Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Мешенмозер, А. П. Шашкин, Функциональная центральная предельная теорема для меры поверхностей уровня гауссовского случайного поля, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 1, 168–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:20:37

© 2012 г.

МЕШЕНМОЗЕР Д.*, ШАШКИН А. П.**

**ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА
ДЛЯ МЕРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ
ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ¹⁾**

Рассматриваются поверхности уровня стационарного изотропного гауссовского случайного поля с гладкими реализациями. Для их мер Хаусдорфа установлена функциональная центральная предельная теорема в гильбертовом пространстве, порожденном гауссовской мерой на числовой прямой.

Ключевые слова и фразы: функциональная центральная предельная теорема, множество уровня, экскурсионное множество, гауссовское поле, мера Хаусдорфа.

Геометрические свойства множеств уровня и экскурсионных множеств гауссовских случайных полей уже давно привлекают внимание исследователей. Это связано с их приложениями к моделированию случайных пространственных структур (см., например, [9]). Объем экскурсионного множества достаточно просто представляется в виде интеграла от нелинейного преобразования случайного поля. В то же время зависимость других функционалов (площадей поверхности, эйлеровых характеристик) от реализаций случайного поля устроена сложнее, так как приходится учитывать их производные. Для процессов на числовой прямой, когда экскурсионные множества одномерны, получено много интересных результатов, начиная с классической формулы Райса для математического ожидания числа пересечений заданного уровня [7, с. 263]. Явные выражения для моментов, в том числе при оптимальных условиях, получали К. Ито, Г. Крамер, Ю. К. Беляев, Д. Джеман, М. Вшебор и др., а различные формы центральной предельной теоремы — Т. Малевич, Дж. Кузик, В. И. Питербарг, Э. Слуд (см. обзор [12] и там же ссылки).

Позже появились и результаты, относящиеся к случайным полям на многомерном множестве индексов (а также на гладких многообразиях). Р. Адлер [6] и М. Вшебор [14] установили варианты формулы Райса для математических ожиданий различных геометрических характеристик экскурсионных множеств. Ее дальнейшие обобщения можно найти в [7, гл. 11–13]. М. Кратц и Х. Леон [13] разработали общий метод доказательства предельных теорем для негладких функционалов от траекторий гауссовских полей, основанный на эрмитовых разложениях. В частности, это позволило им доказать асимптотическую нормальность длины кривой уровня гауссовского случайного поля на $\mathbf{R}^2$. В работе [11] получена функциональная предельная теорема для интегралов по множеству уровня случайного поля, удовлетворяющего условию типа перемешивания. Отметим недавнюю работу [10], в которой доказана многомерная центральная предельная теорема для объемов экскурсионных множеств,

* Institut für Stochastik, Universität Ulm, Helmholtzstr., 18, 89069 Ulm, Germany; e-mail: daniel.meschenmoser@uni-ulm.de

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: ashashkin@hotmail.com

¹⁾ Работа выполнена в рамках Соглашения о сотрудничестве между МГУ и Университетом Ульма (грант DFG 436 RUS 113/962/0-1) и поддержана программой «Восточное партнерство» фонда DAAD. Второй автор также поддержан грантом РФФИ № 10-01-00397а.

порожденных квазиассоциированным, но не обязательно гауссовским полем, с приложениями к оценке долгосрочной матрицы ковариаций и проверке гипотезы об одномерных распределениях случайного поля.

Если случайное поле наблюдается в некотором ограниченном окне, то естественно рассматривать меры поверхностей наблюдаемых экскурсионных множеств (или меры множеств уровня) как случайный процесс, индексированный уровнями $x \in \mathbf{R}$, и задаться вопросом о его предельном поведении. В двумерном случае такая мера — это просто длина кривой уровня x . Целью настоящей заметки является доказательство функциональной центральной предельной теоремы для указанного процесса, порожденного гауссовским полем.

Введем некоторые обозначения. Пусть $d > 1$ и $X = \{X_s, s \in \mathbf{R}^d\}$ — центрированное стационарное изотропное гауссовское случайное поле, реализации которого с вероятностью единица непрерывно дифференцируемы. Предположим, что его ковариационная функция R такова, что $R(0) = 1$ и выполняется неравенство

$$|R(s)| + \frac{1}{\sqrt{1-R(s)}} \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial R(s)}{\partial s_j} \right| + \sum_{j,q=1}^d \left| \frac{\partial^2 R(s)}{\partial s_j \partial s_q} \right| < g(s)$$

для всех $s \neq 0$, где функция g ограничена, непрерывна, $g(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ и $\int_{\mathbf{R}^d} \sqrt{g(s)} ds < \infty$.

О п р е д е л е н и е 1. Множеством уровня $x \in \mathbf{R}$ случайного поля X называется случайное множество $\{s \in \mathbf{R}^d: X_s = x\}$. *Экскурсионным множеством* на уровне x называется множество $\{s \in \mathbf{R}^d: X_s \geq x\}$.

З а м е ч а н и е. Эти определения тесно связаны. Так, для любого $x \in \mathbf{R}$ поле с вероятностью 1 не имеет критических точек, значение в которых равно x (см. [7, лемма 11.2.10]), так что множество уровня x совпадает с границей экскурсионного множества на уровне x .

Далее для конечного множества I его мощность будем обозначать $|I|$, а r -мерную меру Хаусдорфа множества $B \subset \mathbf{R}^d$ обозначим $\mathcal{H}_r$, так что $\mathcal{H}_d$ — мера Лебега. Для вектора $u \in \mathbf{R}^m$ символ $\|u\|$ означает евклидову норму.

Положим

$$N_t(x) = \frac{\mathcal{H}_{d-1}\{s \in [0, t]^d: X_s = x\} - \mathbf{E} \mathcal{H}_{d-1}\{s \in [0, t]^d: X_s = x\}}{\sqrt{t^d}}$$

для $t > 0$ и $x \in \mathbf{R}$. Другими словами, мы рассматриваем центрированную и нормированную меру Хаусдорфа множества уровня x в кубе $[0, t]^d$. Пусть μ — стандартная гауссовская мера на $\mathbf{R}$. Теорема 1 является основным результатом данной заметки.

Теорема 1. Семейство случайных элементов $\{N_t, t > 0\}$ при $t \rightarrow \infty$ сходится по распределению в пространстве $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ к процессу $\lambda^{1-d/2}N$, где $\lambda^2 = -\partial^2 R(0)/\partial s_1^2$, а N — центрированный гауссовский случайный элемент в пространстве $L^2(\mathbf{R}, \mu)$, ковариационный оператор которого определяется равенством

$$\mathbf{D}(N, f)_{L^2(\mathbf{R}, \mu)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^d} \text{cov} \left(f(X_0) e^{-X_0^2/2} \|\nabla X_0\|, f(X_s) e^{-X_s^2/2} \|\nabla X_s\| \right) ds, \quad (1)$$

здесь $f \in L^2(\mathbf{R}, \mu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать только случай $\lambda = 1$. Доказательство общего случая сводится к данному рассмотрением случайного поля $\tilde{X}$, для которого $\tilde{X}(s) = X(\lambda^{-1}s)$, $s \in \mathbf{R}^d$.

Согласно [4, лемма 1.6], слабая сходимость распределений $\{N_t, t > 0\}$ к распределению N в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ равносильна плотности распределений $\{N_t, t > 0\}$ и тому, что

$$\mathbf{E} \exp\{i(N_t, f)_{L^2(\mathbf{R}, \mu)}\} \rightarrow \mathbf{E} \exp\{i(N, f)_{L^2(\mathbf{R}, \mu)}\} \quad (2)$$

при $t \rightarrow \infty$ для любой $f \in L^2(\mathbf{R}, \mu)$. Мы начнем с доказательства плотности.

Пусть $\{H_k, k \geq 0\}$ — семейство полиномов Эрмита. Так как функции $\{H_k/\sqrt{k!}\}$ образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R}, \mu)$, то достаточно (см. [4, теорема 1.13]) убедиться, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{t > 1} \sum_{k=M}^{\infty} \mathbf{E} \left(N_t, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right)_{L^2(\mathbf{R}, \mu)}^2 = 0. \quad (3)$$

Согласно формуле коплощади (см. [5, теорема 3.2.12]), с вероятностью единица имеем

$$\begin{aligned} \left(N_t, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right)_{L^2(\mathbf{R}, \mu)} &= \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_{\mathbf{R}} N_t(x) H_k(x) d\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^d k!}} \int_{[0, t]^d} H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} \|\nabla X_s\| ds \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi t^d k!}} \int_{[0, t]^d} \mathbf{E} H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} \|\nabla X_s\| ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^d k!}} \int_{[0, t]^d} H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} \overline{\|\nabla X_s\|} ds \\ &\quad + \frac{\mathbf{E} \|\nabla X_0\|}{\sqrt{2\pi t^d k!}} \int_{[0, t]^d} \left(H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} - \mathbf{E} H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} \right) ds \\ &=: D_1(t, k) + D_2(t, k). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее мы пишем $\overline{\|\nabla X_s\|} = \|\nabla X_s\| - \mathbf{E} \|\nabla X_s\|$. Мы также учли, что X_s и ∇X_s независимы. Заметим, что при $M \geq 0$

$$\sup_{t > 1} \sum_{k=M}^{\infty} \mathbf{E} \left(N_t, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right)_{L^2(\mathbf{R}, \mu)}^2 \leq 2 \sup_{t > 1} \sum_{k=M}^{\infty} \mathbf{E} D_1^2(t, k) + 2 \sup_{t > 1} \sum_{k=M}^{\infty} \mathbf{E} D_2^2(t, k). \quad (5)$$

Разделим доказательство плотности распределений на две части: в первой рассмотрим слагаемые D_1 , а во второй D_2 .

Часть 1. Сначала покажем, что ряд в (5), содержащий D_1 , при каждом $t > 0$ сходится. Назовем борелевскую функцию $f: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ *трансляционно-инвариантной*, если $f(x+h, y+h) = f(x, y)$ при всех $x, y, h \in \mathbf{R}^d$. Для $t > 0$ и $y \in \mathbf{R}^d$ положим $\psi(t, y) = t^{-d} \prod_{j=1}^d (t - |y_j|)^+$.

Лемма 1. Пусть трансляционно-инвариантная функция $f: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что $\int_{\mathbf{R}^d} |f(0, y)| dy < \infty$. Тогда

$$t^{-d} \int_{[0, t]^d} \int_{[0, t]^d} f(s, u) du ds = \int_{\mathbf{R}^d} f(0, y) \psi(t, y) dy.$$

Доказательство. Достаточно сделать замену $y = u - s$ и применить теорему Фубини. Возьмем произвольное $z \in (0, 1)$ и рассмотрим степенной ряд

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{E} D_1^2(t, k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{z^k}{k!} H_k(X_0) H_k(X_s) e^{-X_0^2/2 - X_s^2/2} \overline{\|\nabla X_0\|} \overline{\|\nabla X_s\|} \psi(t, s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{E} \frac{z^k}{k!} H_k(X_0) H_k(X_s) e^{-X_0^2/2 - X_s^2/2} \overline{\|\nabla X_0\|} \overline{\|\nabla X_s\|} \psi(t, s) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} H_k(X_0) H_k(X_s) e^{-X_0^2/2 - X_s^2/2} \overline{\|\nabla X_0\|} \overline{\|\nabla X_s\|} \psi(t, s) ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь первое равенство следует из леммы 1. Второе равенство очевидно, так как берется математическое ожидание интеграла непрерывного поля по ограниченному

множеству. Для проверки третьего равенства заметим, что в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца

$$\mathbf{E} \left| H_k(X_0) H_k(X_s) e^{-X_0^2/2 - X_s^2/2} \overline{\|\nabla X_0\|} \|\nabla X_s\| \right| \leq \mathbf{E} H_k^2(X_0) \overline{\|\nabla X_0\|}^2 \leq dk!.$$

Таким образом, теорема Фубини обеспечивает справедливость третьего равенства в (6).

Лемма 2 (см. [2, формула (21.12.5)]). *Для любых $x, y \in \mathbf{R}$ и $z \in (0, 1)$ выполняется равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} H_k(x) H_k(y) e^{-x^2/2 - y^2/2} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 - 2xyz}{2 - 2z^2} \right\}.$$

В правой части здесь стоит (с точностью до множителя 2π) плотность гауссовского случайного вектора (ξ, η) с нулевым средним и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{E} D_1^2(t, k) &= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\psi(t, s)}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{X_0^2 + X_s^2 - 2X_0X_s z}{2 - 2z^2} \right\} \\ &\quad \times \overline{\|\nabla X_0\|} \|\nabla X_s\| ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем предел правой части (7) при $z \nearrow 1$. Пусть $p(x, y, u, v)$ — плотность случайного вектора $(X_0, X_s, \nabla X_0, \nabla X_s)$, $p(\underline{x}, \underline{y})$ — плотность вектора (X_0, X_s) , а $q_z(x, y)$ — плотность вектора (ξ, η) . Обозначая $\|u\| = \|u\| - \mathbf{E}\|\nabla X_0\|$ (для $u \in \mathbf{R}^d$), при каждом $s \in \mathbf{R}^d$, $s \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{X_0^2 + X_s^2 - 2X_0X_s z}{2 - 2z^2} \right\} \overline{\|\nabla X_0\|} \|\nabla X_s\| \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}^{2d+2}} q_z(x, y) \overline{\|u\|} \|v\| p(x, y, u, v) du dv dy dx \\ &= 2\pi \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^{2d}} \overline{\|u\|} \|v\| p(\xi, \eta, u, v) du dv \\ &\rightarrow 2\pi \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^{2d}} \overline{\|u\|} \|v\| p(\xi, \xi, u, v) du dv \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} \int_{\mathbf{R}^{2d}} \overline{\|u\|} \|v\| p(x, x, u, v) du dv dx \end{aligned} \quad (8)$$

при $z \nearrow 1$. Мы учли, что $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \xi)$ по распределению и что функция

$$(x, y) \mapsto \int_{\mathbf{R}^{2d}} \overline{\|u\|} \|v\| p(x, y, u, v) du dv$$

непрерывна и ограничена.

Итак, согласно (8) предел при $z \nearrow 1$ выражения под знаком интеграла в правой части (7) существует. Чтобы доказать сходимости интегралов, достаточно при каждом $z \in (0, 1)$ оценить это выражение одной и той же интегрируемой функцией. Далее для краткости вместо $\|\cdot\|$ пишем $\|\cdot\|$, так как соответствующие выражения, содержащие $\mathbf{E}\|\nabla X_0\|$, оцениваются аналогично. Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{X_0^2 + X_s^2 - 2X_0X_s z}{2 - 2z^2} \right\} \|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \\ &= \mathbf{E} q_z(X_0, X_s) \|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) \int_{\mathbf{R}^{2d}} \|u\| \|v\| p(x, y, u, v) du dv dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) p(x, y) \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\|^2 \mid X_0 = x, X_s = y \right) dx dy \\
&\leq \sup_{x, y \in \mathbf{R}^2} p(x, y) \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\|^2 \mid X_0 = x, X_s = y \right) \\
&\leq d \sup_{x, y \in \mathbf{R}^2} p(x, y) \mathbf{E} \left(\left(\frac{\partial X_0}{\partial s_1} \right)^2 \mid X_0 = x, X_s = y \right).
\end{aligned}$$

Введем вектор-функции α и β , полагая $\alpha(s) = -(1 - R^2(s))^{-1} R(s) \nabla R(s)$, $\beta(s) = (1 - R^2(s))^{-1} \nabla R(s)$, $s \neq 0$.

Стандартное рассуждение (гауссовская линейная регрессия) показывает, что при любых $x, y \in \mathbf{R}$ и $s \neq 0$ верна оценка

$$\mathbf{E} \left(\left(\frac{\partial X_0}{\partial s_1} \right)^2 \mid X_0 = x, X_s = y \right) \leq 1 + (\alpha_1(s)x + \beta_1(s)y)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&p(x, y) \mathbf{E} \left(\left(\frac{\partial X_0}{\partial s_1} \right)^2 \mid X_0 = x, X_s = y \right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{1 - R^2(s)}} + \frac{(\partial R(s)/\partial s_1)^2}{(1 - R^2(s))^{5/2}} \sup_{x, y \in \mathbf{R}^2} (y - R(s)x)^2 \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 - 2xyR(s)}{2 - 2R^2(s)} \right\} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{1 - R^2(s)}} + \frac{(\partial R(s)/\partial s_1)^2}{(1 - R^2(s))^{3/2}} =: \rho(s).
\end{aligned} \tag{9}$$

Эта функция не зависит от z и ее произведение с $\psi(t, s)$ интегрируемо по $\mathbf{R}^d$.

Итак, из (7) и (8) следует, что при каждом $t > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{X_0^2 + X_s^2 - 2X_0X_s z}{2 - 2z^2} \right\} \overline{\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\|} \psi(t, s) ds \\
&\rightarrow \int_{\mathbf{R}^d} \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} \int_{\mathbf{R}^{2d}} \overline{\|u\| \|v\|} p(x, x, u, v) du dv dx \psi(t, s) ds,
\end{aligned} \tag{10}$$

когда $z \nearrow 1$. Воспользуемся элементарным предложением.

Лемма 3. Пусть числа $\{a_k, k \geq 0\}$ неотрицательны и ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сходится при всех $z \in (0, 1)$. Тогда, если $\lim_{z \nearrow 1} f(z) = L < \infty$, то $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$.

Используя лемму 3 и соотношения (6) и (10), видим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} D_1^2(t, k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi k!} \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{E} H_k(X_0) H_k(X_s) e^{-X_0^2/2 - X_s^2/2} \overline{\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\|} \psi(t, s) ds \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} \int_{\mathbf{R}^{2d}} \overline{\|u\| \|v\|} p(x, x, u, v) du dv dx \psi(t, s) ds.
\end{aligned} \tag{11}$$

Итак, сходимость первого ряда в (5) установлена. Для доказательства ее равномерности оценим функцию под знаком интеграла в левой части (10) равномерно по t .

Для случайных векторов ζ и ν , заданных на общем вероятностном пространстве, пусть p_{ζ} и $p_{\zeta|\nu=x}$ обозначают соответственно плотность ζ и его же условную плотность при $\nu = x$. Стандартное вычисление условных плотностей показывает, что для случайных векторов $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, обладающих совместной плотностью и таких, что размерности значений ζ_1 и ζ_2 одинаковы, верно равенство

$$p_{\zeta_1, \zeta_3 | \zeta_1 = \zeta_2}(w_1, w_3) = \frac{p_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(w_1, w_1, w_3)}{p_{\zeta_1 - \zeta_2}(0)},$$

если знаменатель больше нуля. Следовательно, так как $X_0 - X_s \sim N(0, 2 - 2R(s))$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} \int_{\mathbf{R}^{2d}} \overline{\|u\| \|v\|} p(x, x, u, v) du dv dx \psi(t, s) ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{\sqrt{1 - R(s)}} \mathbf{E} \left(e^{-X_0^2/2} \overline{\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\|} \mid X_0 = X_s \right) \psi(t, s) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Лемма 4. Условное распределение вектора $(X_0, \nabla X_0, \nabla X_s)$ при $\{X_0 = X_s\}$ — гауссовское с нулевым средним и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + R(s)) & -\frac{1}{2}\nabla R(s) & -\frac{1}{2}\nabla R(s) \\ -\frac{1}{2}\nabla R(s) & I_d - \frac{1}{2-2R(s)}\nabla R(s)\nabla^T R(s) & -\nabla^2 R(s) - \frac{1}{2-2R(s)}\nabla R(s)\nabla^T R(s) \\ -\frac{1}{2}\nabla R(s) & -\nabla^2 R(s) - \frac{1}{2-2R(s)}\nabla R(s)\nabla^T R(s) & I_d - \frac{1}{2-2R(s)}\nabla R(s)\nabla^T R(s) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Непосредственные вычисления.

Лемма 5. Существует такое $C = C(d)$, что

$$\mathbf{E} \left(e^{-X_0^2/2} \overline{\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\|} \mid X_0 = X_s \right) \leq C \sqrt{g(s) + g^2(s)}.$$

Доказательство. Пусть $A > 1$ и $\gamma_A(x) = (|x| \wedge A) \operatorname{sgn}(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(e^{-X_0^2/2} \overline{\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\|} \mid X_0 = X_s \right) \\ &= \mathbf{E} \left(e^{-X_0^2/2} (\overline{\|\nabla X_0\|} - \gamma_A(\overline{\|\nabla X_0\|})) \overline{\|\nabla X_s\|} \mid X_0 = X_s \right) \\ &+ \operatorname{cov} \left(e^{-X_0^2/2} \gamma_A(\overline{\|\nabla X_0\|}), \overline{\|\nabla X_s\|} \mid X_0 = X_s \right) \\ &+ \mathbf{E} \left(e^{-X_0^2/2} \gamma_A(\overline{\|\nabla X_0\|}) \mid X_0 = X_s \right) \mathbf{E} \left(\overline{\|\nabla X_s\|} \mid X_0 = X_s \right) =: J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

По неравенствам Коши–Буняковского–Шварца и Маркова

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \mathbf{E} \left(\overline{\|\nabla X_0\|} \cdot \overline{\|\nabla X_s\|} I(\overline{\|\nabla X_0\|} > A) \mid X_0 = X_s \right) \\ &\leq A^{-1} \left(\mathbf{E} \left(\overline{\|\nabla X_0\|}^4 \mid X_0 = X_s \right) \mathbf{E} \left(\overline{\|\nabla X_0\|}^2 \mid X_0 = X_s \right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу леммы 4 верна оценка $|J_1| \leq \sqrt{3}A^{-1}d^{3/2}$. Выражение J_2 оценим с помощью свойства квазиассоциированности гауссовских векторов (см. [1, теорема 1.5.3]). Именно, липшицева константа функции $(x, y) \mapsto e^{-x^2/2} \gamma_A(\overline{\|y\|})$ не превосходит $2A$. Поэтому по лемме 4 и указанному свойству

$$\begin{aligned} |J_2| &= \left| \operatorname{cov} \left(e^{-X_0^2/2} \gamma_A(\overline{\|\nabla X_0\|}), \overline{\|\nabla X_s\|} \mid X_0 = X_s \right) \right| \\ &\leq 2A \sum_{j=1}^d \left| \operatorname{cov} \left(X_0, \frac{\partial X(s)}{\partial s_j} \mid X_0 = X_s \right) \right| \\ &+ 2A \sum_{j,q=1}^d \left| \operatorname{cov} \left(\frac{\partial X(0)}{\partial s_j}, \frac{\partial X(s)}{\partial s_q} \mid X_0 = X_s \right) \right| \leq 2A(g(s) + g^2(s)). \end{aligned}$$

Теперь оценим J_3 . Первое условное математическое ожидание ограничено равномерно по s , так как то же можно сказать о $\mathbf{E}(\|\nabla X_0\|^2 \mid X_0 = X_s)$ ввиду леммы 4. Для оценки

второго заметим, что в силу свойств гауссовского распределения

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\|\nabla X_s\| \mid X_0 = X_s\right) &= \mathbf{E}\left(\|\nabla X_s\| \mid X_0 = X_s\right) - \mathbf{E}\|\nabla X_s\| \\ &= \mathbf{E}\|\nabla X_s - r(s)(X_0 - X_s)\| - \mathbf{E}\|\nabla X_s\|,\end{aligned}$$

если вектор $r(s) \in \mathbf{R}^d$ таков, что $\nabla X_s - r(s)(X_0 - X_s)$ и $X_0 - X_s$ независимы. Легко проверить, что $r(s) = \nabla R(s)/(2 - 2R(s))$, поэтому

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}\left(\|\nabla X_s\| \mid X_0 = X_s\right)\right| &\leq \mathbf{E}\|r(s)(X_0 - X_s)\| \\ &\leq \|r(s)\|\sqrt{2 - 2R(s)} \leq \frac{\|\nabla R(s)\|}{\sqrt{1 - R(s)}}.\end{aligned}$$

Итак, $|J_3| \leq dg(s)$. Остается взять $A := (g(s) + g^2(s))^{-1/2}$. Лемма 5 доказана.

Пусть $\|s\| > 1$. Имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\sqrt{1 - z^2}} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{X_0^2 + X_s^2 - 2X_0X_s z}{2 - 2z^2} \right\} \|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) p(x, y) \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = x, X_s = y \right) dx dy.\end{aligned}\quad (13)$$

Вычислим условное математическое ожидание, пользуясь свойствами гауссовских векторов и квазиассоциированностью:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = x, X_s = y \right) \\ &\leq \text{cov} \left(\|\nabla X_0 - \alpha(s)X_0 - \beta(s)X_s + \alpha(s)x + \beta(s)y\|, \right. \\ &\quad \left. \|\nabla X_s + \alpha(s)X_s + \beta(s)X_0 - \alpha(s)y - \beta(s)x\| \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{E} \|\nabla X_0 - \alpha(s)X_0 - \beta(s)X_s + \alpha(s)x + \beta(s)y\| - \mathbf{E} \|\nabla X_0\| \right)^2 \\ &\leq 2g(s) + 2d^2(\alpha_0(s)^2 + \beta_0(s)^2)g(s) + 3d^2(\alpha_0(s)^2 + \beta_0(s)^2)(2 + x^2 + y^2),\end{aligned}$$

где $\alpha_0(s) = \max_j |\alpha_j(s)|$ и $\beta_0(s) = \max_j |\beta_j(s)|$. Справедлива аналогичная оценка снизу. Подставляя эти оценки в (13) и вспоминая, что $p(x, y)$ есть плотность вектора (X_0, X_s) , видим, что при каждом $z \in (0, 1)$ абсолютная величина выражения в (13) не превосходит

$$\begin{aligned}&p(0, 0) \int_{\mathbf{R}^{2d}} q_z(x, y) \left(2g(s) + d^2(\alpha_0(s)^2 + \beta_0(s)^2)(2g(s) + 6 + 3x^2 + 3y^2) \right) dx dy \\ &\leq (1 - R^2(s))^{-1/2} \left(2g(s) + 2d^2(\alpha_0(s)^2 + \beta_0(s)^2)(g(s) + 6) \right) =: h(s).\end{aligned}\quad (14)$$

Правая часть интегрируема по множеству $\{s: \|s\| > 1\}$.

Объединяя (11) и (12), получаем, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} D_1^2(t, k) &= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{2\sqrt{\pi(1 - R(s))}} \\ &\quad \times \mathbf{E} \left(e^{-X_0^2/2} \|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = X_s \right) \psi(t, s) ds.\end{aligned}\quad (15)$$

Обозначим $\varphi_k(t)$ слагаемое в левой части, а $F(t)$ пусть обозначает правую часть. Все функции φ_k неотрицательны (как математические ожидания неотрицательных

случайных величин) и непрерывны по $t \in [1, \infty)$. То же можно сказать о функции $F(t)$ (в силу леммы 5). Исследуем поведение этих функций при $t = +\infty$ (здесь возникает неограниченная область интегрирования, так как $\psi(t, s) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$). Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть борелевская функция $v: \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что

$$\mathbf{E} v^2(X_0, \nabla X_0) < \infty.$$

Тогда для каждого $s \neq 0$ справедливо неравенство

$$\left| \text{cov}(v(X_0, \nabla X_0), v(X_s, \nabla X_s)) \right| \leq \mathbf{E} v^2(X_0, \nabla X_0) (1 \wedge g(s)).$$

Доказательство. При s таких, что $g(s) < 1$, утверждение следует из неравенства Арконеса [8, лемма 1], а при прочих — из неравенства Коши–Буняковского–Шварца.

Из леммы 6 и равенства $\mathbf{E} H_k^2(X_0) \|\nabla X_0\|^2 = dk!$ ($k \in \mathbf{N}$) следует существование предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_k(t) =: \varphi_k(\infty)$. Согласно лемме 5 и теореме о мажорированной сходимости, существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = F(\infty)$.

Из леммы Фату вытекает, что $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\infty) \leq F(\infty)$. Если мы сможем доказать обратное неравенство, то будет установлена сходимость ряда из неотрицательных непрерывных функций $\sum_k \varphi_k$ к непрерывному пределу на компакте $[1, +\infty]$, и равномерность сходимости тогда будет следовать из теоремы Дини. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\infty) &= \lim_{z \nearrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \varphi_k(\infty) \\ &= \lim_{z \nearrow 1} \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2\pi k!} \mathbf{E} H_k(X_0) H_k(X_s) e^{-X_0^2/2 - X_s^2/2} \|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| ds \\ &= \lim_{z \nearrow 1} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) p(x, y) \\ &\quad \times \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = x, X_s = y \right) dx dy ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь во втором равенстве для перестановки суммы и интеграла мы воспользовались леммой 6.

Зафиксируем $\delta > 0$. Возьмем настолько большое $t_0 > 1$, чтобы выполнялось неравенство $\int_{s: \|s\| > t_0} h(s) ds < \delta$, а потом такое $t_1 > t_0$, чтобы выполнялись неравенства $|F(t_1) - F(\infty)| < \delta$ и

$$1 - \psi(t_1, s) < \frac{\delta}{1 + \int_{s: \|s\| \leq t_0} \rho(s) ds} \quad \text{при } \|s\| \leq t_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) p(x, y) \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = x, X_s = y \right) dx dy ds \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) p(x, y) \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = x, X_s = y \right) \psi(t_1, s) dx dy ds \\ &\quad + \int_{\|s\| \leq t_0} \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) p(x, y) \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = x, X_s = y \right) \\ &\quad \quad \times (1 - \psi(t_1, s)) dx dy ds \\ &\quad + \int_{\|s\| > t_0} \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) p(x, y) \mathbf{E} \left(\|\nabla X_0\| \|\nabla X_s\| \mid X_0 = x, X_s = y \right) \\ &\quad \quad \times (1 - \psi(t_1, s)) dx dy ds \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{z \nearrow 1} I_1 = F(t_1)$. Согласно (9), имеем $|I_2| \leq \delta d$. Наконец, $|I_3| \leq \int_{\|s\| > t_0} h(s) ds < \delta$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\infty) \geq F(t_1) - \delta d - \delta \geq F(\infty) - 2\delta - \delta d,$$

и требуемое обратное неравенство доказано.

Ч а с т ь 2. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{E} D_2^2(t, k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{E} \|\nabla X_0\|)^2 z^k}{2\pi k!} \int_{\mathbf{R}^d} \psi(t, s) \operatorname{cov} \left(H_k(X_0) e^{-X_0^2/2}, H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} \right) ds \\ &= (\mathbf{E} \|\nabla X_0\|)^2 \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2\pi k!} \operatorname{cov} \left(H_k(X_0) e^{-X_0^2/2}, H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} \right) \psi(t, s) ds \quad (17) \end{aligned}$$

при $t > 0$, здесь мы применили лемму 1 и рассуждение, аналогичное (6). Выражение под знаком интеграла может быть вычислено. Действительно, пусть $\zeta \sim N(0, 1)$ не зависит от X , q_z — та же плотность, что и ранее, а p и $p_{\perp}$ — плотности векторов (X_0, X_s) и (X_0, ζ) соответственно. В силу леммы 6 ряды абсолютно сходятся, и по лемме 2 мы получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2\pi k!} \operatorname{cov} \left(H_k(X_0) e^{-X_0^2/2}, H_k(X_s) e^{-X_s^2/2} \right) &= \int_{\mathbf{R}^2} q_z(x, y) (p(x, y) - p_{\perp}(x, y)) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{4 - (R(s) + z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}} \right). \end{aligned}$$

При подсчете интегралов мы учли, что для положительно определенной матрицы T порядка n

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-(Tx, x)/2} dx = (2\pi)^{n/2} (\det T)^{-1/2}.$$

Выбрав $A > 0$ настолько большим, чтобы при $\|s\| > A$ выполнялась оценка $|R(s)| < 1/2$, мы видим, что выражение под знаком интеграла в (17) оценивается интегрируемой функцией

$$CI\{\|s\| \leq A\} \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{4 - (R(s) + 1)^2}} + CI(\|s\| > A) \frac{\sqrt{3}|R(s)|}{\sqrt{7}\sqrt{4 - (R(s) + 1)^2}}$$

с некоторым абсолютным множителем $C > 0$. Эта оценка равномерна по z и t , и, следовательно, при каждом t мы получаем, переходя к пределу в (17) при $z \nearrow 1$, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} D_2^2(t, k) = \frac{(\mathbf{E} \|\nabla X_0\|)^2}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^d} \left(\frac{1}{\sqrt{4 - (R(s) + 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \psi(t, s) ds. \quad (18)$$

Установим теперь равномерную сходимость. Как делалось в части 1, положим $\varphi_k(t) = \mathbf{E} D_2^2(t, k)$ и обозначим $F(t)$ правую часть (18). Очевидно, что φ_k и F непрерывны на компакте $[1, +\infty]$, и нужно доказать только то, что $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\infty) \geq F(\infty)$. Из леммы 3 вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\infty) &= \lim_{z \nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \varphi_k(\infty) \\ &= \lim_{z \nearrow 1} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{(\mathbf{E} \|\nabla X_0\|)^2}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{4 - (R(s) + z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}} \right) ds, \end{aligned}$$

но это выражение равно $F(\infty)$. Плотность семейства распределений установлена.

Докажем (2). Ввиду плотности рассматриваемого семейства распределений достаточно проверить (2) для гладких финитных f , так как такие функции образуют всюду плотное подмножество в $L^2(\mathbf{R}, \mu)$. По формуле коплощади

$$(N_t, f)_{L^2(\mathbf{R}, \mu)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^d}} \int_{[0, t]^d} \left(f(X_s) e^{-X_s^2/2} \|\nabla X_s\| - \mathbf{E} f(X_s) e^{-X_s^2/2} \|\nabla X_s\| \right) ds.$$

Из леммы 6 легко следует, что для ограниченного борелевского множества $B \subset \mathbf{R}^d$ и борелевской функции $v: \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow \mathbf{R}$, для которой $\mathbf{E} v^2(X_0, \nabla X_0) < \infty$, справедлива оценка

$$\mathbf{D} \int_B v(X_s, \nabla X_s) ds \leq \mathcal{H}_d(B) \mathbf{E} v^2(X_0, \nabla X_0) \int_{\mathbf{R}^d} (1 \wedge g(s)) ds. \quad (19)$$

Лемма 7. Пусть функция $v: \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow \mathbf{R}$ липшицева и $\mathbf{E} v(X_0, \nabla X_0) = 0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{t^d}} \int_{[0, t]^d} v(X_s, \nabla X_s) ds \rightarrow N \left(0, \int_{\mathbf{R}^d} \text{cov}(v(X_0, \nabla X_0), v(X_s, \nabla X_s)) ds \right)$$

по распределению.

Доказательство. Для каждого $j \in \mathbf{Z}^d$ пусть Q_j — куб $(j_1, j_1 + 1] \times \dots \times (j_d, j_d + 1]$. Положим $Y_j = \int_{Q_j} v(X_s, \nabla X_s) ds$. Случайное поле $\{Y_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ центрировано, квадратично интегрируемо и (BL, θ) -зависимо (см. [1, определение 1.5.13]) с последовательностью

$$\theta_r = 2 \text{Lip}^2(v) \int_{\|s\| \geq r/d} g(s) ds.$$

Для проверки последнего свойства достаточно приблизить интегралы по множествам Q_j римановыми суммами и применить свойство квазиассоциированности [1, теорема 1.5.3]. Согласно центральной предельной теореме для (BL, θ) -зависимых случайных полей [1, теорема 3.1.12], имеет место сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{[t]^d}} \int_{[0, [t]^d]} v(X_s, \nabla X_s) ds \rightarrow N \left(0, \int_{\mathbf{R}^d} \text{cov}(v(X_0, \nabla X_0), v(X_s, \nabla X_s)) ds \right)$$

по распределению при $t \rightarrow \infty$, здесь $[t]$ обозначает целую часть числа t . Теперь лемма вытекает из теоремы Слущкого и оценки (19), поскольку $\mathcal{H}_d([0, t]^d \setminus [0, [t]^d]) \leq 2^d t^{d-1}$.

Заметим, что существуют и другие подходы к доказательству центральной предельной теоремы для интегральных преобразований гауссовских полей (см., например, [3]).

Зафиксируем число $A > 0$ и введем обозначения

$$Z_1(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t^d}} \int_{[0, t]^d} \left(f(X_s) e^{-X_s^2/2} \gamma_A(\|\nabla X_s\|) - \mathbf{E} f(X_s) e^{-X_s^2/2} \gamma_A(\|\nabla X_s\|) \right) ds$$

и $Z_2(t) = (N_t, f) - Z_1(t)$. Заметим, что при любом $p \geq 1$ случайные величины $\gamma_A(\|\nabla X_0\|)$ сходятся в среднем порядка p к $\|\nabla X_0\|$ при $A \rightarrow \infty$. Поэтому, согласно (19), $\mathbf{D} Z_2(t) \rightarrow 0$ при $A \rightarrow \infty$ равномерно по t . В силу леммы 7 случайные величины $Z_1(t)$ сходятся по распределению к гауссовскому закону с такой же дисперсией, как в (1), но с заменой $\|\cdot\|$ на $\gamma_A(\|\cdot\|)$. Из леммы 6 и теоремы о мажорируемой сходимости вытекает, что при $A \rightarrow \infty$ эта дисперсия стремится к приведенной в (1), что доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Шашкин А. П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 477 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.
3. Леоненко Н. Н., Иванов А. В. Статистический анализ случайных полей. Киев: Вища школа, 1986, 216 с.
4. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
5. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.
6. Adler R. J. Excursions above a fixed level by n -dimensional random fields. — J. Appl. Probab., 1976, v. 13, p. 276–289.
7. Adler R. J., Taylor J. E. Random Fields and Geometry. New York: Springer, 2007, 448 p.
8. Arcones M. Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors. — Ann. Probab., 1994, v. 22, № 4, p. 2242–2274.
9. Azaïs J.-M., Wschebor M. Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields. Hoboken: Wiley, 2009, 393 p.
10. Bulinski A., Spodarev E., Timmerman F. Central limit theorems for the excursion set volumes of weakly dependent random fields. — Bernoulli, 2012, v. 18, № 1, p. 100–118; arXiv:1005.0483v1.
11. Iribarren I. Asymptotic behaviour of the integral of a function on the level set of a mixing random field. — Probab. Math. Statist., 1989, v. 10, № 1, p. 45–56.
12. Kratz M. F. Level crossings and other level functionals of stationary Gaussian processes. — Probab. Surv., 2006, v. 3, p. 230–288.
13. Kratz M. F., León J. R. Central limit theorems for level functionals of stationary Gaussian processes and fields. — J. Theoret. Probab., 2001, v. 14, № 3, p. 639–672.
14. Wschebor M. On crossings of Gaussian fields. — Stochastic Process. Appl., 1983, v. 14, № 2, p. 147–155.

Поступила в редакцию
11.III.2011

© 2012 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*, АЗИЗОВ Ф. Дж.**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МОМЕНТА ПЕРВОГО ВЫХОДА ЦЕПИ МАРКОВА ЗА НЕЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ

В работе доказываются интегральные предельные теоремы для момента первого выхода цепи Маркова за нелинейную границу, зависящую от некоторого растущего параметра.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, момент первого выхода, интегральная предельная теорема, сходимость по распределению.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, ул. З. Халилова, 23, Az 1148 Баку, Республика Азербайджан; e-mail: ragimovf@rambler.ru

** Институт математики и механики НАН Азербайджана, ул. Ф. Агаева, 9, Az 1148 Баку, Республика Азербайджан; e-mail: gouchayli@rambler.ru