Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Бурнашев, Ю. А. Кутоянц, О минимаксном обнаружении интенсивности пуассоновского процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 2, 209–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:18:59

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука

Том 57

Выпуск 2, 2012 год

апрель, май, июнь

© 2012 г. БУРНАШЕВ М. В.^{*}, КУТОЯНЦ Ю. А.^{**}

О МИНИМАКСНОМ ОБНАРУЖЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА¹⁾

Рассматривается задача минимаксной проверки гипотез об интенсивности $\mathbf{s}$ пуассоновского процесса. Для заданных интенсивности $\mathbf{p}$ и множества $\mathcal{Q}$ рассматривается задача минимаксной проверки простой гипотезы $H_0: \mathbf{s} = \mathbf{p}$ против сложной альтернативы $H_1: \mathbf{s} = \mathbf{q}, \mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Находятся условия, при которых без потери качества множество $\mathcal{Q}$ можно заменить одной интенсивностью $\mathbf{q}^*$. Показывается, что в более общем случае множество $\mathcal{Q}$ можно заменить меньшим множеством $\text{red } \mathcal{Q}$. Рассматривается также случай, когда множество $\mathcal{Q}$ велико настолько, что проверка гипотез H_0 и H_1 , по существу, невозможна.

Ключевые слова и фразы: интенсивность пуассоновского процесса, минимаксная проверка гипотез.

1. Введение.

1.1. Постановка задачи. Гауссовское распределение (мера) имеет целый ряд полезных и приятных свойств, которые выделяют его среди общих распределений (мер). Очень часто эти свойства позволяют получать в гауссовском случае более сильные результаты, чем в более общих случаях. Пуассоновское распределение наследует (в некотором смысле) часть свойств гауссовского распределения. Поэтому в математической статистике и теории информации некоторые результаты, полученные сначала для гауссовских процессов (каналов), были затем перенесены на пуассоновские процессы (каналы). Например, это касается

^{*}Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Б. Каретный пер., 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: burn@iitp.ru

^{**}Laboratoire de Statistique et Processus, Université du Maine, B.P. 535, 72017 Le Mans, France; e-mail: kutoyants@univ-lemans.fr

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00905-а).

функции надежности каналов связи [12], [13], [4], минимально достижимой среднеквадратичной ошибки [3], [5] и т.д.

В настоящей работе мы переносим на пуассоновские процессы (меры) некоторые результаты, известные ранее для гауссовских процессов [1], [2].

Пусть $x_s(t)$, $0 \leq t \leq T$, обозначает пуассоновский процесс с интенсивностью $\mathbf{s} = \{s(t), 0 \leq t \leq T\}$. Все интенсивности предполагаются измеримыми и ограниченными функциями. Для интенсивностей (или других функций) $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ будем писать $\mathbf{p} \geq \mathbf{s}$, если $p(t) \geq s(t)$ для всех $t \in [0, T]$.

Мы рассматриваем задачу минимаксной проверки простой гипотезы $H_0: \mathbf{s} = \mathbf{p}$ против сложной альтернативы $H_1: \mathbf{s} = \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$, где интенсивность $\mathbf{p}$ и множество $\mathcal{Q}$ заданы. Это естественный аналог задачи обнаружения сигнала на фоне шума. Аналогично может быть рассмотрена задача минимаксной проверки двух сложных гипотез $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ и $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$.

Обозначим $\mathcal{X}_T$ пространство наблюдений (т.е. $x_0^T \in \mathcal{X}_T$). Нерандомизованный тест с областью решения $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}_T$ имеет вид

$$x_0^T \in \mathcal{D} \implies H_0, \quad x_0^T \in \mathcal{D}^c \implies H_1, \quad (1)$$

где $\mathcal{D}^c = \mathcal{X}_T \setminus \mathcal{D}$. Тогда вероятности ошибки 1-го рода $\alpha(\mathcal{D}, \mathbf{p})$ и 2-го рода $\beta(\mathcal{D}, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{D}, \mathbf{p}) &= \mathbf{P} \{x_0^T \in \mathcal{D}^c \mid H_0\} = \mathbf{P}_{\mathbf{p}} \{x_0^T \in \mathcal{D}^c\}, \\ \beta(\mathcal{D}, \mathbf{p}, \mathcal{Q}) &= \sup_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} \mathbf{P}_{\mathbf{q}} \{x_0^T \in \mathcal{D}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы для заданной величины α , $0 < \alpha < 1$, найти минимально возможную величину $\beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$ и соответствующую оптимальную область решения $\mathcal{D}(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$. Без потери общности будем предполагать множество $\mathcal{Q}$ замкнутым (например, в метрике L_1).

Хорошо известно [11], [10, гл. 3], что решение этой задачи представляет собой байесовский тест относительно *наихудшего* априорного распределения $\pi(\alpha, \mathbf{q})$ на $\mathcal{Q}$. Отметим, что это наихудшее распределение $\pi(\alpha, \mathbf{q})$, вообще говоря, зависит от величины α .

Этот общий результат является теоремой существования. Вряд ли возможно найти наихудшее распределение $\pi(\alpha, \mathbf{q})$ для любых $(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$. Еще труднее исследовать соответствующее отношение правдоподобия и найти наилучшую область решения $\mathcal{D}(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$.

Поэтому представляется естественным выделить случаи, когда решение является простым или, по крайней мере, когда первоначальное множество $\mathcal{Q}$ может быть заменено на меньшее множество $\mathcal{Q}^*$.

Будем говорить, что множество $\mathcal{Q}$ можно заменить интенсивностью $\mathbf{q}^*$, если $\beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q}) = \beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}^*)$ для любого $0 < \alpha < 1$ (и $\mathbf{q}^*$ не зависит

от α). Аналогично, множество $\mathcal{Q}$ можно заменить множеством $\mathcal{Q}^* \subset \mathcal{Q}$, если $\beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q}) = \beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q}^*)$.

Заметим, что если множество $\mathcal{Q}$ можно заменить интенсивностью $\mathbf{q}^*$, то необходимо $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}$ (так как множество $\mathcal{Q}$ замкнуто). Ясно, что если $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}$ и $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}_1$, то тогда множество $\mathcal{Q}_1$ также можно заменить интенсивностью $\mathbf{q}^*$.

Приведем некоторые подобные результаты в задаче минимаксного обнаружения сигнала в белом гауссовском шуме [1] (или при минимаксном различении гауссовских мер [2]). Рассмотрим следующую задачу минимаксной проверки простой гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_1 :

$$\begin{aligned} H_0: \quad dX_t &= dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ H_1: \quad dX_t &= s_t dt + dW_t, \quad s \in S, \end{aligned} \quad (3)$$

где X_t , $0 \leq t \leq T$, — наблюдаемый процесс, W_t — стандартный винеровский процесс, $S \subset L_2[0, T]$ — заданное множество возможных сигналов $s = \{s(t), 0 \leq t \leq T\}$. Нерандомизованный тест с областью решения $\mathcal{D}$ и вероятности ошибки 1-го рода $\alpha(\mathcal{D})$ и 2-го рода $\beta(\mathcal{D}, S)$ определяются аналогично (1), (2).

Задача состоит в том, чтобы для заданного α найти минимально возможную величину $\beta(\alpha, S)$ и соответствующую оптимальную область решения $\mathcal{D}(\alpha, S)$.

Обозначим $\text{conv } S$ выпуклую оболочку множества S (т.е. $\text{conv } S$ есть минимальное выпуклое множество, содержащее S). В [1, предложение 1] было показано, что для $\beta(\alpha, S)$ справедливы границы

$$\sup_{s \in S} \beta(\alpha, s) \leq \beta(\alpha, S) \leq \sup_{s \in \text{conv } S} \beta(\alpha, s). \quad (4)$$

Если, в частности, $S = \text{conv } S$ (т.е. множество S выпукло), то для любого $0 < \alpha < 1$ имеем $\beta(\alpha, S) = \beta(\alpha, s^*)$, где $s^* \in S$ и s^* имеет минимальную величину $\|s\|_{L_2}$ среди всех $s \in S$. Другими словами, если S — выпуклое множество, то можно заменить множество S одной точкой $s^* \in S$. Тогда задача сводится к проверке простой гипотезы $H_0: s \equiv 0$ против простой альтернативы $H_1: s = s^*$.

Также в [1] были введены множества $\text{red}_1 S$ и $\text{red}_2 S$ такие, что $\text{red}_2 S \subseteq \text{red}_1 S \subseteq S$ и для любого $\alpha \in (0, 1)$

$$\beta(\alpha, S) = \beta(\alpha, \text{red}_1 S) = \beta(\alpha, \text{red}_2 S). \quad (5)$$

Результаты работы [1] были обобщены в [2] на случай проверки произвольных гауссовских мер.

Целью настоящей работы является получение аналогичных результатов для пуассоновских процессов.

З а м е ч а н и е 1. Все результаты статьи остаются справедливыми и для пространственных пуассоновских процессов (мер).

З а м е ч а н и е 2. 1) Результаты работ [1], [2] по существу основаны на следующем геометрическом свойстве гауссовских мер. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гауссовскую меру с плотностью распределения $\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Для любых $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ рассмотрим множество

$$A(\lambda, \mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: \frac{\mu(\mathbf{x} + \mathbf{a})}{\mu(\mathbf{x})} = \lambda \right\}.$$

Тогда $A(\lambda, \mathbf{a})$ является гиперплоскостью в $\mathbf{R}^n$. В [2, теорема 2] было также показано, что если $n \geq 2$, то таким свойством обладают только гауссовские меры.

2) Есть определенное внешнее сходство между формулировками результатов в настоящей работе (или [1], [2]) и теоремой Хубера–Штрассена [7]. Однако есть и определенное различие. Сложная альтернатива $\mathcal{Q}$ в [7] имеет вид

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{Q}: \mathbf{Q} = (1 - \varepsilon)\mathbf{Q}_0 + \varepsilon\mathbf{F}, \mathbf{F} \in \mathcal{F}\},$$

где $\mathbf{Q}_0$ — заданная вероятностная мера, $\varepsilon \in (0, 1)$ — заданное число, а $\mathcal{F}$ — множество *всех возможных* вероятностных мер. Другими словами, в [7] рассматривалась определенная *смесь вероятностных мер*. Задача состоит в нахождении *наихудшей* меры $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{Q}$. Тогда, даже если $\mathbf{Q}_0$ является гауссовской мерой, мера $\mathbf{Q}^*$ не является гауссовской. В [1], [2] рассматривалась *смесь сдвигов* гауссовских вероятностных мер. Аналогично, в данной работе рассматривается *смесь интенсивностей* пуассоновских процессов. Другое различие состоит в том, что результаты (и доказательства) в [1], [2] и данной работе значительно проще, чем в [7].

3) В определенной степени результаты работы основаны на монотонности соответствующего отношения правдоподобия в бесконечномерном случае (в отличие от традиционного одномерного случая [10]).

1.2. Эквивалентная постановка задачи. В исходной постановке задачи нас интересует, когда заданное множество интенсивностей $\mathcal{Q}$ можно заменить одной интенсивностью $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}$. Иногда удобнее рассматривать следующую эквивалентную обратную задачу.

Пусть заданы интенсивности $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Обозначим $\mathcal{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ наибольшее множество интенсивностей такое, что для любого $0 < \alpha < 1$ верна формула

$$\beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})). \quad (6)$$

Иными словами, $\mathcal{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ есть наибольшее множество, которое можно заменить интенсивностью $\mathbf{q}$.

В работе будет полностью описано множество $\mathcal{Q}(\mathbf{p}, c\mathbf{p})$ при любом $c > 0$ и будут получены некоторые оценки для более общих множеств $\mathcal{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

З а м е ч а н и е 3. Если $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, то с помощью замены времени задачу всегда можно свести к случаю $\mathbf{p} \equiv \mathbf{1}$.

Далее для функций $\mathbf{f} = \{f(t), 0 \leq t \leq T\}$, $\mathbf{p} = \{p(t), 0 \leq t \leq T\}$ и пуассоновского процесса $x(t)$ используем обозначения

$$(\mathbf{f}, \mathbf{p}) = \int_0^T f(t)p(t) dt, \quad (\mathbf{f}, dx) = \int_0^T f(t) dx(t), \quad \|\mathbf{f}\| = \int_0^T f(t) dt. \quad (7)$$

В заключение этого раздела приведем пример, показывающий, какого рода результаты будут представлены далее.

П р и м е р 1. Пусть $\mathbf{p} \equiv \mathbf{1}$, $0 \leq t \leq T$, и $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}: q(t) = 2 + \sin(\omega t), \omega \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$. Тогда из приведенной в разделе 2 теоремы 1 следует, что множество $\mathcal{Q}$ можно заменить интенсивностью $\mathbf{q}^* \equiv 2$.

В разделе 2 исследуется случай, когда множество $\mathcal{Q}$ можно заменить одной интенсивностью $\mathbf{q}^*$. В разделе 3 исследуется, когда множество $\mathcal{Q}$ можно заменить меньшим множеством $\text{red } \mathcal{Q}$. В разделе 4 рассматриваются очень широкие множества $\mathcal{Q}$. В разделе 5 рассматривается одна естественная гипотеза о минимаксной проверке гипотез.

2. Замена множества $\mathcal{Q}$ одной интенсивностью $\mathbf{q}^*$.

2.1. Основные формулы. Пусть $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, — пуассоновский процесс с интенсивностью $s(t)$, т.е. случайный процесс с независимыми приращениями такой, что $x(0) = 0$ и для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

$$\mathbf{P}\{x(t_2) - x(t_1) = j\} = \frac{e^{-\Lambda} \Lambda^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\Lambda = \int_{t_1}^{t_2} s(\tau) d\tau$. Пусть $\mathcal{X}_T$ обозначает пространство непрерывных справа (т.е. $x(t+) - x(t) = 0$ для любого $0 \leq t \leq T$) неубывающих ступенчатых функций $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, с $x(0) = 0$ и $x(t) - x(t-) = 0$ или $x(t) - x(t-) = 1$. Тогда с вероятностью 1 любая траектория $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, пуассоновского процесса с конечной интенсивностью принадлежит $\mathcal{X}_T$. Кроме того, снабжая $\mathcal{X}_T$ некоторой естественной метрикой и σ -алгеброй $\mathcal{B}_T$, получаем измеримое пространство $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$. Каждый пуассоновский процесс порождает свою вероятностную меру на $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$.

Рассмотрим на $[0, T]$ два пуассоновских процесса с интенсивностями $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ соответственно, порождающие в $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$ меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Тогда для производной Радона–Никодима известна следующая формула (см., например, [9]):

$$\ln \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(x_0^T) = \left(\ln \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}, dx \right) - \|\mathbf{q}\| + \|\mathbf{p}\|, \quad (8)$$

где $\|\mathbf{s}\| = \int_0^T s(t) dt$.

Далее в работе ξ_λ обозначает пуассоновскую случайную величину с параметром λ . Тогда $\ln \mathbf{E} e^{z\xi_\lambda} = \lambda(e^z - 1)$ для любого вещественного z . Мы будем регулярно использовать следующие два хорошо известных факта.

Ф а к т 1. Пусть ξ_λ и ξ_μ суть пуассоновские случайные величины. Если $\mu > \lambda$, то ξ_μ можно представить в виде $\xi_\mu \stackrel{d}{=} \xi_\lambda + \xi_{\mu-\lambda}$ (т.е. обе части этой формулы распределены одинаково), где ξ_λ и $\xi_{\mu-\lambda}$ — независимые случайные величины.

Ф а к т 2. Более общо, пусть $x_{\mathbf{p}}(t)$ и $x_{\mathbf{q}}(t)$ суть пуассоновские случайные процессы. Если $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$, то процесс $x_{\mathbf{q}}(t)$ можно представить в виде $x_{\mathbf{q}}(t) \stackrel{d}{=} x_{\mathbf{p}}(t) + x_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}(t)$, где случайные процессы $x_{\mathbf{p}}(t)$ и $x_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}(t)$ независимы.²⁾

Из (8) для любой интегрируемой функции $f(t)$ можно получить формулу «математического ожидания» [9]

$$\ln \mathbf{E}_{\mathbf{P}} e^{(\ln \mathbf{f}, dx_{\mathbf{p}})} = (\mathbf{f}, \mathbf{p}) - \|\mathbf{p}\|, \quad (9)$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$ означает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}$ (или интенсивности $\mathbf{p}$).

Напомним, что если ξ, η суть случайные величины, то $\xi \stackrel{\text{st}}{\leq} \eta$ (т.е. *стохастически*), если $\mathbf{P}(\xi \geq z) \leq \mathbf{P}(\eta \geq z)$ для любого $z \in \mathbf{R}^1$.

2.2. Проверка двух интенсивностей. Рассмотрим сначала случай двух простых гипотез (интенсивностей) $H_0: \mathbf{s} = \mathbf{p}$ и $H_1: \mathbf{s} = \mathbf{q}$. Тогда оптимальная область решения $\mathcal{D}$ описывается леммой Неймана–Пирсона [10, гл. 3] и имеет вид

$$\ln \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(x_0^T) < \gamma \implies H_0, \quad \ln \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(x_0^T) > \gamma \implies H_1, \quad \text{где } \gamma = \gamma(\alpha)$$

(для простоты мы опускаем случай равенства). Это эквивалентно тесту (с другим γ)

$$\left(\ln \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}, dx \right) < \gamma \implies H_0, \quad \left(\ln \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}, dx \right) > \gamma \implies H_1.$$

Тогда для вероятностей ошибки 1-го рода $\alpha(\gamma)$ и 2-го рода $\beta(\gamma)$ получаем

$$\alpha(\gamma) = \mathbf{P} \left\{ \left(\ln \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}, dx \right) \geq \gamma \mid H_0 \right\} = \mathbf{P} \left\{ \left(\ln \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}, dx_{\mathbf{p}} \right) \geq \gamma \right\},$$

$$\beta(\gamma) = \mathbf{P} \left\{ \left(\ln \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}, dx_{\mathbf{q}} \right) \leq \gamma \right\}.$$

²⁾ Для упрощения обозначений далее мы пишем просто $=$ вместо $\stackrel{d}{=}$.

2.3. Простая гипотеза против сложной альтернативы. Рассмотрим минимаксную проверку простой гипотезы $H_0: \mathbf{s} = \mathbf{p}$ против сложной альтернативы $H_1: \mathbf{s} = \mathbf{q}, \mathbf{q} \in \mathcal{Q}$, где интенсивность $\mathbf{p}$ и множество $\mathcal{Q}$ заданы.

Исследуем сначала случай, когда множество $\mathcal{Q}$ можно заменить некоторой интенсивностью $\mathbf{q}^*$. Используем оптимальный тест для проверки $\mathbf{p}$ против $\mathbf{q}^*$ и используем его для всех $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Тогда вероятность ошибки 1-го рода α не изменится. Для того чтобы вероятность ошибки 2-го рода β не ухудшилась, необходимо иметь для любого $\gamma \in \mathbf{R}^1$ и любого $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$

$$\mathbf{P}\{\eta_{\mathbf{q}} \leq \gamma \mid \mathbf{q}\} \leq \mathbf{P}\{\eta_{\mathbf{q}^*} \leq \gamma \mid \mathbf{q}^*\}, \quad (10)$$

где

$$\eta_{\mathbf{s}} = \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}}, dx_{\mathbf{s}} \right). \quad (11)$$

К сожалению, в отличие от гауссовского случая [1], [2], у нас нет эффективного метода сравнения общих стохастических пуассоновских интегралов $\eta_{\mathbf{s}}$ из (10), (11) при разных $\mathbf{s}$. Поэтому далее мы рассматриваем только некоторые частные случаи, когда мы можем сравнить эти стохастические интегралы.

Сначала получим аналог границ (4). Для интенсивности $\mathbf{p}$ и множества $\mathcal{Q}$ рассмотрим интенсивность $\mathbf{q}^*$ такую, что

$$(\mathbf{q}^* - \mathbf{q})(\mathbf{q}^* - \mathbf{p}) \leq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (12)$$

Так как всегда можно положить $\mathbf{q}^* = \mathbf{p}$ (но это даст тривиальный результат), множество возможных интенсивностей $\mathbf{q}^*$ непусто. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 1. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливы неравенства

$$\sup_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} \beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q}) \leq \inf_{\mathbf{q}^*} \beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}^*), \quad (13)$$

где инфимум в правой части берется по всем $\mathbf{q}^*$, удовлетворяющим условию (12).

Доказательство. Достаточно установить только правое неравенство в (13). Используем оптимальный тест для $\mathbf{p}$ против $\mathbf{q}^*$ и применим его для всех $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Тогда необходимо, чтобы выполнялось неравенство (10). Разобьем интервал $[0, T]$ на три части: $[0, T] = T_+ + T_- + T_0$, где

$$\begin{aligned} T_+ &= \{t \in [0, T]: q^*(t) > p(t)\}, \quad T_- = \{t \in [0, T]: q^*(t) < p(t)\}, \\ T_0 &= \{t \in [0, T]: q^*(t) = p(t)\}. \end{aligned}$$

Тогда (см. (11))

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbf{q}} &= \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_+}, dx_{\mathbf{q}} \right) + \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_-}, dx_{\mathbf{q}} \right), \\ \eta_{\mathbf{q}^*} &= \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_+}, dx_{\mathbf{q}^*} \right) + \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_-}, dx_{\mathbf{q}^*} \right),\end{aligned}$$

где $\mathbf{I}_B$ — индикаторная функция множества B .

В силу условия (12), имеем $q^*(t) \leq q(t)$ для $t \in T_+$ и $q^*(t) \geq q(t)$ для $t \in T_-$. Поэтому (см. факт 2) справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_+}, dx_{\mathbf{q}^*} \right) &\leq \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_+}, dx_{\mathbf{q}} \right), \\ \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_-}, dx_{\mathbf{q}^*} \right) &\leq \left(\ln \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{I}_{T_-}, dx_{\mathbf{q}} \right).\end{aligned}$$

Используем теперь следующий простой результат о стохастическом упорядочении. Пусть (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) суть две независимые пары случайных величин такие, что $\xi_i \stackrel{\text{st}}{\leq} \eta_i$, $i = 1, 2$. Тогда $\xi_1 + \xi_2 \stackrel{\text{st}}{\leq} \eta_1 + \eta_2$. Так как случайный процесс $x_{\mathbf{s}}(t)$ в (11) имеет независимые приращения для любого $\mathbf{s}$, то, используя эти свойства, получаем $\eta_{\mathbf{q}^*} \stackrel{\text{st}}{\leq} \eta_{\mathbf{q}}$ для любого $\eta_{\mathbf{q}} \in \mathcal{Q}$, что эквивалентно неравенству (10). Предложение доказано.

Следствие 1. Если существует $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}$ такое, что для него выполняется условие (12), то множество $\mathcal{Q}$ можно заменить на $\mathbf{q}^*$.

Пример 2. Предположим, что для интенсивности $\mathbf{p}$ и множества $\mathcal{Q}$ существуют множества $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq [0, T]$ такие, что $q(t) > p(t)$, $t \in \mathcal{T}_1$, $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$, и $q(t) < p(t)$, $t \in \mathcal{T}_2$, $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. При этом выберем множества $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq [0, T]$ максимально возможными. Введем функцию $q^*(t, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$ следующим образом:

$$q^*(t, \mathbf{p}, \mathcal{Q}) = \begin{cases} \inf_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} q(t), & t \in \mathcal{T}_1, \\ \sup_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} q(t), & t \in \mathcal{T}_2, \\ p(t), & t \in [0, T] \setminus (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2). \end{cases} \quad (14)$$

Тогда функция $q^*(t, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$ удовлетворяет условию (12).

Аналогично можно описать множество $\mathcal{Q}(\mathbf{p}, c\mathbf{p})$ (см. (6)). Заметим, что если $\mathbf{q}^* = c\mathbf{p}$, то тогда $\ln(\mathbf{q}^*/\mathbf{p}) = \ln c$ и из (11) имеем $\eta_{\mathbf{s}} = \xi_{\|\mathbf{s}\|} \ln c$. В результате получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. 1) Если $c > 1$, то

$$\mathcal{Q}(\mathbf{p}, c\mathbf{p}) = \{\mathbf{h}: \|\mathbf{h}\| \geq c\|\mathbf{p}\|\}.$$

2) Если $c < 1$, то

$$\mathcal{Q}(\mathbf{p}, c\mathbf{p}) = \{\mathbf{h}: \|\mathbf{h}\| \leq c\|\mathbf{p}\|\}.$$

З а м е ч а н и е 4. В следствии 1 мы имеем не только $\eta_{\mathbf{q}^*} \stackrel{\text{st}}{\leq} \eta_{\mathbf{q}}$ стохастически, но также $\eta_{\mathbf{q}^*} \leq \eta_{\mathbf{q}}$ для каждой траектории x_0^T .

В противоположность этому, в следующем вспомогательном результате мы имеем только $\eta_{\mathbf{q}^*} \stackrel{\text{st}}{\leq} \eta_{\mathbf{q}}$ стохастически, но не для каждой траектории x_0^T .

Лемма 1. Пусть $f(t)$, $0 \leq t \leq T$, — неотрицательная невозрастающая функция. Для интенсивностей $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ рассмотрим случайные величины $\eta_{\mathbf{p}}$ и $\eta_{\mathbf{q}}$, где

$$\eta_{\mathbf{s}} = (\mathbf{f}, dx_{\mathbf{s}}).$$

Предположим, что для любого t , $0 \leq t \leq T$, выполняется условие

$$(\mathbf{p}, \mathbf{I}_{[0,t]}) = \int_0^t p(u) du \leq \int_0^t q(u) du = (\mathbf{q}, \mathbf{I}_{[0,t]}). \quad (15)$$

Тогда $\eta_{\mathbf{p}} \stackrel{\text{st}}{\leq} \eta_{\mathbf{q}}$ стохастически.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(t)$, $0 \leq t \leq T$, — ступенчатая функция:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i I_{\Delta_i}(t),$$

где $f_1 > f_2 > \dots > f_n > 0$ и $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i)$, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Тогда

$$\eta_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n f_i \xi_{\Delta_{p_i}}, \quad \eta_{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n f_i \xi_{\Delta_{q_i}},$$

где $\Delta_{p_i} = p(t_i) - p(t_{i-1})$, $\Delta_{q_i} = q(t_i) - q(t_{i-1})$ и все пуассоновские случайные величины $\{\xi\}$ независимы.

В силу предположения (15) имеем $\Delta_{q_1} \geq \Delta_{p_1}$. Тогда, используя представление $\xi_{\Delta_{q_1}} = \xi_{\Delta_{p_1}} + \xi_{\Delta_{q_1} - \Delta_{p_1}}$ (см. факт 1), имеем

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{q}} - \eta_{\mathbf{p}} &= f_1 \xi_{\Delta_{q_1} - \Delta_{p_1}} + f_2 \xi_{\Delta_{q_2}} - f_2 \xi_{\Delta_{p_2}} + \sum_{i=3}^n f_i [\xi_{\Delta_{q_i}} - \xi_{\Delta_{p_i}}] \\ &\geq f_2 [\xi_{\Delta_{q_1} - \Delta_{p_1}} + \xi_{\Delta_{q_2}} - \xi_{\Delta_{p_2}}] + \sum_{i=3}^n f_i [\xi_{\Delta_{q_i}} - \xi_{\Delta_{p_i}}] \\ &= f_2 \xi_{\Delta_{q_1} + \Delta_{q_2} - \Delta_{p_1} - \Delta_{p_2}} + \sum_{i=3}^n f_i [\xi_{\Delta_{q_i}} - \xi_{\Delta_{p_i}}] \\ &\geq f_3 \xi_{\Delta_{q_1} + \Delta_{q_2} - \Delta_{p_1} - \Delta_{p_2}} + \sum_{i=3}^n f_i [\xi_{\Delta_{q_i}} - \xi_{\Delta_{p_i}}], \end{aligned}$$

где снова использовалось предположение (15) в виде $\Delta_{q_1} + \Delta_{q_2} - \Delta_{p_1} \geq \Delta_{p_2}$. Продолжая этот процесс, получаем формулу (15) для ступенчатой

функции $f(t)$. Так как любую монотонную функцию $f(t)$ можно приблизить ступенчатой функцией с произвольной точностью, это завершает доказательство леммы.

Из леммы 1 получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{q}^*$ такова, что $\mathbf{q}^* \geq \mathbf{p}$, а $f(t) = q^*(t)/p(t)$ — монотонная невозрастающая функция. Предположим, что для любого t , $0 \leq t \leq T$, и любого $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ выполняется условие

$$(\mathbf{q}^*, \mathbf{I}_{[0,t]}) \leq (\mathbf{q}, \mathbf{I}_{[0,t]}). \quad (16)$$

Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q}) \leq \beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}^*). \quad (17)$$

Кроме того, если $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}$, то множество $\mathcal{Q}$ можно заменить на $\mathbf{q}^*$.

З а м е ч а н и е 5. Предположение о том, что $f(t)$ есть монотонная невозрастающая функция, не является ограничением, так как для любой $q^*(t)$ этого можно добиться, преобразуя шкалу времени. Так как пуассоновский процесс имеет независимые приращения, такое преобразование не изменяет постановку задачи. Это предположение было сделано только для того, чтобы упростить условие (16). Более общий результат можно сформулировать следующим образом.

Для $0 \leq z < \infty$ и $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ введем множество

$$\mu(z, \mathbf{q}) = \left\{ t \in [0, T]: \frac{q(t)}{p(t)} \geq z \right\}. \quad (18)$$

Следствие 2. Пусть $\mathbf{q}^*$ такова, что $\mathbf{q}^* \geq \mathbf{p}$. Предположим, что для любого z , $0 \leq z < \infty$, и любого $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ выполняется условие

$$(\mathbf{q}^*, \mathbf{I}_{\mu(z, \mathbf{q}^*)}) \leq (\mathbf{q}, \mathbf{I}_{\mu(z, \mathbf{q})}). \quad (19)$$

Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливы неравенства (17). Кроме того, если $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}$, то множество $\mathcal{Q}$ можно заменить на $\mathbf{q}^*$.

В следующем результате мы заменяем предположение $\mathbf{q}^* \geq \mathbf{p}$ другим условием.

Следствие 3. 1) Пусть $\mathbf{q}^*$ такова, что функция $f(t) = q^*(t)/p(t)$ монотонно убывает. Введем числа $T_1 \leq T_2$:

$$T_1 = \sup\{t: f(t) > 1\}, \quad T_2 = \inf\{t: f(t) < 1\}.$$

Предположим, что для любого $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ выполняются условия

$$(\mathbf{q}^*, \mathbf{I}_{[0,t]}) \leq (\mathbf{q}, \mathbf{I}_{[0,t]}), \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad (20)$$

$$(\mathbf{q}^*, \mathbf{I}_{[T_2,t]}) \geq (\mathbf{q}, \mathbf{I}_{[T_2,t]}), \quad T_2 \leq t \leq T. \quad (21)$$

Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливы неравенства (17). Кроме того, если $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}$, то множество $\mathcal{Q}$ можно заменить на $\mathbf{q}^*$.

Пример 3. Пусть $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}^* \geq \max\{1, \mathbf{p}\}$ таковы, что функция $f(t) = q^*(t)/p(t)$ монотонно убывает. Пусть также $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}: q(t) = q^*(t) + \sin(\omega t), \omega \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$. Тогда для $\mathbf{q}^*$ (что соответствует $\omega = 0$) выполняется условие (16). Поэтому в силу теоремы 1 (или следствия 2) множество $\mathcal{Q}$ можно заменить на $\mathbf{q}^*$. Заметим, что если бы множество $\mathcal{Q}$ имело вид $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}: q(t) = q^*(t) - \sin(\omega t), \omega \geq 0\}$, то для $\mathbf{q}^*$ условие (16) не выполнялось бы и теорема 1 была бы неприменима.

Пример 4. Пусть $\mathbf{p} \equiv 1$ и $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}: q(t) = 2 - \sin(t - \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq t \leq \pi\}$. Тогда для $\mathbf{q}^*: q^*(t) = 2 - \sin t$ (что соответствует $\varphi = 0$) выполняется условие (19). Действительно, для этого достаточно, чтобы для любого $0 \leq z \leq \pi$ выполнялось неравенство

$$\int_0^z [q^*(t) - q(t)] dt + \int_{\pi-z}^{\pi} [q^*(t) - q(t)] dt \leq 0.$$

Справедливость этого неравенства можно установить, дифференцируя по z . Поэтому в силу следствия 3 множество $\mathcal{Q}$ можно заменить на $\mathbf{q}^*$.

3. Замена множества $\mathcal{Q}$ подмножеством $\text{red } \mathcal{Q}$. В этом разделе будет показано, что при исследовании величины $\beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q})$, вообще говоря, можно заменить множество $\mathcal{Q}$ его подмножеством $\text{red } \mathcal{Q}$.

Представим множество $\mathcal{Q}$ следующим образом:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_+ + \mathcal{Q}_- + \mathcal{Q}_0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_+ &= \{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}: \mathbf{q} \geq \mathbf{p}\}, \quad \mathcal{Q}_- = \{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}: \mathbf{q} \leq \mathbf{p}\}, \\ \mathcal{Q}_0 &= \mathcal{Q} - \mathcal{Q}_+ - \mathcal{Q}_-. \end{aligned}$$

Можно предполагать, что множества $\mathcal{Q}_+$ и $\mathcal{Q}_-$ не пересекаются (в противном случае $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}$).

Пусть $\text{red } \mathcal{Q}_+$ обозначает множество интенсивностей $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}_+$ таких, что:

- 1) для любого $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_+$ существует $\mathbf{s}_q \in \text{red } \mathcal{Q}_+$ такое, что $\mathbf{s}_q \leq \mathbf{q}$;
- 2) ни для какого $\mathbf{q} \in \text{red } \mathcal{Q}_+$ не существует $\mathbf{s}_q < \mathbf{q}$.

Аналогично, пусть $\text{red } \mathcal{Q}_-$ обозначает множество интенсивностей $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}_-$ таких, что:

- 1) для любого $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_-$ существует $\mathbf{s}_q \in \text{red } \mathcal{Q}_-$ такое, что $\mathbf{s}_q \geq \mathbf{q}$;
- 2) ни для какого $\mathbf{q} \in \text{red } \mathcal{Q}_-$ не существует $\mathbf{s}_q > \mathbf{q}$.

Введем множество $\text{red } \mathcal{Q}$ следующим образом:

$$\text{red } \mathcal{Q} = \text{red } \mathcal{Q}_+ + \text{red } \mathcal{Q}_- + \mathcal{Q}_0. \quad (23)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\beta(\alpha, \mathbf{p}, \mathcal{Q}) = \beta(\alpha, \mathbf{p}, \text{red } \mathcal{Q}). \quad (24)$$

Другими словами, множество $\mathcal{Q}$ можно заменить множеством $\text{red } \mathcal{Q}$.

Доказательство. Байесовские тесты и их пределы образуют полный класс в рассматриваемой задаче [11], и, в частности, среди них находится оптимальный тест. Пусть $F(d\mathbf{u})$ — произвольное априорное распределение на $\text{red } \mathcal{Q}$. Обозначим

$$\eta = \int_{\text{red } \mathcal{Q}} \left(\ln \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{p}}, dx \right) F(d\mathbf{u}), \quad \eta_{\mathbf{q}} = \int_{\text{red } \mathcal{Q}} \left(\ln \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{p}}, d\mathbf{x}_{\mathbf{q}} \right) F(d\mathbf{u}).$$

Оптимальный тест проверки $H_0: \mathbf{s} = \mathbf{p}$ против $H_1: \mathbf{s} \in \text{red } \mathcal{Q}$ с априорным распределением $F(d\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \text{red } \mathcal{Q}$, имеет вид

$$\eta < \gamma \implies H_0, \quad \eta > \gamma \implies H_1.$$

Покажем, что этот тест не ухудшится, если применить его для $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$. Для этого достаточно установить неравенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{\mathbf{q}} > \gamma\} \leq \sup_{\mathbf{s} \in \text{red } \mathcal{Q}} \mathbf{P}\{\eta_{\mathbf{s}} > \gamma\}, \quad \gamma \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (25)$$

Достаточно рассмотреть случай $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_+$, т.е. когда $\mathbf{q} \geq \mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Если $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_+$, но $\mathbf{q} \notin \text{red } \mathcal{Q}_+$, то тогда $\mathbf{q} = \mathbf{s}_{\mathbf{q}} + \mathbf{v}$, где $\mathbf{s}_{\mathbf{q}} \in \text{red } \mathcal{Q}_+$ и $\mathbf{v} \geq 0$. Используем представление $x_{\mathbf{q}} = x_{\mathbf{s}_{\mathbf{q}}} + x_{\mathbf{v}}$ (см. факт 2) и условие $\mathbf{u} \geq \mathbf{p}$. Тогда из определения $\eta_{\mathbf{q}}$ получаем (25), откуда следует формула (24). Утверждение доказано.

Пример 5. На рис. 1 показаны множество $\mathcal{Q}$ (штрихованная область) и $\text{red } \mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$.

Рис. 1. Множества $\mathcal{Q}$ (штрихованная область) и $\text{red } \mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$

4. Слишком «широкие» множества $\mathcal{Q}$. В этом разделе рассматривается случай, когда множество $\mathcal{Q}$ слишком «широкое» и, в определенном смысле, мы не можем проверить гипотезу $\mathbf{p}$ против $\mathcal{Q}$. Приведем сначала следующий пример.

Пример 6. Пусть $\mathbf{p} \equiv 1$, $0 \leq t \leq T$, и $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}: q(t) = 1 + (1/2)\sin(2\pi\omega t), 1 \leq \omega \leq A(T)\}$. Покажем, что если величина $A(T)$ достаточно велика, то тогда невозможно различить интенсивность $\mathbf{p}$ и множество $\mathcal{Q}$.

Чтобы исследовать подобные задачи, используем метод, развитый в [1]. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ — измеримое пространство и $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ — две вероятностные меры на нем. Используя одно наблюдение $x \in \mathcal{X}$, мы хотим проверить гипотезы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Обозначим через α и β вероятности ошибки 1-го и 2-го рода соответственно. Тогда для любого метода решения справедливо неравенство (см. [8], [1, теорема 3])

$$\alpha + \beta \geq 1 - \frac{1}{2} \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\|, \quad (26)$$

где $\|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\|$ — расстояние по вариации между мерами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Кроме того, если $\mathbf{Q}$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P}$, то из (26) получаем (см. [1, теорема 3])

$$\alpha + \beta \geq 1 - \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (27)$$

Возвращаясь к проверке интенсивности $\mathbf{p}$ против $\mathcal{Q}$, выберем в $\mathcal{Q}$ множество из N равновероятных интенсивностей $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N\} \subset \mathcal{Q}$ таких, что каждая соответствующая мера $\mathbf{Q}_i$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P}$. Введем также «усредненную» меру

$$\mathbf{Q} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i.$$

Тогда из (27) следует, что для любого метода решения

$$\alpha + \beta \geq 1 - \frac{1}{2} \inf_{\{\mathbf{q}_i\}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (28)$$

С помощью формул (8), (9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right)^2 &= N^{-2} \sum_{i,j} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}_i}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{Q}_j}{d\mathbf{P}} \right), \\ \ln \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}_i}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{Q}_j}{d\mathbf{P}} \right) &= \int_0^T \frac{q_i(t)q_j(t)}{p(t)} dt + \|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{q}_i\| - \|\mathbf{q}_j\|. \end{aligned}$$

Предположим, что интенсивности $\{q_i\}$ имеют вид $q_i(t) = p(t)[1 + f_i(t)]$, $i = 1, \dots, N$, где функции $\{f_i(t)\}$ равномерно ограничены и удовлетворяют условиям

$$(\mathbf{f}_i, \mathbf{p}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j, \mathbf{p}) = 0, \quad i \neq j. \quad (29)$$

Тогда $\|\mathbf{q}_i\| = \|\mathbf{p}\|$, $i = 1, \dots, N$, и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}_i}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{Q}_j}{d\mathbf{P}} \right) &= 1, \quad i \neq j, \\ \ln \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}_i}{d\mathbf{P}} \right)^2 &= (\mathbf{f}_i^2, \mathbf{p}), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (30)$$

Кроме того, каждая мера $\mathbf{Q}_i$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P}$. Поэтому из (28) и (30) имеем

$$\alpha + \beta \geq 1 - \frac{1}{2N} \left[\sum_{i=1}^N (e^{(\mathbf{f}_i^2, \mathbf{p})} - 1) \right]^{1/2}.$$

Предположим также, что для некоторой постоянной a выполняется условие

$$\max_i (\mathbf{f}_i^2, \mathbf{p}) \leq a \|\mathbf{p}\|. \quad (31)$$

Тогда получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. *Предположим, что можно выбрать N интенсивностей $\mathbf{q}_i \in \mathcal{Q}$ вида $q_i(t) = p(t)[1 + f_i(t)]$, $i = 1, \dots, N$, где функции $\{f_i(t)\}$ равномерно ограничены и удовлетворяют условиям (29) и (31). Тогда для любого метода решения справедливо неравенство*

$$\alpha + \beta \geq 1 - \frac{e^{a\|\mathbf{p}\|/2}}{2\sqrt{N}}. \quad (32)$$

В частности, если можно выбрать $N \geq T^2 e^{a\|\mathbf{p}\|}$ таких интенсивностей $\mathbf{q}_i \in \mathcal{Q}$, то $\alpha + \beta > 1 - 1/T$ и нельзя различить интенсивность $\mathbf{p}$ и множество $\mathcal{Q}$ при $T \rightarrow \infty$.

Пример 6 (продолжение). Предположим для простоты, что $T/(2\pi)$ — целое число, и положим $f_i(t) = (1/2) \sin(2\pi it)$. Тогда выполнены условия (29), а в (31) имеем $\|\mathbf{p}\| = T$, $a = 1/2$. Поэтому если $A(T) \geq T^2 e^{T/2}$, то из (32) следует, что $\alpha + \beta \rightarrow 1$ при $T \rightarrow \infty$.

5. Об одной естественной гипотезе. Контрпример. Следующая гипотеза возникает естественным образом (причем в общей задаче минимаксной проверки гипотез). Предположим, что множество $\mathcal{Q}$ можно разбить на конечное число частей $\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_i$, так что для каждого $i = 1, \dots, N$ при проверке $\mathbf{p}$ против $\mathcal{Q}_i$ можно заменить $\mathcal{Q}_i$ одной

интенсивностью $\mathbf{q}_i$. Верно ли, что тогда множество $\mathcal{Q}$ можно заменить на $\{\mathbf{q}_i, \dots, \mathbf{q}_N\}$?

Вообще говоря, эта гипотеза неверна.

Контрпример. Пусть $\mathbf{p} \equiv \mathbf{1}$, $0 \leq t \leq T$. Введем функции

$$\mathbf{q}_{a,b} = \left\{ \mathbf{q}: q(t) = a, 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; q(t) = b, \frac{T}{2} < t \leq T \right\}.$$

Для некоторого $0 < a < 1$ введем также множества

$$\mathcal{Q}_{1,a} = \{\mathbf{q}_{2,1}, \mathbf{q}_{2,a}\}, \quad \mathcal{Q}_2 = \{\mathbf{q}_{1,2}\}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{1,a} \cup \mathcal{Q}_2.$$

Заметим, что если верна гипотеза $\mathcal{Q}$, то тогда с большой вероятностью по крайней мере на одном из интервалов $[0, T/2]$ или $[T/2, T]$ число случайных событий равно примерно T . Если же верна гипотеза $\mathbf{p}$, то тогда с большой вероятностью оба эти числа равны примерно $T/2$. Это позволяет хорошо проверять гипотезу $\mathbf{p}$ против $\mathcal{Q}$ при больших T .

Ясно, что при проверке $\mathbf{p}$ против $\mathcal{Q}_{1,a}$ можно заменить множество $\mathcal{Q}_{1,a}$ одной интенсивностью $\mathbf{q}_{2,1}$. Покажем, однако, что нельзя заменить множество $\mathcal{Q}$ интенсивностями $\{\mathbf{q}_{2,1}, \mathbf{q}_{1,2}\}$.

Действительно, в силу симметрии при проверке $\mathbf{p}$ против $\{\mathbf{q}_{2,1}, \mathbf{q}_{1,2}\}$ наилучшим априорным распределением на $\{\mathbf{q}_{2,1}, \mathbf{q}_{1,2}\}$ является равновероятное. Кроме того, достаточной статистикой в задаче является число случайных событий x, y на интервалах $[0, T/2]$ и $[T/2, T]$ соответственно. Простые вычисления показывают, что оптимальное решение в пользу $\mathbf{p}$ принимается, если

$$f(x, y) = 2^x + 2^y < \gamma.$$

Для того чтобы заменить множество $\mathcal{Q}$ интенсивностями $\{\mathbf{q}_{2,1}, \mathbf{q}_{1,2}\}$, необходимо иметь

$$\mathbf{P}\{f(x, y) < \gamma \mid \mathbf{q}_{2,1}\} \geq \mathbf{P}\{f(x, y) < \gamma \mid \mathbf{q}_{2,a}\}.$$

Ясно, что это неравенство не выполняется, если $a < 1$. Поэтому если $a < 1$, то нельзя заменить множество $\mathcal{Q}$ интенсивностями $\{\mathbf{q}_{2,1}, \mathbf{q}_{1,2}\}$.

З а м е ч а н и е 6. В этом контрпримере не выполняется условие $\mathbf{q} \geq \mathbf{p}$ для всех $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Авторы не знают, верна ли эта гипотеза, если потребовать, что $\mathbf{q} \geq \mathbf{p}$ для всех $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурнашев М. В. О минимаксном обнаружении неточно известного сигнала на фоне белого гауссовского шума. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 1, с. 106–118.

2. Бурнашев М. В. О различении гипотез для гауссовских мер и одна геометрическая характеристика гауссовского распределения. — Матем. заметки, 1982, т. 32, № 4, с. 549–556.
3. Бурнашев М. В. О минимально достижимой среднеквадратической ошибке при передаче параметра по каналу с белым гауссовским шумом. — Проблемы передачи информации, 1985, т. 21, № 4, с. 3–16.
4. Бурнашев М. В., Кутоянц Ю. А. О границе сферической упаковки, пропускной способности и о подобных результатах для пуассоновского канала. — Проблемы передачи информации, 1999, т. 35, № 2, с. 3–22.
5. Burnashev M. V., Kutoyants Yu. A. On minimal α -mean error parameter transmission over a Poisson channel. — IEEE Trans. Inform. Theory, 2001, v. 47, № 6, p. 2505–2515.
6. Chernoff H. A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, № 4, p. 493–507.
7. Huber P. J., Strassen V. Minimax tests and the Neyman–Pearson lemma for capacities. — Ann. Statist., 1973, v. 1, № 2, p. 251–263.
8. Kraft C. H. Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures. — Univ. California Publ. Statist., 1955, v. 2, № 1, p. 125–141.
9. Kutoyants Y. A. Parameter Estimation for Stochastic Processes. Berlin: Heldermann, 1984, 206 p.
10. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979, 408 с.
11. Wald A. Statistical Decision Functions. New York/London: Wiley/Chapman & Hall, 1950, 179 p.
12. Wyner A. D. Capacity and error exponent for the direct detection photon channel. I. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1988, v. IT-34, № 6, p. 1449–1461.
13. Wyner A. D. Capacity and error exponent for the direct detection photon channel. II. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1988, v. IT-34, № 6, p. 1462–1471.

Поступила в редакцию
11.IV.2011