Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Рагимов, Ф. Д. Азизов, Интегральные предельные теоремы для момента первого выхода цепи Маркова за нелинейную границу, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 1, 178–185

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:34:06

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Шашкин А. П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 477 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.
3. Леоненко Н. Н., Иванов А. В. Статистический анализ случайных полей. Киев: Вища школа, 1986, 216 с.
4. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
5. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.
6. Adler R. J. Excursions above a fixed level by n -dimensional random fields. — J. Appl. Probab., 1976, v. 13, p. 276–289.
7. Adler R. J., Taylor J. E. Random Fields and Geometry. New York: Springer, 2007, 448 p.
8. Arcones M. Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors. — Ann. Probab., 1994, v. 22, № 4, p. 2242–2274.
9. Azaïs J.-M., Wschebor M. Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields. Hoboken: Wiley, 2009, 393 p.
10. Bulinski A., Spodarev E., Timmerman F. Central limit theorems for the excursion set volumes of weakly dependent random fields. — Bernoulli, 2012, v. 18, № 1, p. 100–118; arXiv:1005.0483v1.
11. Iribarren I. Asymptotic behaviour of the integral of a function on the level set of a mixing random field. — Probab. Math. Statist., 1989, v. 10, № 1, p. 45–56.
12. Kratz M. F. Level crossings and other level functionals of stationary Gaussian processes. — Probab. Surv., 2006, v. 3, p. 230–288.
13. Kratz M. F., León J. R. Central limit theorems for level functionals of stationary Gaussian processes and fields. — J. Theoret. Probab., 2001, v. 14, № 3, p. 639–672.
14. Wschebor M. On crossings of Gaussian fields. — Stochastic Process. Appl., 1983, v. 14, № 2, p. 147–155.

Поступила в редакцию
11.III.2011

© 2012 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*, АЗИЗОВ Ф. Дж.**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МОМЕНТА ПЕРВОГО ВЫХОДА ЦЕПИ МАРКОВА ЗА НЕЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ

В работе доказываются интегральные предельные теоремы для момента первого выхода цепи Маркова за нелинейную границу, зависящую от некоторого растущего параметра.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, момент первого выхода, интегральная предельная теорема, сходимость по распределению.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, ул. З. Халилова, 23, Az 1148 Баку, Республика Азербайджан; e-mail: ragimovf@rambler.ru

** Институт математики и механики НАН Азербайджана, ул. Ф. Агаева, 9, Az 1148 Баку, Республика Азербайджан; e-mail: gouchayli@rambler.ru

1. Введение. Пусть $X = (X_n, n \in \mathbf{Z}_+)$, $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, есть неоднородная цепь Маркова со значениями на действительной прямой $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ и с переходной вероятностью

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in B | X_n = v) = P_n(v, B),$$

где $v \in \mathbf{R}$ и B — борелевское множество в $\mathbf{R}$.

Рассмотрим момент первого выхода цепи Маркова за нелинейную границу $f_c(t)$, $c > 0$, $t > 0$:

$$\tau_c = \inf\{n: X_n \geq f_c(n)\}$$

(всегда считаем, что $\inf\{\emptyset\} = \infty$).

В случае, когда цепь Маркова X образована суммами независимых случайных величин, изучению предельных теорем для момента первого выхода τ_c при $c \rightarrow \infty$ посвящено большое число работ (см. [6]–[9]).

В последнее время появились работы (см. [1]–[3]), в которых исследуются асимптотические свойства распределения момента первого выхода цепи Маркова за линейную или нелинейную границу $f_c(t)$, зависящую от некоторого растущего параметра c .

В настоящей работе при достаточно широких условиях относительно цепи Маркова X и нелинейной границы $f_c(t)$ доказываются интегральные предельные теоремы для момента первого выхода τ_c .

Отметим, что под интегральной предельной теоремой для τ_c понимается любое утверждение о том, что при некоторых условиях существуют случайная величина η , неслучайные функции $A(c) > 0$ и $B(c)$ от c такие, что нормированный момент первого выхода $\tau_c^* = (\tau_c - B(c))/A(c)$ сходится по распределению к η при $c \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_c^* \leq x) = \mathbf{P}(\eta \leq x) = G(x)$$

в каждой точке $x \in \mathbf{R}$ непрерывности невырожденной функции распределения $G(x)$.

2. Условия и формулировка основных результатов. Следуя работам [2] и [4], будем обозначать $\xi_n(v)$ случайную величину, распределение которой совпадает с распределением скачка цепи X из состояния v в момент времени n , т.е.

$$\mathbf{P}\{v + \xi_n(v) \in B\} = P_n(v, B).$$

Относительно цепи Маркова X будем предполагать, что она является цепью с асимптотически однородным (во времени и в пространстве) средним сносом, т.е. $\mathbf{E}\xi_n(v) \rightarrow \mu$ при $n, v \rightarrow \infty$ для некоторого $\mu \in \mathbf{R}$ (при этом не предполагается конечность $\mathbf{E}\xi_n(v)$ при всех n и v), см. [4].

Ниже будем считать, что $\mu > 0$.

Мы говорим, что последовательность случайных величин η_n , $n \geq 1$, является равномерно непрерывной по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq k \leq n\delta} |\eta_{n+k} - \eta_n| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

(см. [9]).

Пусть $W = \{f_c\}$ обозначает класс семейств функций, удовлетворяющих следующим условиям регулярности:

А) для каждого c функция $f_c(t)$ положительна, монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$, причем $f_c(1) \uparrow \infty$ при $c \rightarrow \infty$;

В) для каждого $c \geq c_0 > 0$ функция $f_c(t)/t$ строго убывает к нулю при $t \rightarrow \infty$, где c_0 — некоторое число;

С) для каждой функции $n = n(c)$ от c такой, что $n = n(c) \rightarrow \infty$ и $f_c(n)/n \rightarrow \mu$ при $c \rightarrow \infty$, имеет место сходимость $f_c(n) \rightarrow \theta \in [0, \mu)$, $c \rightarrow \infty$.

Из условий А) и В) вытекает, что уравнение $f_c(n) = n\mu$ относительно n имеет единственное решение $N_c = N_c(\mu)$ при достаточно больших c .

Отметим, что семейства функций вида $f_c(t) = ct^\beta$ ($0 \leq \beta < 1$), $f_c(t) = (c+t)^\delta$ ($0 < \delta < 1$) и $f_c(t) = (t \ln(t+1) + c)^r$ ($0 < r < 1$) принадлежат классу W .

Введем на множестве случайных величин отношение частичного порядка $\stackrel{d}{\leq}$: для любых двух случайных величин η_1 и η_2 будем писать $\eta_1 \stackrel{d}{\leq} \eta_2$, если $\mathbf{P}(\eta_1 \geq x) \leq \mathbf{P}(\eta_2 \geq x)$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. Пусть $f_c \in W$ и цепь X имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu > 0$, причем $X_n \rightarrow \infty$ почти наверное при $n \rightarrow \infty$, и пусть выполняются следующие условия:

1) для некоторого пространственного уровня V и момента времени N семейство случайных величин $\{|\xi_n(v)|, n \geq N, v \geq V\}$ обладает интегрируемой мажорантой, т.е. существует положительная случайная величина η с $\mathbf{E}\eta < \infty$ такая, что $|\xi_n(v)| \stackrel{d}{\leq} \eta$ для всех $v \geq V, n \geq N$;

2) существует последовательность $A(n) > 0, n \geq 1$, такая, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{A([n(1+\delta)])}{A(n)} = 1 \quad (1)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n - n\mu}{A(n)}\right) = G(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

где $G(x)$ — непрерывная функция распределения и $[\cdot]$ — знак целой части;

3) последовательность $(X_n - n\mu)/A(n), n \geq 1$, является равномерно непрерывной по вероятности.

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\tau_c - N_c}{A([N_c])} \leq x\right) = 1 - G(-\lambda x),$$

где $\lambda = \mu - \theta$.

Следствие. Пусть $f_c \in W$ и цепь X имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu > 0$, причем $X_n \rightarrow \infty$ почти наверное при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) для некоторого момента времени N и пространственного уровня V семейство квадратов скачков $\{\xi_n^2(v), n \geq N, v \geq V\}$ обладает интегрируемой мажорантой, причем $\mathbf{E}\xi_n(v) = \mu + o(1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{v})$ и $\mathbf{D}\xi_n(v) \rightarrow \sigma^2 > 0$ при $n, v \rightarrow \infty$;

2) последовательность $(X_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}), n \geq 1$, является равномерно непрерывной по вероятности.

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\tau_c - N_c}{\nu\sqrt{N_c}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

где

$$\nu = \frac{\sigma}{\mu - \theta} \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Отметим, что предельное соотношение (1) было использовано в работе [5] при доказательстве предельных теорем для сумм случайного числа случайных величин.

В следующей теореме рассматривается однородная во времени цепь Маркова с начальным значением $v = X_0 = X_0(v)$. Предполагается, что она является 0-частично однородной в пространстве, т.е. переходная вероятность $P(v, du) = \mathbf{P}(X_1 = X_1(v) \in du)$ при $u > 0$ и $v > 0$ зависит лишь от разности $u - v$. Это означает, что в области

$v > 0$ траектория цепи ведет себя как обычный процесс суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, распределенных как некоторая случайная величина ξ (см. [2]).

Отметим, что простейшими примерами частично однородных цепей Маркова могут служить обычный процесс суммы $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_k , $k \geq 1$, и случайное блуждание с задержкой в нуле вида $X_{n+1} = \max(0, X_n + \xi_{n+1})$, а также осциллирующее блуждание, для которого $\xi(v) \stackrel{d}{=} \xi$ при $v > 0$ и $\xi(v) \stackrel{d}{=} \eta$ при $v < 0$, где $\stackrel{d}{=}$ — знак совпадения по распределению (см. [2]). Отметим также, что если скачок (приращение) ξ_1 (ξ) указанных цепей имеет конечное среднее значение, то эти цепи дают также пример цепей с асимптотически однородным (во времени и в пространстве) сносом.

Теорема 2. Пусть для каждого c функция $f_c(t)$ положительна, монотонно возрастает, непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$ и $f'_c(t) \leq M < \infty$ для достаточно больших c и t . Пусть цепь X с начальным значением $X_0 = v$ является однородной во времени и 0-частично однородной в пространстве. Предположим, что распределение F приращения цепи X (случайной величины ξ) сосредоточено на $[M, \infty)$, т.е. $\mathbf{P}(\xi \geq M) = 1$, и имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{A(n)} \leq x\right) = G_\alpha(x), \quad x > 0,$$

где $G_\alpha(x)$ — функция распределения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \in (0, 1)$, $A(n) = n^{1/\alpha} L(n)$ и $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Тогда, если $f_c(n)/A(n) \rightarrow x > 0$ при $n = n(c) \rightarrow \infty$ и $c \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}(K_\alpha(c)\tau_c \geq x^{-\alpha}) = G_\alpha(x),$$

где $K_\alpha(c) = [f_c(n)/L(n)]^{-\alpha}$.

Отметим, что семейства $f_c(t) = (c+t)^\delta$, $0 < \delta < 1$, и $f_c(t) = (t \ln(t+1) + c)^r$, $0 < r < 1$, удовлетворяют условию $f'_c(t) \leq M < \infty$ для достаточно больших c и t .

3. Вспомогательные факты. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие результаты, которые мы сформулируем в виде лемм.

Лемма 1. Пусть $f_c \in W$ и для некоторого момента времени N и пространственного уровня V семейство случайных величин $\{|\xi_n(v)|, n \geq N, v \geq V\}$ обладает интегрируемой мажорантой.

Тогда при $c \rightarrow \infty$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$1) \quad \tau_c \xrightarrow{\text{п.н.}} \infty; \quad 2) \quad \frac{f_c(\tau_c)}{\tau_c} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu; \quad 3) \quad \frac{\tau_c}{N_c} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Доказательство. Рассмотрим момент первого выхода $t_c = \inf\{n: X_n \geq f_c(1)\}$ цепи Маркова X_n за уровень $f_c(1)$. Из монотонности границы $f_c(t)$ вытекает, что $\mathbf{P}(\tau_c \geq t_c) = 1$.

Величина t_c как функция от c возрастает, поскольку $f_c(1) \uparrow \infty$, $c \rightarrow \infty$. Поэтому существует предел $t_\infty = \lim_{c \rightarrow \infty} t_c \leq \infty$.

С другой стороны, для каждого $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(t_\infty \leq n) = \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t_c \leq n) = \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} X_k \geq f_c(1)\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}(t_\infty = \infty) = 1$ и, следовательно, $\tau_c \xrightarrow{\text{п.н.}} \infty$, $c \rightarrow \infty$.

Далее, в условиях доказываемой леммы имеет место усиленный закон больших чисел для цепи Маркова X (см. [4]), в силу которого имеем

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому из теоремы 2.1 работы [8] следует, что

$$\frac{X_{\tau_c}}{\tau_c} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad c \rightarrow \infty.$$

Тогда утверждение 2) вытекает из следующего двустороннего неравенства:

$$\frac{X_{\tau_c-1}}{\tau_c} \leq \frac{f_c(\tau_c)}{\tau_c} \leq \frac{X_{\tau_c}}{\tau_c}.$$

Докажем утверждение 3). Из утверждения 2) следует, что

$$\Delta(c) = \frac{f_c(\tau_c)}{\tau_c} - \frac{f_c(N_c)}{N_c} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad c \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Согласно теореме о среднем значении, имеем

$$\Delta(c) = \frac{\lambda_c(\nu_c)}{\nu_c^2} (N_c - \tau_c), \quad (3)$$

где $\lambda_c(t) = f_c(t) - tf'_c(t)$ и ν_c — промежуточная точка между τ_c и N_c . Не ограничивая общности, будем считать, что $N_c \leq \nu_c \leq \tau_c$. Тогда из условия В) относительно границы $f_c(t)$ вытекает, что

$$\frac{f_c(\tau_c)}{\tau_c} \leq \frac{f_c(\nu_c)}{\nu_c} \leq \frac{f_c(N_c)}{N_c}.$$

Учитывая, что $f_c(N_c) = \mu N_c$, отсюда и из утверждения 2) доказываемой леммы получаем

$$\frac{f_c(\nu_c)}{\nu_c} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad c \rightarrow \infty.$$

Поэтому из условия С) относительно границы $f_c(t)$ имеем $f'_c(\nu_c) \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta$ при $c \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lambda_c(\nu_c)/\nu_c \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu - \theta > 0$ при $c \rightarrow \infty$.

Тогда из (2) и (3) следует, что

$$\frac{\tau_c - N_c}{\nu_c} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает утверждение 3) леммы 1.

Лемма 2. При выполнении условий теоремы 2 имеют место следующие предельные соотношения:

$$1) A([N_c])/A(\tau_c) \xrightarrow{\mathbf{P}} 1, \quad c \rightarrow \infty,$$

$$2) \xi_{\tau_c}(v)/A(\tau_c) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad c \rightarrow \infty,$$

равномерно по $v \geq V$.

Доказательство. Для $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$A_c = A_c(\delta) = \left\{ \omega: \left| \frac{\tau_c}{N_c} - 1 \right| > \delta \right\}, \quad B_c = B_c(\varepsilon) = \left\{ \omega: \left| \frac{A([N_c])}{A(\tau_c)} - 1 \right| > \delta \right\}.$$

В силу утверждения 3) леммы 1 для любого $\delta > 0$ существует c_0 такое, что $\mathbf{P}(A_c) < \delta$ для всех $c > c_0$.

Для $c > c_0$ имеем

$$\mathbf{P}(B_c) = \mathbf{P}(A_c B_c) + \mathbf{P}(B_c \bar{A}_c) < \delta + \mathbf{P}(B_c \bar{A}_c), \quad \text{где } \bar{A}_c = \left\{ \omega: \left| \frac{\tau_c}{N_c} - 1 \right| \leq \delta \right\}. \quad (4)$$

Из условия (1) в теореме 2 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_0 > 0$ и целое число n_0 такие, что при $n \geq n_0$

$$\left| \frac{A([n(1 + \delta_0)])}{A(n)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Тогда ясно, что существует достаточно большое число c_1 такое, что при $c > c_1$

$$\mathbf{P}(B_c(\varepsilon) \cap A_c(\delta_0)) = 0.$$

Следовательно, из (4) имеем

$$\mathbf{P}(B_c(\varepsilon)) < \delta < \delta_0 \quad \text{при } c > \max(c_0, c_1).$$

Чтобы доказать утверждение 2), отметим, что согласно [9, лемма 1.4, с. 10] из условия равномерной непрерывности по вероятности последовательности $(X_n - n\mu)/A(n)$, $n \geq 1$, следует, что последовательность $(X_{n+1} - X_n)/A(n)$, $n \geq 1$, также является равномерно непрерывной по вероятности, так как

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{A(n)} = \frac{\mu}{A(n)} - \frac{X_{n+1} - (n-1)\mu}{A(n)} - \frac{X_n - n\mu}{A(n)}.$$

Поэтому для каждого фиксированного состояния v цепи Маркова X_n последовательность нормированных скачков $\xi_n(v)/A(n)$, $n \geq 1$, является равномерно непрерывной по вероятности.

Ясно, что из условия 1) теоремы 2 вытекает, что

$$\frac{\xi_n(v)}{A(n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по $v \geq V$.

Тогда из хорошо известной теоремы Анскомбе (см., например, [8, с. 15]) получаем утверждение 2) леммы 2.

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$n_c = [N_c], \quad \tau_c^* = \frac{\tau_c - N_c}{A(n_c)}, \quad R_c = X_{\tau_c} - f_c(\tau_c).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{X_{\tau_c} - \mu\tau_c}{A(n_c)} &= \frac{f_c(\tau_c) - \mu\tau_c}{A(n_c)} + \frac{R_c}{A(n_c)} = \frac{f_c(\tau_c) - f_c(N_c)}{A(n_c)} \\ &\quad + \frac{f_c(N_c) - \mu\tau_c}{A(n_c)} + \frac{R_c}{A(n_c)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно теореме о среднем значении,

$$\frac{f_c(\tau_c) - f_c(N_c)}{A(n_c)} = f'_c(\gamma_c)\tau_c^*, \quad (6)$$

где γ_c — промежуточная точка между N_c и τ_c .

Учитывая равенство $f_c(N_c) = \mu N_c$, из (5) и (6) находим, что

$$\frac{X_{\tau_c} - \mu\tau_c}{A(n_c)} = (f'_c(\gamma_c) - \mu)\tau_c^* + \frac{R_c}{A(n_c)}. \quad (7)$$

Далее, в силу вышеупомянутой теоремы Анскомбе и утверждения 1) леммы 2, из условий 2) и 3) доказываемой теоремы находим, что

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_{\tau_c} - \mu\tau_c}{A(n_c)} \leq x\right) = G(x). \quad (8)$$

Теперь докажем, что для второго члена в правой части равенства (7) имеет место сходимости

$$\frac{R_c}{A(n_c)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad c \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Действительно,

$$0 \leq \frac{R_c}{A(\tau_c)} = \frac{X_{\tau_c} - f_c(\tau_c)}{A(\tau_c)} \leq \frac{X_{\tau_c} - X_{\tau_c-1}}{A(\tau_c)}, \quad (10)$$

поскольку $X_{\tau_c-1} < f_c(\tau_c)$.

Учитывая, что распределение разности $X_{\tau_c} - X_{\tau_c-1}$ совпадает с распределением скачка ξ_{τ_c} цепи в момент времени τ_c , из утверждения 2) леммы 2 имеем

$$\frac{X_{\tau_c} - X_{\tau_c-1}}{A(\tau_c)} \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (10) в силу утверждения 1) леммы 2 получаем (9).

Теперь, учитывая, что $f'_c(\gamma_c) \xrightarrow{п.н.} \theta$ при $c \rightarrow \infty$, из (7), (8) и (9) получаем

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}((\theta - \mu)\tau_c^* \leq x) = G(x).$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. В условиях следствия имеет место центральная предельная теорема для цепи Маркова из работы [4], согласно которой условие 2) теоремы 1 выполняется с $A(n) = \sigma\sqrt{n}$ и $G(x) = \Phi(x)$. Ясно, что выполняется также условие 1) теоремы 1, поскольку семейство квадратов скачков $\{\xi_n^2(v), n \geq N, v \geq V\}$ обладает интегрируемой мажорантой. Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Ясно, что для каждого $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(\tau_c > n) = \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} (X_k - f_c(k)) \leq 0\right\}. \quad (11)$$

В силу условия $\mathbf{P}(\xi \geq M) = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_k - f_c(k) \geq X_{k-1} - f_c(k-1)) &= \mathbf{P}(X_k - X_{k-1} \geq f'_c(\theta_k)) \\ &\geq \mathbf{P}(X_k - X_{k-1} \geq M) = \mathbf{P}(\xi \geq M) = 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где θ_k — промежуточная точка между $k-1$ и k .

Из (12) видно, что для каждого c последовательность $X_k - f_c(k)$, $k \geq 1$, с вероятностью единица возрастает. Поэтому из (11) получаем, что

$$\mathbf{P}(\tau_c > n) = \mathbf{P}(X_n \leq f_c(n)),$$

или

$$\mathbf{P}(\tau_c > n) = \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{A(n)} \leq \frac{f_c(n)}{A(n)}\right). \quad (13)$$

Пусть $n = n(c) \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow \infty$ меняется так, что

$$\frac{f_c(n)}{A(n)} = x > 0,$$

или

$$n = \left(\frac{f_c(n)}{L(n)}\right)^\alpha x^{-\alpha}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}(K_\alpha(c)\tau_c > x^{-\alpha}) = G_\alpha(x), \quad x > 0,$$

где

$$K_\alpha(c) = \left(\frac{f_c(n)}{L(n)}\right)^{-\alpha}.$$

В заключение авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за исправление неточностей и за указание неясных мест в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Асимптотика вероятности пересечения границы траекторией цепи Маркова. Регулярные хвосты скачков. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 625–653.
2. Боровков А. А. Асимптотика вероятности пересечения границы траекторией цепи Маркова. Экспоненциально убывающие хвосты скачков. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 254–273.
3. Fuh C.-D. Asymptotic operating characteristics of an optimal change point detection in hidden Markov models. — Ann. Statist., 2004, v. 32, № 5, p. 2305–2339.
4. Коршунов Д. А. Предельные теоремы для общих цепей Маркова. — Сиб. матем. журн., 2001, т. 46, № 4, с. 661–667.
5. Mogyórdi J. On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1961, v. 6, № 3, p. 365–371.
6. Рагимов Ф. Г. Асимптотическое разложение распределения времени пересечения нелинейных границ. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 3, с. 580–583.
7. Рагимов Ф. Г. Интегральные предельные теоремы для времени пересечения нелинейных границ суммами независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 158–161.
8. Gut A. Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications. New York: Springer-Verlag, 1988, 199 p.
9. Woodroffe M. A Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. Philadelphia: SIAM, 1982, 119 p.

Поступила в редакцию
3.XI.2009

Исправленный вариант
17.V.2011

© 2012 г.

CAMPOS V. S. M.*, PEREIRA A. G. C.*,
ROJAS CRUZ J. A.*

**MODELING THE GENETIC ALGORITHM BY
A NONHOMOGENEOUS MARKOV CHAIN:
WEAK AND STRONG ERGODICITY**

Эволюционные алгоритмы используются для поиска экстремумов функции. В одном из таких алгоритмов, каноническом генетическом алгоритме, обычно фиксируются два параметра: вероятность мутации и вероятность перекреста. В данной работе мы допускаем возможность изменения этих параметров в процессе работы алгоритма и исследуем сходимость алгоритмов такого типа. Мы также предлагаем новый подход к доказательству слабой эргодичности неоднородных цепей Маркова, не опирающийся на явное использование коэффициента эргодичности Добрушина δ .

Ключевые слова и фразы: неоднородные марковские цепи, слабая и сильная эргодичность, генетические алгоритмы.

* Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 59072-970, Natal-RN, Brazil; viviane@ccet.ufrn.br, andre@ccet.ufrn.br, juanrojasacruz@123mail.cl

¹⁾ This paper was supported by CNPq, CAPES.