{W}(a) \widetilde{u}_2.$$

Имеем

$$p(a, m-1, i) = q^m p^i \widetilde{p}(a, m-1, i) q^{mn}, \quad p(a, k, i) = q^{k+1} p^i \widetilde{p}(a, k, i) q^{mn}.$$

Следовательно,

$$p(a, c) = q^{f(c)} p^{g(c)} \widetilde{p}(a, c) q^{mn},$$

где $f(m-1, i) = m$, $f(k, i) = k+1$, $g(c) = i$, $c \in C_2$.

Введем обозначения $\widetilde{p}_1(a) = v \widetilde{W}(a) \widetilde{u}_1$, $\widetilde{p}_2(a) = v \widetilde{W}(a) \widetilde{u}_2$ и перейдем к вычислению энтропии распределения $p(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} h(p(\cdot, \cdot)) &= - \sum_{a,c} p(a, c) \log_2(p(a, c)) = - \left(\sum_{a,c} (mn + f(c)) p(a, c) \right) \log_2(q) \\ &\quad - \left(\sum_{a,c} g(c) p(a, c) \right) \log_2(p) - \sum_{a,c} q^{f(c)} p^{g(c)} \widetilde{p}(a, c) \log_2(\widetilde{p}(a, c)) q^{mn} \\ &= -\tau_{01} \log_2(q) - \tau_{02} \log_2(\alpha) - \tau_1 \Sigma_1 - \tau_2 \Sigma_2. \end{aligned}$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} \tau_{01} &= \sum_{a,c} (mn + f(c) + g(c)) p(a, c) = \frac{(1-p^m)(1-p^{m-1}q)(1-q^m)}{p^m q^m + p(q-q^m) - p^m q(1+pq^m)}, \\ \tau_{02} &= \sum_{a,c} g(c) p(a, c) = \frac{mp^m q(1-q^m) + p(1-p^m)(1-2q^m + q^{m+1})}{(p-p^m)q + q^m(-p+p^m(p^2+pq+q^2))}, \\ \tau_1 &= \sum_{c: \widetilde{u}(c)=\widetilde{u}_1} q^{f(c)} p^{g(c)} = q^{m-1}(p-p^m), \\ \tau_2 &= \sum_{c: \widetilde{u}(c)=\widetilde{u}_2} q^{f(c)} p^{g(c)} = q^{m-2}(p^2-p^m) + (1-q^{m-2})(1-p^{m-1}) \end{aligned}$$

и

$$\Sigma_1 = \sum_a \widetilde{p}_1(a) \log_2(\widetilde{p}_1(a)) q^{mn}, \quad \Sigma_2 = \sum_a \widetilde{p}_2(a) \log_2(\widetilde{p}_2(a)) q^{mn}.$$

7. Связь между суммами Σ_1 и Σ_2 . Покажем теперь, что Σ_2 вычисляется через Σ_1 . Пусть D_n — множество всех двоичных слов длины n . Обозначим

$$k_n^{(1)} = \sum_{a \in D_n} \tilde{p}_1(a) \log_2(\tilde{p}_1(a)), \quad k_n^{(2)} = \sum_{a \in D_n} \tilde{p}_2(a) \log_2(\tilde{p}_2(a)).$$

Тогда

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} (q^m)^n, \quad \Sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(2)} (q^m)^n.$$

Положим $k^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(i)} x^n$, $i = 1, 2$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{n+1}^{(2)} &= \sum_{a \in D_n} \left(v \widetilde{W}(a) \widetilde{W}(0) \tilde{u}_2 \log_2(v \widetilde{W}(a) \widetilde{W}(0) \tilde{u}_2) \right. \\ &\quad \left. + v \widetilde{W}(a) \widetilde{W}(1) \tilde{u}_2 \log_2(v \widetilde{W}(a) \widetilde{W}(1) \tilde{u}_2) \right) \\ &= k_n^{(1)} + \alpha k_n^{(2)} + \alpha \log_2(\alpha) \sum_{a \in D_n} \tilde{p}_2(a). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$k^{(2)}(x) = x k^{(1)}(x) + \alpha x k^{(2)}(x) + x \alpha \log_2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} v(\widetilde{W}(0) + \widetilde{W}(1))^n \tilde{u}_2 x^n,$$

или

$$\begin{aligned} k^{(2)}(x) &= x k^{(1)}(x) + \alpha x k^{(2)}(x) + x \alpha \log_2(\alpha) v \left(\text{Id} - x(\widetilde{W}(0) + \widetilde{W}(1)) \right)^{-1} \tilde{u}_2 \\ &= x k^{(1)}(x) + \alpha x k^{(2)}(x) \\ &\quad + x \alpha \log_2(\alpha) \frac{1 - \alpha^m x}{1 - (1 + \alpha^{m-1} + \alpha^m)x + (\alpha^{m-1} + \alpha^m + \alpha^{m+1})x^2}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\begin{aligned} k^{(2)}(x) &= \frac{x k^{(1)}(x)}{1 - \alpha x} \\ &\quad + \frac{x(1 - \alpha^m x)}{(1 - \alpha x)(1 - (1 + \alpha^{m-1} + \alpha^m)x + (\alpha^{m-1} + \alpha^m + \alpha^{m+1})x^2)} \alpha \log_2(\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \frac{q^m}{1 - p q^{m-1}} \Sigma_1 \\ &\quad + \frac{q^m - p^m q^m}{(1 - p q^{m-1})(1 - (q^m + p^{m-1} q + p^m) + (p^{m-1} q^{m+1} + p^m q^m + p^{m+1} q^{m-1}))} \alpha \log_2(\alpha). \end{aligned}$$

Если $q = 1/2$, то

$$\Sigma_2 = \frac{\Sigma_1}{2^m - 1}.$$

8. Формула для вычисления энтропии. Из предыдущих пунктов 3–5 следует, что энтропия инвариантной меры Эрдёша μ равна

$$h(\mu) = \frac{h(p(\cdot, \cdot))}{m_0 m_1 m_2},$$

где

$$h(p(\cdot, \cdot)) = - \sum_{a, c} p(a, c) \log_2(p(a, c)).$$

Имеем

$$\text{mean} = m_0 m_1 m_2 = \frac{(1-p^m)(1-p^{m-1}q)(1-q^m)}{(pq)^m + p(q-q^m) - p^m q(1+pq^m)}.$$

Заметим, что $\text{mean} = \tau_{01}$.

Энтропия $h(\mu)$ инвариантной меры Эрдеша равна

$$\begin{aligned} h(\mu) &= \log_2(1+\alpha) - \frac{\tau_{02}}{\text{mean}} \log_2(\alpha) \\ &\quad - \frac{\tau_1}{\text{mean}} \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} (1+\alpha)^{-mn} \\ &\quad - \frac{\tau_2}{\text{mean}} \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(2)} (1+\alpha)^{-mn}. \end{aligned}$$

Если $q = 1/2$, то

$$h(\mu) = 1 - \frac{(1-3q^m)^2}{(1-q^m)^2} \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} q^{mn+m+1}.$$

Заметим, что формула для энтропии инвариантной меры Эрдеша в этом случае совпадает с формулой из [8] для энтропии Гарсия меры Эрдеша на прямой.

При $q = 1/2$, $m = 2$

$$h(\mu) = 1 - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

и $h(\mu)/\log_2(\beta)$ совпадает с формулой для энтропии Гарсия меры Эрдеша на прямой из [3].

Главная трудность при вычислении энтропии связана с тем, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(i)} q^{mn}$, $i = 1, 2$, сходятся слишком медленно для эффективных вычислений. Следуя подходу из работы [3], мы использовали некоторое переупорядочение этих рядов.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$. Введем

$$\mu_n = k_n - \chi(\alpha) k_{n-1},$$

где $\chi(\alpha)$ — спектральный радиус матрицы $\widetilde{W}(0) + \widetilde{W}(1)$. Тогда

$$(1 - \chi(\alpha)x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n.$$

Рассмотрим $\lambda_n = 2\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} + \mu_n - \chi(\alpha)\mu_{n-1}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n &= \frac{1}{1 - \chi(\alpha)x} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n, \\ (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n &= (1 - \chi(\alpha)x) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n &= \frac{(1-x)^2}{(1 - \chi(\alpha)x)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n. \end{aligned}$$

Используя этот метод, мы сводим вычисление рядов $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(i)} x^n$ к вычислению рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^i x^n$, $i = 1, 2$.

Полагая теперь $x = q^m = (1/(1+\alpha))^m$, получаем

$$h(\mu) = \log_2(1+\alpha) - \frac{\tau_{02}}{\text{mean}} \log_2(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1 - (1 + \alpha)^{-m})^2}{(1 - \chi(\alpha)(1 + \alpha)^{-m})^2} \frac{\tau_1}{\text{mean}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^1 (1 + \alpha)^{-mn} \\
& - \frac{(1 - (1 + \alpha)^{-m})^2}{(1 - \chi(\alpha)(1 + \alpha)^{-m})^2} \frac{\tau_2}{\text{mean}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 (1 + \alpha)^{-mn}.
\end{aligned}$$

Ряды в этой формуле сходятся быстрее, чем в первоначальной. Кроме того, верно следующее утверждение: энтропия $h(\mu)$ при замене α на $1/\alpha$ не меняется. Конечно, ряд для $\alpha > 1$ сходится быстрее. Это можно использовать для вычисления хаусдорфовой размерности.

9. Результаты вычислений. В таблице 1 мы даем значения хаусдорфовой размерности $H_{\dim} = h(\mu)/\log_2(\beta)$ инвариантной меры Эрдеша на компакте X .

Таблица 1.

m/p	0.5	0.6	0.7
2	0.995713126685555	0.987545683253295	0.9513889802255375
3	0.980409319534731	0.966434357921336	0.9108593564128219
4	0.986926474333800	0.9683502130281713	0.8992851356244321
5	0.992585300274171	0.9705345626915498	0.8925226190543962
6	0.996032591584967	0.9714686613357636	0.8879821600041571
7	0.997937445507094	0.9716508001228732	0.8850865517494942
8	0.998944915449832	0.9715384117449017	0.8833629722353611
9	0.999465368055570	0.9713641823407837	0.8823911450151443
10	0.999730606878347	0.9712150449607480	0.8818638902510348
11	0.999864704467762	0.9711097578681561	0.8815853398409617
12	0.999932181983893	0.9710424848449765	0.8814408285137502
13	0.999966043207405	0.9710020703916106	0.8813667740334705
14	0.999983008336978	0.9709787856202450	0.8813291388332748
15	0.999991500519328	0.9709657670553508	0.8813101184045377

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бежаева З. И., Оселедец В. И. Меры Эрдеша, софические меры и марковские цепи. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2005, т. 326, с. 28–47.
2. Sidorov N., Vershik A. Ergodic properties of the Erdős measures, the entropy of the goldenshift, and related problems. — Monatsh. Math., 1998, v. 126, № 3, p. 215–261.
3. Alexander I. C., Zagier D. The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure. — J. London Math. Soc., 1991, v. 44, № 1, p. 121–134.
4. Lalley S. P. Random series in powers of algebraic number: Hausdorff dimension of the limit distribution. — J. London Math. Soc., 1998, v. 57, № 3, p. 629–654.
5. Feng D.-J. The limited Rademacher functions and Bernoulli convolutions associated with Pisot numbers. — Adv. Math., 2005, v. 195, № 1, p. 24–101.
6. Абрамов Л. М. Энтропия индуцированного автоморфизма. — Докл. АН СССР, 1959, т. 128, с. 647–650.
7. Белинская Р. М. Обобщенные степени автоморфизма и энтропии. — Сиб. матем. журн., 1970, т. 11, с. 739–749.
8. Grabner P. J., Kirschenhofer P., Tichy R. F. Combinatorial and arithmetical properties of linear numeration systems. — Combinatorica, 2002, v. 22, № 2, p. 245–267.

Поступила в редакцию
19.I.2011

Исправленный вариант
12.VI.2011