Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, К. Лиу, Критические ветвящиеся процессы с двумя типами частиц, эволюционирующие в асинхронных случайных средах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 2, 225–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:52:10

© 2012 г.

ВАТУТИН В. А.*, ЛИУ К.**

КРИТИЧЕСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С ДВУМЯ ТИПАМИ ЧАСТИЦ, ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩИЕ В АСИНХРОННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ¹⁾

Рассматривается полностью разложимый ветвящийся процесс в случайной среде с двумя типами частиц. Частицы в этом процессе могут порождать потомков лишь своего собственного типа. Обозначим $\exp\{X_k(i)\}$ среднее число потомков, порождаемых одной частицей типа $i = 1, 2$ поколения k . Предполагая, что $X_k(2) = -X_k(1)$ с вероятностью единица, и что случайное блуждание $S_n(1) = X_1(1) + \dots + X_n(1)$, порождаемое случайной средой, является осциллирующим, мы исследуем совместное условное распределение числа частиц обоих типов в популяции в моменты $nt, 0 < t \leq 1$, при условии, что оба типа не выродились к моменту $n \rightarrow \infty$. При тех же условиях мы находим асимптотическое представление для совместных условных распределений размеров популяций обоих типов в моменты, когда состояние среды является чрезвычайно неблагоприятным для частиц первого типа. Показано, что рассматриваемый процесс обладает необычными свойствами, которые могут трактоваться как бутылочные горлышки и периоды роста в модели сосуществования хищника и жертвы.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, условные предельные теоремы, бутылочные горлышки.

1. Введение. Модель ветвящихся процессов в случайной среде, рассматриваемая в данной работе, является аналогом (для случая процессов с двумя типами частиц) ветвящихся процессов, введенных Смитом и Вилкинсоном [7].

Для формального описания этой модели обозначим $\mathcal{M}$ пространство вероятностных мер на множестве $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ и пусть $\mathbf{Q} := (Q^{(1)}, Q^{(2)})$ — вектор, компоненты которого принимают значения в пространстве $\mathcal{M}$. Будем говорить, что бесконечная последовательность $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots)$ независимых и одинаково распределенных копий $\mathbf{Q}$

*Математический институт им. В. А. Стеклова, ул. Губкина 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

**Université de Bretagne-Sud, Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (LMBA), UMR 6205 Campus de Tohannic, BP 573, 56017, Vannes, France; e-mail: Quansheng.Liu@univ-ubs.fr

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 11-01-00139.

образует случайную среду. Последовательность $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ -значных случайных векторов $\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots$ называется *полностью разложимым ветвящимся процессом в случайной среде* $\mathbf{\Pi}$ с двумя типами частиц, если начальное значение $\mathbf{Z}_0 = (Z_0^{(1)}, Z_0^{(2)})$ не зависит $\mathbf{\Pi}$ и, при заданной среде $\mathbf{\Pi}$, процесс $\mathcal{Z} = (\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots)$ с компонентами $\mathbf{Z}_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)})$, $n = 0, 1, \dots$, является цепью Маркова, задаваемой равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Z}_n | \mathbf{Z}_{n-1} = (z_{n-1}^{(1)}, z_{n-1}^{(2)}), \mathbf{\Pi} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots)) \\ = \mathcal{L}(\xi_{n1}^{(1)} + \dots + \xi_{nz_{n-1}^{(1)}}^{(1)}, \xi_{n1}^{(2)} + \dots + \xi_{nz_{n-1}^{(2)}}^{(2)}) \end{aligned}$$

для любых $n \geq 1$, $(z_{n-1}^{(1)}, z_{n-1}^{(2)}) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ и $\mathbf{Q}_n = (q_n^{(1)}, q_n^{(2)}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, где $\xi_{n1}^{(i)}, \xi_{n2}^{(i)}, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $q_n^{(i)}$, $i = 1, 2$. Мы можем записать этот факт в виде

$$Z_n^{(i)} := \sum_{i=1}^{Z_{n-1}^{(i)}} \xi_{ni}^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

где, при фиксации среды, $Z_n^{(1)}$ и $Z_n^{(2)}$ являются обычными неоднородными ветвящимися процессами Гальтона–Ватсона. Таким образом, случайная величина $\mathbf{Z}_n$ — это размер n -го поколения популяции, а $\mathbf{Q}_n$ — вектор, задающий распределение числа потомков индивидуумов соответствующих типов в поколении $n - 1$. Заметим, что частицы интересующего нас процесса производят потомков только своего типа. Обозначим $\mathbf{P}$ соответствующую вероятностную меру на рассматриваемом вероятностном пространстве.

В дальнейшем мы отождествляем наборы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}_n$, $n = 1, 2, \dots$, с парами (случайных) производящих функций

$$f^{(i)}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k Q^{(i)}(\{k\}) =: \mathbf{E} [s^{\xi^{(i)}} | Q^{(i)}], \quad 0 \leq s \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

и

$$f_n^{(i)}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k Q_n^{(i)}(\{k\}) =: \mathbf{E} [s^{\xi_n^{(i)}} | Q_n^{(i)}], \quad 0 \leq s \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

соответственно, и не делаем различия между наборами $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots)$ и $(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}) := \{(f_n^{(1)}, f_n^{(2)}), n = 1, 2, \dots\}$.

Положим

$$X(i) := \ln \mathbf{E} [\xi^{(i)} | Q^{(i)}], \quad i = 1, 2,$$

и

$$X_k(i) := \ln \mathbf{E} [\xi^{(i)} | Q_k^{(i)}], \quad \eta_k(i) := \frac{\mathbf{E} [\xi_k^{(i)} (\xi_k^{(i)} - 1) | Q_k^{(i)}]}{2(\mathbf{E} [\xi_k^{(i)} | Q_k^{(i)}])^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Одним из наших основных предположений является следующее условие.

У с л о в и е A1. Для любого $k = 1, 2, \dots$

$$X_k(2) = -X_k(1) \quad \mathbf{P}\text{-a.s.}$$

Таким образом, важным свойством рассматриваемой модели является тот факт, что процессы $Z^{(i)}(n)$, $i = 1, 2$ зависимы только через среду и, согласно условию A1, эволюционируют асинхронно: благоприятная среда для первого процесса ($X_k(1) > 0$) является неблагоприятной для второго ($X_k(2) < 0$) и наоборот.

Введем два случайных блуждания

$$S_0(i) := 0, \quad S_n(i) := \sum_{k=1}^n X_k(i), \quad i = 1, 2.$$

Ясно, что $S_n(2) = -S_n(1)$, $n = 0, 1, \dots$

Для простоты мы используем в дальнейшем обозначения $S_n := S_n(1)$ и $X = X_1(1)$. Несложно переформулировать все утверждения, связанные со случайной величиной $S_n(1)$, в соответствующие утверждения для случайной величины $S_n(2)$.

У с л о в и е A2. Распределение случайной величины X нерешетчато, и найдутся числа $c_n \rightarrow \infty$ такие, что последовательность S_n/c_n сходится по распределению к устойчивой с параметром α случайной величине Y , причем $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]$ и параметр положительности $\rho := \mathbf{P}(Y > 0) \in (0, 1)$ таковы, что либо $\alpha\rho < 1$, либо $\mathbf{E} X^2 < \infty$.

Известно (см., например, [5, гл. XVII, § 5]), что при выполнении условия A2 последовательность $\{c_n, n \geq 1\}$ правильно меняется с параметром α^{-1} , т.е., найдется медленно меняющаяся на бесконечности функция $l(n)$ такая, что

$$c_n = n^{1/\alpha} l(n). \quad (1)$$

Более того, последовательность $\{c_n, n \geq 1\}$ может быть выбрана монотонно возрастающей и так, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(X > c_n) \sim n^{-1}. \quad (2)$$

Кроме того, если $\alpha < 2$, то

$$\mathbf{P}(X > x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad (3)$$

где $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, удовлетворяющая соотношению $L(x^{1/\alpha} l(x)) \sim (l(x))^\alpha$ при $x \rightarrow \infty$.

Условие A2 означает, в частности, что $\{S_n, n \geq 0\}$ — осциллирующее случайное блуждание и, следовательно, ветвящиеся процессы $Z^{(i)}(n)$, $i = 1, 2$ являются критическими согласно классификации, введенной в работе [1].

Введем случайные величины

$$M_n := \max(S_1, \dots, S_n), \quad L_n := \min(S_1, \dots, S_n)$$

и положим

$$\begin{aligned} \mu(n) &:= \max\{1 \leq i \leq n: S_i = M_n\}, \\ \tau(n) &:= \min\{0 \leq i \leq n: S_i = \min(0, L_n)\}. \end{aligned}$$

Известно (см., например, [8, разд. 20]), что если условие А2 выполнено, то для любого $t \in (0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\tau(nt)}{n} \xrightarrow{d} \tau_t, \quad \frac{\mu(nt)}{n} \xrightarrow{d} \mu_t,$$

где случайные величины $t^{-1}\tau_t$ и $t^{-1}\mu_t$ имеют обобщенные распределения арксинуса на интервале $[0, 1]$ с плотностями

$$\frac{1}{\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)} \frac{1}{x^\rho(1-x)^{1-\rho}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)} \frac{1}{x^{1-\rho}(1-x)^\rho}.$$

Положим $D := \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \mathbf{P}(S_j = 0)$ и обозначим $I\{A\}$ индикатор события A .

Пусть $\gamma_0 := 0$, $\gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j: S_n < S_{\gamma_j})$ и $\Gamma_0 := 0$, $\Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j: S_n > S_{\Gamma_j})$, $j \geq 0$, обозначают строгие нижние и верхние лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n, n \geq 0\}$. Полагая $S_0 = 0$, зададим функции $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ равенствами

$$\begin{aligned} U(x) &:= I\{0 < x\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\Gamma_j} < x), \quad x \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty), \\ U(x) &= 0, \quad x < 0, \\ V(x) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\gamma_j} \geq -x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad V(x) = 0, \quad x < 0. \end{aligned}$$

Можно проверить, что $\lim_{x \rightarrow 0+} U(x) = U(0+) = e^{-D}$ и $\lim_{x \rightarrow +0} V(x) = V(0) = 1$ (см., [10], где содержится доказательство этого утверждения).

Положим

$$\Theta^{(i)}(r) := \frac{\sum_{y=r}^{\infty} y^2 Q^{(i)}(\{y\})}{(\sum_{y=1}^{\infty} y Q^{(i)}(\{y\}))^2}, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, 2.$$

У с л о в и е А3. Для $\varepsilon_0 > 0$, $r \in \mathbb{N}_0$ и $i = 1, 2$

$$\mathbf{E} \left[(\ln^+ \Theta(r))^{1/\rho+\varepsilon_0} \right] + \mathbf{E} \left[(\ln^+ \Theta(r))^{1/(1-\rho)+\varepsilon_0} \right] < \infty$$

и

$$\mathbf{E} \left[U(-X)(\ln^+ \Theta(r))^{1+\varepsilon_0} \right] + \mathbf{E} \left[V(X)(\ln^+ \gamma^{(i)}(r))^{1+\varepsilon_0} \right] < \infty,$$

где $\ln^+ x := \ln(\max\{x, 1\})$.

Обозначим $\mathbf{L} = \{\mathcal{L}\}$ множество всех (может быть, несобственных) вероятностных законов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi)$ случайных b -мерных векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_b)$ с неотрицательными компонентами, и пусть $\mathbf{L}^+ \subset \mathbf{L}$ — множество вероятностных законов из $\mathbf{L}$, соответствующих случайным векторам сосредоточенным на множестве $(0, \infty)^b$: $\mathbf{P}(\xi_i > 0, i = 1, \dots, b) = 1$. Пусть, далее, $\Phi = \{\Phi\}$ и $\Phi^+ \subset \Phi$ — пространства преобразований Лапласа $\Phi(\bar{\lambda}) = \int e^{-(\bar{\lambda}, \mathbf{x})} \mathcal{L}(d\mathbf{x})$, $\bar{\lambda}, \mathbf{x} \in [0, \infty)^b$, законов распределения из $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^+$, соответственно, оснащенные метрикой d_Λ , $\Lambda > 1$:

$$d_\Lambda(\Phi^*, \Phi^{**}) := \sup_{1 \leq \bar{\lambda} \leq \Lambda} |\Phi^*(\bar{\lambda}) - \Phi^{**}(\bar{\lambda})|, \quad (4)$$

где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\Lambda = (\Lambda, \dots, \Lambda)$ — b -мерные векторы, а неравенства между векторами понимаются покомпонентно. Поскольку преобразование Лапласа закона распределения случайного вектора с неотрицательными компонентами однозначно определяется своими значениями в любом b -мерном кубе, содержащемся в $(0, \infty)^b$, то сходимость $\Phi_n \rightarrow \Phi$, $n \rightarrow \infty$, в метрике d_Λ эквивалентна слабой сходимости распределений $\mathcal{L}_n \xrightarrow{w} \mathcal{L}$, соответствующих преобразованиям Лапласа Φ_n и Φ . По тем же причинам набор $\{d_\Lambda, \Lambda > 1\}$ состоит из эквивалентных метрик. В дальнейшем в случае $b = 1$ вместо векторных обозначений мы будем использовать скалярные.

Всюду далее символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ используются для обозначения математического ожидания и вероятности относительно меры на пространстве сред (за несколькими исключениями, которые, как мы надеемся, не приведут к недоразумениям), а символы $\mathbf{E}_\pi$, $\mathbf{P}_\pi$ — для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $\Pi = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n, \dots)$. Такого же соглашения мы будем придерживаться, рассматривая процессы с одним типом частиц.

На время мы забудем о том, что рассматривается ветвящийся процесс с двумя типами частиц и сформулируем одно утверждение, справедливое для ветвящегося процесса с одним типом частиц.

Пусть Z_n — количество частиц в момент n в ветвящемся процессе с одним типом частиц, эволюционирующем в случайной среде $\pi = (q_1, q_2, \dots)$ и стартующем с одной частицы в момент 0,

$$\begin{aligned} \zeta_n &:= e^{-S_{\tau(n)}} \mathbf{P}_\pi(Z_n > 0), \\ \hat{Y}_k &:= \frac{Z_k}{\mathbf{E}_\pi[Z_k | Z_k > 0]} = \frac{Z_k \mathbf{P}_\pi(Z_k > 0 | Z_0 = 1)}{e^{S_k}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем (случайные) преобразования Лапласа

$$\Phi_n(\lambda) = \Phi_{n,\pi}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda \hat{Y}_n} \mid Z_n > 0 \right] \quad (6)$$

и

$$\tilde{\Phi}_{k,n}(\lambda) = \tilde{\Phi}_{k,n,\pi}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda \hat{Y}_k} \mid Z_n > 0 \right].$$

Пусть $\mathbf{P}$ обозначает меру, задающую случайную среду Π для нашего ветвящегося процесса с одним типом частиц. Эта мера порождает соответствующую меру для условных законов распределения $\mathcal{L}_\pi(\cdot) = \mathcal{L}(\cdot \mid \Pi = \pi) \in \mathbf{L}$, задаваемых на траекториях ветвящегося процесса. Пусть $\{\mathcal{L}_{N,\pi}(\cdot), N \geq 1\}$ — последовательность таких (случайных) вероятностных законов. Будем говорить, что эта последовательность слабо сходится к (случайному) вероятностному закону $\mathcal{L}_\pi(\cdot)$ при $N \rightarrow \infty$ и писать

$$\mathcal{L}_{N,\pi}(\cdot) \Rightarrow \mathcal{L}_\pi(\cdot),$$

если для любой неслучайной ограниченной функции $J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и любой неслучайной непрерывной функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[g \left(\int x \mathcal{L}_{N,\pi}(dx) \right) \right] = \mathbf{E} \left[g \left(\int x \mathcal{L}_\pi(dx) \right) \right]$$

или, в терминах соответствующих преобразований Лапласа (если они определены), что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[g \left(\int e^{-\lambda x} \mathcal{L}_{N,\pi}(dx) \right) \right] = \mathbf{E} \left[g \left(\int e^{-\lambda x} \mathcal{L}_\pi(dx) \right) \right].$$

Следующая теорема является комбинацией результатов, установленных в работах [9] и [10].

Теорема 1. *Если выполнены условия A2 и A3, то*

$$\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta, \quad (7)$$

где ζ — случайная величина, принимающая с вероятностью 1 значения из множества $(0, 1]$. Кроме того,

$$\tilde{\Phi}_{nt,n,\pi}(\lambda) \Rightarrow \Phi(\lambda) I\{\tau_t = \tau_1\} - \Phi'(\lambda) I\{\tau_t < \tau_1\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где случайная функция $\Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} \mathcal{L}(dy)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, является преобразованием Лапласа (случайного) вероятностного закона $\mathcal{L}$, принадлежащего множеству $\mathbf{L}^+$ с вероятностью 1, причем $\Phi(\lambda)$ не зависит от пары (τ_t, τ_1) .

Наша первая цель — доказать аналог этой теоремы для процессов с двумя типами частиц, эволюционирующих в асинхронных случайных средах.

Положим

$$\zeta_n^{(1)} := \frac{\mathbf{P}_\pi(Z_n^{(1)} > 0)}{e^{S_{\tau(n)}(1)}}, \quad \zeta_n^{(2)} := \frac{\mathbf{P}_\pi(Z_n^{(2)} > 0)}{e^{S_{\tau(n)}(2)}} = e^{S_{\mu(n)}(1)} \mathbf{P}_\pi(Z_n^{(2)} > 0),$$

где, при определенной вольности в обозначениях, $S_{\tau(n)}(i)$ и $S_{\mu(n)}(i)$ обозначают минимальное и максимальное значения случайного блуждания $\{S_k(i), 0 \leq k \leq n\}$, $i = 1, 2$.

В дальнейшем будет использоваться следующее соглашение: если мы снабжаем индексом $i \in \{1, 2\}$ функцию или случайную величину, которые ранее были определены без индексов, мы всегда имеем ввиду соответствующую функцию или случайную величину для i -го ветвящегося процесса. Например,

$$Y_{nt}^{(1)} = \frac{Z_{nt}^{(1)}}{\mathbf{E}_\pi Z_{nt}^{(1)}} = Z_{nt}^{(1)} e^{-S_{nt}(1)}, \quad Y_{nt}^{(2)} = \frac{Z_{nt}^{(2)}}{\mathbf{E}_\pi Z_{nt}^{(2)}} = Z_{nt}^{(2)} e^{-S_{nt}(2)} = Z_{nt}^{(2)} e^{S_{nt}(1)}.$$

Теперь мы можем сформулировать наш первый результат.

Теорема 2. Если выполнены условия A1–A3, то при $n \rightarrow \infty$

$$(\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)}) \xrightarrow{d} (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}), \quad (9)$$

где случайные величины $\zeta^{(i)}$ независимы и с вероятностью 1 принимают значения из множества $(0, 1]$. Кроме того, для $t \in (0, 1]$ преобразования Лапласа

$$\tilde{\Phi}_{nt,n}^{(i)}(\lambda_i) := \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda_i \hat{Y}_{nt}^{(i)}} | Z_n^{(i)} > 0 \right], \quad \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2,$$

удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi}_{nt,n}^{(1)}(\lambda_1), \tilde{\Phi}_{nt,n}^{(2)}(\lambda_2)) &\Rightarrow (\Phi^{(1)}(\lambda_1), \Phi^{(2)}(\lambda_2)) I\{\max\{\tau_1, \mu_1\} < t\} \\ &\quad + (\Phi^{(1)}(\lambda_1), -\Phi^{(2)'}(\lambda_2)) I\{\tau_1 < t < \mu_1\} \\ &\quad + (-\Phi^{(1)'}(\lambda_1), \Phi^{(2)}(\lambda_2)) I\{\mu_1 < t < \tau_1\} \\ &\quad - (\Phi^{(1)'}(\lambda_1), \Phi^{(2)'}(\lambda_2)) I\{\min\{\tau_1, \mu_1\} > t\}, \quad (10) \end{aligned}$$

в котором $\Phi^{(i)}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, — (случайные) преобразования Лапласа собственных случайных величин. Более того, случайные величины $\Phi^{(i)}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, независимы друг от друга и от μ_1 , τ_1 и τ_2 .

З а м е ч а н и е 1. При $t = 1$ последний член в правой части (10) равен нулю.

З а м е ч а н и е 2. В силу (9) второе утверждение теоремы означает, нестрого говоря, что если оба типа не выродились до момента n , то число индивидуумов типа i в момент nt пропорционально величине $\exp\{S_{nt}(i) - S_{\tau(nt)}(i)\}$.

Для $s, t \in [0, 1]$ положим

$$\begin{aligned}\varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(s) &:= \mathbf{E}_{\pi}\left[s^{Z_{\tau(nt)}^{(1)}} \mid Z^{(1)}(n) > 0\right], \\ \tilde{\Phi}_{\tau(nt),n}^{(2)}(\lambda) &:= \mathbf{E}_{\pi}\left[e^{-\lambda \hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)}} \mid Z_n^{(2)} > 0\right].\end{aligned}\quad (11)$$

Теперь мы сформулируем утверждение, описывающее распределение числа частиц в обоих процессах в случайные моменты $\tau(nt)$, $0 < t \leq 1$, при условии, что $\{Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0\}$.

Теорема 3. Если выполнены условия A1–A3, то для любого $t \in (0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}(\varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(s), \tilde{\Phi}_{\tau(nt),n}^{(2)}(\lambda)) &\Rightarrow (\varphi^{(1)}(s), \Phi^{(2)}(\lambda))I\{\mu_1 < \tau_t = \tau_1\} \\ &+ (\varphi^{(1)}(s), -\Phi^{(2)'}(\lambda))I\{\mu_1 > \tau_t = \tau_1\} \\ &+ (\varphi^*(s), \Phi(\lambda))I\{\mu_1 < \tau_t < \tau_1\} \\ &+ (\varphi^*(s), -\Phi^{(2)'}(\lambda))I\{\tau_t < \min\{\tau_1, \mu_1\}\},\end{aligned}\quad (12)$$

где $\varphi^{(1)}(s)$, $\varphi^*(s)$ — (случайные) производящие функции собственных распределений с носителями во множестве $\{1, 2, \dots\}$, а $\Phi^{(2)}(\lambda)$ имеет такое же распределение, как и в теореме 2. Кроме того, $\varphi^{(1)}(s)$, $\varphi^*(s)$ и $\Phi^{(2)}(\lambda)$ взаимно независимы и независимы от μ_1 , τ_t , τ_1 .

З а м е ч а н и е 3. При $t = 1$ только первые два слагаемых в правой части (12) отличны от нуля.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 3 допускает следующую нестрогую трактовку. Если оба типа не вымерли к моменту $n \rightarrow \infty$, то в моменты $\tau(nt)$ количество частиц первого типа в процессе мало (предельное распределение случайной величины $Z_{\tau(nt)}^{(1)}$ дискретно), в то время как размер популяции частиц второго типа весьма велик (пропорционален $\exp\{S_{\mu(\tau(nt))} - S_{\tau(nt)}\}$, где величина $S_{\mu(\tau(nt))} - S_{\tau(nt)}$ имеет порядок $\sqrt{n}$, если $\mathbf{E} X_1(1) < \infty$). Само собой разумеется, что сходная картина имеет место в моменты $\mu(nt)$, когда размер популяции частиц первого типа имеет порядок $\exp\{S_{\mu(nt)} - S_{\tau(\mu(nt))}\}$, в то время как частиц второго типа мало. С некой долей вольности это явление можно трактовать как осцилляцию размеров популяций хищников и жертв в моделях типа хищник–жертва. А именно, если в каком-либо поколении среднее число потомков

у хищников велико ($X_k(1) \gg 1$), то среднее число потомков жертв, достигших репродуктивного возраста, мало ($X_k(2) = -X_k(1) \ll -1$).

Можно поставить задачу доказательства многомерных версий упомянутых ранее теорем. К сожалению, даже формулировка такого рода обобщений занимает много места. В связи с этим мы ограничимся теоремой, описывающей совместное распределение числа частиц обоих типов в моменты $0 < nt_1 < \dots < nt_d = n$, $d \geq 2$. Читатель может найти соответствующее утверждение и его доказательство в разд. 3.

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим сначала ветвящиеся процессы в случайной среде с одним типом частиц.

Можно проверить (см., например, лемму 1 работы [10]), что для любого осциллирующего случайного блуждания

$$\mathbf{E}[U(x - X); X - x < 0] = U(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (13)$$

$$\mathbf{E}[V(x + X); X + x \geq 0] = V(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (14)$$

При помощи функций восстановления U и V мы построим две вероятностные меры $\mathbf{P}^+$ and $\mathbf{P}^-$, используя следующую процедуру.

Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, где сигма-алгебра $\mathcal{F}_n = \sigma(Q_1, \dots, Q_n, Z_0, \dots, Z_n)$. Таким образом, случайное блуждание $\{S_k, k \geq 0\}$ согласовано с фильтрацией $\mathcal{F}$, причем X_{n+1} (так же, как и Q_{n+1}) не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_n$ при всех $n \geq 0$. Далее мы строим вероятностные меры $\mathbf{P}_x^-$, $x \leq 0$, и $\mathbf{P}_y^+$, $y \geq 0$, которые для каждого n и каждой ограниченной и $\mathcal{F}_n$ -измеримой случайной величины R_n задаются равенствами

$$\mathbf{E}_x^-[R_n] := \frac{1}{U(-x)} \mathbf{E}_x[R_n U(-S_n); M_n < 0]$$

и

$$\mathbf{E}_y^+[R_n] := \frac{1}{V(y)} \mathbf{E}_y[R_n V(S_n); L_n \geq 0].$$

Используя (13)–(14), нетрудно проверить (см. [10], где этот вопрос детально обсуждается), что меры, заданные таким образом, согласованы по n .

С мерами $\mathbf{P}_x^-$, $x \leq 0$, и $\mathbf{P}_y^+$, $y \geq 0$, мы свяжем еще одну меру $\hat{\mathbf{P}}_{x,y}$. Пусть $\{Q_k^+, k \geq 0\}$ и $\{Q_k^-, k \geq 0\}$ — две независимых последовательности случайных сред, построенных при помощи исходной меры $\mathbf{P}$, и пусть $\{Z_k^-, k \geq 0\}$ и $\{Z_k^+, k \geq 0\}$ — соответствующие ветвящиеся процессы, а $\{S_k^-, k \geq 0\}$ и $\{S_k^+, k \geq 0\}$ — ассоциированные с этими процессами случайные блуждания.

Рассмотрим теперь фильтрацию $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_{r,n}, r, n \geq 0)$, где $\widehat{\mathcal{F}}_{r,n} = \mathcal{F}_r^- \times \mathcal{F}_n^+$ с $\mathcal{F}_r^- = \sigma(Q_1^-, \dots, Q_r^-, Z_0^-, \dots, Z_r^-)$ и $\mathcal{F}_n^+ =$

$\sigma(Q_1^+, \dots, Q_n^+, Z_0^+, \dots, Z_n^+)$. Для каждой ограниченной и $\widehat{\mathcal{F}}_{r,n}$ -измеримой случайной величины $R_{r,n}$ и $x \leq 0$, $y \geq 0$ положим

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_{x,y}[R_{r,n}] &= (\mathbf{E}_x^- \times \mathbf{E}_y^+)[R_{r,n}] \\ &:= \frac{1}{U(-x)V(y)} (\mathbf{E}_x \times \mathbf{E}_y)[R_{r,n}U(-S_r^-)V(S_n^+); M_r^- < 0, L_n^+ \geq 0].\end{aligned}$$

Лемма 1 (см. [10]). Пусть выполнено условие A2, и пусть $\{W_{r,n}, r, n \geq 0\}$ — схема серий равномерно ограниченных случайных величин, согласованных с фильтрацией $\widehat{\mathcal{F}}$. Тогда для любых фиксированных k, l

$$\lim_{\min(r,n) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[W_{k,l} | M_r^- < 0, L_n^+ \geq 0] = \widehat{\mathbf{E}}[W_{k,l}].$$

Если $W_{r,n} \rightarrow W_\infty$ при $\min(r,n) \rightarrow \infty$ $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. для некоторой случайной величины W_∞ , то

$$\lim_{\min(r,n) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[W_{r,n} | M_r^- < 0, L_n^+ \geq 0] = \widehat{\mathbf{E}}[W_\infty].$$

Следствие 1. Пусть выполнено условие A2, и пусть $\{W_{r,n}, r, n \geq 0\}$ — схема серий ограниченных случайных величин, согласованных с фильтрацией $\widehat{\mathcal{F}}$. Если $W_{r,n} \rightarrow W_\infty$ при $\min(r,n) \rightarrow \infty$ $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. для собственной случайной величины W_∞ , то при $\min(r,n) \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(W_{r,n} | M_r^- < 0, L_n^+ \geq 0) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(W_\infty).$$

Доказательство. В силу леммы 1 для любого $t \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{\min(r,n) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^{itW_{r,n}} | M_r^- < 0, L_n^+ \geq 0] = \widehat{\mathbf{E}}[e^{itW_\infty}],$$

что и завершает доказательство.

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в лемме 2 работы [10].

Лемма 2. Если выполнено условие A2, то для любого $x \in \mathbb{R}_+$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(L_n \geq -x) \sim \frac{V(x)}{n^{1-\rho}l_1(n)}, \quad \mathbf{P}(M_n < x) \sim \frac{U(x)}{n^\rho l_2(n)}, \quad (15)$$

где $l_1(n), l_2(n)$ — функции медленно меняющиеся на бесконечности такие, что

$$l_1(n)l_2(n) \sim \pi / \sin \pi \rho, \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, найдется константа $C > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{P}(L_n \geq -x) \leq C \frac{V(x)}{n^{1-\rho}l_1(n)}, \quad \mathbf{P}(M_n < x) \leq C \frac{U(x)}{n^\rho l_2(n)}. \quad (16)$$

Теперь мы установим несколько вспомогательных результатов.
Положим

$$\begin{aligned} f_{j,n}(s) &:= f_{j+1}(f_{j+2}(\dots(f_n(s))\dots)), & 0 \leq j \leq n-1, \\ f_{n,n}(s) &:= s, \\ f_{n,j}(s) &:= f_n(f_{n-1}(\dots(f_{j+1}(s))\dots)), & n \geq j \geq 1. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta_n(m, k; s, s_1) := \frac{f_{0,m}(sf_{m,n}(s_1)) - f_{0,m}(sf_{m,m+k}(s_1))}{e^{S_m}}.$$

Лемма 3. Для любых фиксированных $0 \leq s, s_1 \leq 1$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\Delta_n(m, k; s, s_1)| > \varepsilon | \tau(n) = m) = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$|\Delta_n(m, k; s, s_1)| \leq |f_{m,n}(s_1) - f_{m,m+k}(s_1)|.$$

Следовательно, при $n \geq m + k$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\Delta_n(m, k; s, s_1)| > \varepsilon | \tau(n) = m) \\ \leq \varepsilon^{-1} \mathbf{E} [|f_{m,n}(s_1) - f_{m,m+k}(s_1)| | \tau(n) = m] \\ = \varepsilon^{-1} \mathbf{E} [|f_{m,n}(s_1) - f_{m,m+k}(s_1)| | L_{n-m} \geq 0]. \end{aligned}$$

Согласно теореме 5 из [2] для любого $s_1 \in [0, 1]$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{0,n}(s_1) := f_{0,\infty}(s_1).$$

Отсюда, устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем при помощи леммы 1, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\Delta_n(m, k; s, s_1)| > \varepsilon | \tau(n) = m) \leq \varepsilon^{-1} \mathbf{E}^+ [|f_{0,\infty}(s_1) - f_{0,k}(s_1)|].$$

Устремляя теперь k к бесконечности и используя теорему о мажорируемой сходимости, приходим к желаемому утверждению.

Следующее утверждение показывает, что аналог предыдущей леммы справедлив и при подходящей скорости стремления $s = s(n)$ к единице.

Лемма 4. Для любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{f_{0,n}(\exp\{-\lambda e^{S_m - S_n}\}) - f_{0,m+k}(\exp\{-\lambda e^{S_m - S_k}\})}{e^{S_m}} \right| \right. \\ \left. > \varepsilon | \tau(n) = m \right) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Так же, как и в предыдущей лемме, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left| \frac{f_{0,n}(\exp\{-\lambda e^{S_m-S_n}\}) - f_{0,m+k}(\exp\{-\lambda e^{S_m-S_k}\})}{e^{S_m}} \right| > \varepsilon \mid \tau(n) = m \right) \\ & \leq \varepsilon^{-1} \mathbf{E} \left[\left| f_{0,n-m}(\exp\{-\lambda e^{-S_{n-m}}\}) - f_{0,k}(\exp\{-\lambda e^{-S_k}\}) \right| \mid L_{n-m} \geq 0 \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Поскольку

$$f_{0,r}(\exp\{-\lambda e^{-S_r}\}) = \mathbf{E}_\pi[\exp\{-\lambda Z_r e^{-S_r}\}]$$

и $\{Z_r e^{-S_r}, r \geq 0\}$ является неотрицательным мартингалом, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ предел

$$F_\pi(\lambda) := \lim_{r \rightarrow \infty} f_{0,r}(\exp\{-\lambda e^{-S_r}\})$$

существует $\mathbf{P}^+$ -п.н. (и, следовательно, $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.). Отсюда, устремляя n к бесконечности, заключаем при помощи леммы 1, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\left| f_{0,n-m}(\exp\{-\lambda e^{-S_{n-m}}\}) - f_{0,k}(\exp\{-\lambda e^{-S_k}\}) \right| \mid L_{n-m} \geq 0 \right] \\ & = \mathbf{E}^+ \left[\left| F_\pi(\lambda) - f_{0,k}(\exp\{-\lambda e^{-S_k}\}) \right| \right]. \end{aligned}$$

Из этого равенства и (17), устремляя k к бесконечности, получаем утверждение леммы.

Обозначим

$$\Delta(m, k; s, s_1) := \frac{1 - f_{m-k,m}(sf_{m,m+k}(s_1))}{e^{S_m - S_{m-k}}} - \frac{1 - f_{0,m}(sf_{m,m+k}(s_1))}{e^{S_m}}.$$

Лемма 5. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{\min(m, n-m) \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s, s_1 \leq 1} |\Delta(m, k; s, s_1)| > \varepsilon \mid \tau(n) = m \right) = 0. \quad (18)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |\Delta(m, k; s, s_1)| &= \frac{1 - f_{m-k,m}(sf_{m,m+k}(s_1))}{e^{S_m - S_{m-k}}} - \frac{1 - f_{0,m}(sf_{m,m+k}(s_1))}{e^{S_m}} \\ &\quad \times \left| \frac{e^{S_m}}{1 - f_{0,m}(sf_{m,m+k}(s_1))} - \frac{e^{S_m - S_{m-k}}}{1 - f_{m-k,m}(sf_{m,m+k}(s_1))} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{S_m}}{1 - f_{0,m}(sf_{m,m+k}(s_1))} - \frac{e^{S_m - S_{m-k}}}{1 - f_{m-k,m}(sf_{m,m+k}(s_1))} \right|. \end{aligned}$$

Положим

$$\chi_j(s) := \frac{1}{1 - f_j(s)} - \frac{1}{f'_j(1)(1 - s)}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Известно (см., [6]), что для $0 \leq l \leq q-1$

$$\frac{1}{1 - f_{l,q}(s)} = \frac{e^{-S_q + S_l}}{1 - s} + \sum_{j=l}^{q-1} \eta_{j,q}(s) e^{-S_j + S_l},$$

где

$$\eta_{j,n}(s) := \chi_{j+1}(f_{j+1,n}(s)) \leq \eta_{j+1} := \frac{f''_{j+1}(1)}{(f'_{j+1}(1))^2}.$$

Используя это представление, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{S_m}}{1 - f_{0,m}(s f_{m,m+k}(s_1))} - \frac{e^{S_m - S_{m-k}}}{1 - f_{m-k,m}(s f_{m,m+k}(s_1))} \right| \\ &= \sum_{j=0}^{m-k-1} \eta_{j,m}(s f_{m,m+k}(s_1)) e^{S_m - S_j} \leq \sum_{j=0}^{m-k-1} \eta_{j+1} e^{S_m - S_j}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу свойства дуальности для случайных блужданий, заключаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s, s_1 \leq 1} |\Delta(m, k; s, s_1)| > \varepsilon \mid \tau(n) = m \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sum_{j=0}^{m-k-1} \eta_j e^{S_m - S_j} > \varepsilon \mid \tau(n) = m \right) = \mathbf{P} \left(\sum_{j=k}^m \eta_j e^{S_j} > \varepsilon \mid M_m < 0 \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e^{S_j} < \infty \quad \mathbf{P}^- \text{-п.н.} \quad (19)$$

согласно лемме 6 работы [10], то соотношение (18) следует из леммы 1.

Следствие 2. Для любых фиксированных $0 \leq s, s_1 \leq 1$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)}(s f_{\tau(n), \tau(n)+k}(s_1))}{e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(n)-k}}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1 - f_{0, \tau(n)}(s f_{\tau(n), n}(s_1))}{e^{S_{\tau(n)}}} \right| > \varepsilon \right) = 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{e^{S_{\tau(n)-k}} (1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)+k}(0))}{1 - f_{0, n}(0)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0. \quad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства справедливости первого утверждения достаточно воспользоваться формулой полной вероятности, леммами 3, 5 и обобщенным законом арксинуса для $\tau(n)$. Второе утверждение является следствием первого утверждения при $s = 1, s_1 = 0$ и соотношения (7).

Следствие 3. Для любых $s \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)}(s)}{e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(n)-k}}} - \frac{1 - f_{0, \tau(n)}(s)}{e^{S_{\tau(n)}}} \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{e^{S_{\tau(n)-k}} (1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)}(s))}{1 - f_{0, \tau(n)}(s)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно использовать оценку

$$\left| \frac{e^{S_m}}{1 - f_{0, m}(s)} - \frac{e^{S_m - S_{m-k}}}{1 - f_{m-k, m}(s)} \right| \leq \sum_{j=0}^{m-k-1} \eta_{j+1} e^{S_m - S_j},$$

равенство

$$\mathcal{L} \left(\sum_{j=0}^{m-k-1} \eta_{j+1} e^{S_m - S_j} \mid \tau(m) = m \right) = \mathcal{L} \left(\sum_{j=k}^{m-1} \eta_j e^{S_j} \mid M_m < 0 \right),$$

сходимость (19), лемму 1 и обобщенный закон арксинуса. Второе утверждение леммы является следствием первого утверждения, равенства

$$\mathcal{L} \left(\frac{e^{S_{\tau(n)} - S_{\tau(n)-k}}}{1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)}(s)} \mid \tau(n) = m \right) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{1-s} + \sum_{j=0}^{k-1} \eta_{j, m}(s) e^{S_j} \mid M_m < 0 \right),$$

обобщенного закона арксинуса, оценки (19) и леммы 1.

В дальнейшем мы будем понимать выражения вида nt, nt_1 и так далее, как $[nt], [nt_1]$, где $[x]$ — целая часть числа x .

Пусть L^+ и L^- — неотрицательный и отрицательный меандры строго устойчивого процесса Леви с параметром α .

Лемма 6. Пусть выполнено условие A2. Тогда для последовательности c_n , заданной соотношением (1), и для любого $x \in \mathbb{R}_+$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\left(\frac{S_{nt}}{c_n} \right)_{0 \leq t \leq 1} \mid L_n \geq -x \right) &\Longrightarrow \mathcal{L}(L^+), \\ \mathcal{L} \left(\left(\frac{S_{nt}}{c_n} \right)_{0 \leq t \leq 1} \mid M_n < x \right) &\Longrightarrow \mathcal{L}(L^-), \end{aligned}$$

где символ $\Longrightarrow$ обозначает сходимость в пространстве $D[0, 1]$ функций без разрывов второго рода, оснащенном метрикой Скорохода.

Доказательство. Первое утверждение — это лемма 2.3 в [1]. Доказательство второго утверждения может быть получено почти дословным повторением доказательства упомянутой леммы с естественными изменениями.

Положим $\bar{\mu}(n) := \min\{0 \leq i \leq n: S_i = \max(0, M_n)\}$.

Лемма 7. Если выполнено условие A2 с $\alpha\rho < 1$, то найдется константа $C_\alpha > 0$ такая, что для всех $n \geq 1$ и всех $N \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n \geq Nc_n, L_n \geq 0, \bar{\mu}(n) = n) &\leq C_\alpha \mathbf{P}(S_n \geq Nc_n) \mathbf{P}^2(L_n \geq 0) \\ &\leq C_\alpha^2 n \mathbf{P}(X \geq Nc_n) \mathbf{P}^2(L_n \geq 0). \end{aligned}$$

Доказательство. Для $0 \leq k \leq n - [n/2]$ положим $S'_k := S_{k+[n/2]} - S_{[n/2]}$. Введем события

$$\mathcal{B}_{\min}(n) := \left\{ \min_{0 \leq i \leq [n/2]} S_i \geq 0, S_{[n/2]} + \min_{0 \leq k \leq n-[n/2]} S'_k \geq 0 \right\}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\max}(n) := &\left\{ \max_{0 \leq i \leq [n/2]} S_i < S_{[n/2]} + S'_{n-[n/2]}, S_{[n/2]} \right. \\ &\left. + \max_{0 \leq k \leq n-[n/2]-1} S'_k < S_{[n/2]} + S'_{n-[n/2]} \right\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(S_n \geq Nc_n, L_n \geq 0, \bar{\mu}(n) = n) \\ &= \mathbf{P}(S_{[n/2]} + S'_{n-[n/2]} \geq Nc_n, \mathcal{B}_{\min}(n), \mathcal{B}_{\max}(n)) \\ &\leq \mathbf{P}(S_{[n/2]} \geq 2^{-1}Nc_n, \mathcal{B}_{\min}(n), \mathcal{B}_{\max}(n)) \\ &\quad + \mathbf{P}(S'_{n-[n/2]} \geq 2^{-1}Nc_n, \mathcal{B}_{\min}(n), \mathcal{B}_{\max}(n)) \\ &\leq \mathbf{P}(S_{[n/2]} \geq 2^{-1}Nc_n, L_{[n/2]} \geq 0, \max_{0 \leq k \leq n-[n/2]} S'_k \leq S'_{n-[n/2]}) \\ &\quad + \mathbf{P}(S'_{n-[n/2]} \geq 2^{-1}Nc_n, L_{[n/2]} \geq 0, \max_{0 \leq k \leq n-[n/2]} S'_k \leq S'_{n-[n/2]}) \\ &= \mathbf{P}(S_{[n/2]} \geq 2^{-1}Nc_n, L_{[n/2]} \geq 0) \mathbf{P}(L_{n-[n/2]} \geq 0) \\ &\quad + \mathbf{P}(S_{n-[n/2]} \geq 2^{-1}Nc_n, L_{n-[n/2]} \geq 0) \mathbf{P}(L_{[n/2]} \geq 0). \end{aligned} \quad (22)$$

В силу теоремы 1 из [4] с $\alpha\rho < 1$, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $n(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ такие, что для всех $n \geq n(\varepsilon)$ и всех $N \geq N(\varepsilon)$

$$\rho \mathbf{P}(S_n > Nc_n \mid L_n \geq 0) \leq (1+\varepsilon) \mathbf{P}(S_n > Nc_n) \leq (1+2\varepsilon) n \mathbf{P}(X > Nc_n). \quad (23)$$

(В действительности указанная теорема доказана в [4] при условии $\{L_n > 0\}$. Однако анализ доказательства упомянутой теоремы показывает, что это условие можно заменить условием $\{L_n \geq 0\}$.)

Теперь необходимое утверждение следует из (23), (22), (3) и свойств правильно меняющихся функций при помощи простых оценок и преобразований.

Обозначим B_t , $0 \leq t \leq 1$ — стандартное броуновское движение, и пусть

$$l := \inf_{0 \leq t \leq 1} B_t, \quad m := \max_{0 \leq t \leq 1} B_t, \quad H_l = \inf_{0 \leq t \leq 1} \{B_t = l\}, \quad H_m := \sup_{0 \leq t \leq 1} \{B_t = m\}.$$

Лемма 8. Совместное распределение случайных величин (l, H_l, m, H_m) имеет абсолютно непрерывную плотность.

Доказательство. Смотрите формулу 1.28.4 монографии [3].

Лемма 9. Если выполнено условие A2, то для любого $t \in (0, 1]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\tau(nt) - \mu(n)| \leq n\varepsilon) = 0.$$

Доказательство. Если $\mathbf{E}X^2 < \infty$, то необходимое утверждение легко следует из принципа инвариантности для случайных блужданий и леммы 8.

Поэтому мы будем предполагать, что $\alpha\rho < 1$, и рассмотрим лишь случай $t = 1$. Случай $0 < t < 1$ может быть проанализирован аналогичным образом.

Обозначим $L(t)$, $0 \leq t \leq 1$, строго устойчивый процесс Леви с параметром α . Из принципа инвариантности для процессов Леви вытекает, что для любого $\delta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{\mu(n)} - S_{\tau(n)} \leq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n) \\ & \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{\mu(n)} \leq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n) \\ & = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq u \leq 1} L(t) \leq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha}\right) = 0. \end{aligned}$$

Введем событие

$$\mathcal{A}(n, \varepsilon) := \left\{ \sup_{-n\varepsilon \leq j \leq n\varepsilon} (S_{\tau(n)+j} - S_{\tau(n)}) \geq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n \right\}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(|\tau(n) - \mu(n)| \leq n\varepsilon, S_{\mu(n)} - S_{\tau(n)} \geq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n\right) \\ & = \mathbf{P}(|\tau(n) - \mu(n)| \leq n\varepsilon, \mathcal{A}(n, \varepsilon)) = R_1(n, \varepsilon) + R_2(n, \varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$R_1(n, \varepsilon) := \mathbf{P}\left(|\tau(n) - \mu(n)| \leq n\varepsilon, \mathcal{A}(n, \varepsilon), \tau(n) \notin [2n\varepsilon, n(1 - 2\varepsilon)]\right)$$

и

$$R_2(n, \varepsilon) := \mathbf{P}\left(|\tau(n) - \mu(n)| \leq n\varepsilon, \mathcal{A}(n, \varepsilon), \tau(n) \in [2n\varepsilon, n(1 - 2\varepsilon)]\right).$$

В силу обобщенного закона арксинуса

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} R_1(n, \varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau(n) \notin [2n\varepsilon, n(1-2\varepsilon)]) = 0. \quad (24)$$

Далее запишем

$$R_2(n, \varepsilon) = R_{2-}(n, \varepsilon) + R_{2+}(n, \varepsilon),$$

где знак « $-$ » означает, что мы рассматриваем такие траектории случайного блуждания, в которых $\tau(n) < \bar{\mu}(n)$, а знак « $+$ » означает, что мы рассматриваем траектории случайного блуждания, на которых указанные моменты расположены в обратном порядке.

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} R_{2-}(n, \varepsilon) = 0. \quad (25)$$

С этой целью для фиксированных k и $i > 1$ рассмотрим событие $\{\tau(n) = k, \bar{\mu}(n) = k + i\}$ и введем три случайных блуждания

$$\begin{aligned} S'_j &:= S_k - S_{k-j}, 0 \leq j \leq k; & S''_j &:= S_{k+j} - S_k, 0 \leq j \leq i; \\ S'''_j &:= S_{k+i+j} - S_{k+i}, 0 \leq j \leq n - k - i. \end{aligned}$$

Используя формулу полной вероятности и свойство дуальности случайных блужданий, имеем при $k \in [2n\varepsilon, n(1-2\varepsilon)]$ и $0 \leq i \leq n\varepsilon$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\tau(n) = k, \bar{\mu}(n) = k + i, \mathcal{A}(n, \varepsilon)) \\ &= \int \int_{y-x \geq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n} \mathbf{P}(\tau(n) = k, S_k \in dx, \bar{\mu}(n) = k + i, S_{k+i} \in dy) \\ &= \int \int_{y-x \geq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n} \mathbf{P}(S'_k \in dx, L'_k > x - y, M'_k < 0) \\ &\quad \times \mathbf{P}(S''_i \in d(y-x), L''_i \geq 0, \bar{\mu}''(i) = i) \\ &\quad \times \mathbf{P}(M'''_{n-(k+i)} < 0, L'''_{n-(k+i)} \geq x - y) \\ &\leq \mathbf{P}(M'''_{n-(k+i)} < 0) \int \int_{y-x \geq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n} \mathbf{P}(S'_k \in dx, M'_k < 0) \\ &\quad \times \mathbf{P}(S''_i \in d(y-x), L''_i \geq 0, \bar{\mu}''(i) = i) \\ &= \mathbf{P}(M_{n-(k+i)} < 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \int_{z \geq \varepsilon^{1/2\alpha} c_n} \mathbf{P}(S_i \in dz, L_i \geq 0, \bar{\mu}(i) = i) \\ &= \mathbf{P}(M_{n-(k+i)} < 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \mathbf{P}(S_i \geq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n, L_i \geq 0, \bar{\mu}(i) = i). \end{aligned}$$

Это соотношение, асимптотические представления (2), (3), свойства правильно меняющихся функций и лемма 7 приводят к оценкам

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(M_{n-(k+i)} \leq 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \mathbf{P}(S_i \geq \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n, L_i \geq 0, \bar{\mu}(i) = i) \\ &\leq C \mathbf{P}(M_{n-(k+i)} \leq 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \mathbf{P}^2(L_i \geq 0) i \mathbf{P}(X > \varepsilon^{(1-\delta)/\alpha} c_n) \\ &\leq C_1 \mathbf{P}(M_{n-(k+i)} \leq 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \mathbf{P}^2(L_i \geq 0) i (n\varepsilon^{1-\delta})^{-1} \\ &\leq C_2 \mathbf{P}(M_{n-k} \leq 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \mathbf{P}^2(L_i \geq 0) i (n\varepsilon^{1-\delta})^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (16) и свойств правильно меняющихся функций, заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
R_{2-}(n, \varepsilon) &= \sum_{k=2n\varepsilon}^{n(1-2\varepsilon)} \sum_{i=1}^{n\varepsilon} \mathbf{P}(\tau(n) = k, \bar{\mu}(n) = k + i, \mathcal{A}(n, \varepsilon)) \\
&\leq \frac{C_2}{n\varepsilon^{1-\delta}} \sum_{k=2n\varepsilon}^{n(1-2\varepsilon)} \mathbf{P}(M_{n-k} \leq 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \sum_{i=1}^{n\varepsilon} i \mathbf{P}^2(L_i \geq 0) \\
&\leq C_3 \frac{n^{2\rho} \varepsilon^{2\rho}}{n\varepsilon^{1-\delta} l_1^2(n\varepsilon)} \sum_{k=2n\varepsilon}^{n(1-2\varepsilon)} \mathbf{P}(M_{n-k} \leq 0) \mathbf{P}(M_k < 0) \\
&\leq C_3 \frac{n^{2\rho} \varepsilon^{2\rho}}{n\varepsilon^{1-\delta} l_1^2(n\varepsilon)} \mathbf{P}(M_{2n\varepsilon} \leq 0) \sum_{k=2n\varepsilon}^{n(1-2\varepsilon)} \mathbf{P}(M_k < 0) \\
&\leq C_4 \frac{n^{2\rho} \varepsilon^{2\rho}}{n\varepsilon^{1-\delta} l_1^2(n\varepsilon)} \frac{1}{(2n\varepsilon)^\rho l_2(2n\varepsilon)} \frac{n^{1-\rho}}{l_2(n)} \\
&= \frac{C_4}{2^\rho} \frac{\varepsilon^{\rho-1+\delta}}{l_1^2(n\varepsilon) l_2(2n\varepsilon) l_2(n)} \sim C_5 \left(\frac{\sin \pi \rho}{\pi} \right)^2 \varepsilon^{\rho-1+\delta}.
\end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $0 \leq \bar{\mu}(n) - \tau(n) \leq \mu(n) - \tau(n)$, это доказывает равенство (25), если выбрать $\delta \in (1-\rho, 1)$, а затем устремить ε к нулю.

Аналогичным образом можно оценить величину $R_{2+}(n, \varepsilon)$.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь четыре независимых случайных блуждания $\{S_n^{(i)}, n \geq 0\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, с одним и тем же распределением приращений. Зафиксируем вектор $\mathbf{t} := (t_1, t_2, t_3, t_4)$ с положительными компонентами и вектор $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ с неотрицательными компонентами и введем события

$$\mathcal{C}_{n,1}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) := \left\{ M_{nt_1}^{(1)} < x_1, L_{nt_2}^{(2)} \geq -x_2, L_{nt_3}^{(3)} \geq -x_3, M_{nt_4}^{(4)} < x_4 \right\}$$

и

$$\mathcal{C}_{n,2}(\mathbf{t}) := \left\{ \max \left\{ -L_{nt_1}^{(1)}, M_{nt_2}^{(2)}, M_{nt_3}^{(3)}, -L_{nt_4}^{(4)} \right\} \leq S_{nt_2}^{(2)} + S_{nt_3}^{(3)} \right\}.$$

Пусть, далее, $L_i^-, L_i^+, i = 1, 2, 3, 4$, — независимые отрицательные и неотрицательные меандры строго устойчивых процессов Леви с параметром α , а

$$\mathfrak{l}_i := \min_{0 \leq u \leq 1} L_i^-(u), \quad \mathfrak{m}_i := \max_{0 \leq u \leq 1} L_i^+(u).$$

Лемма 6 влечет следующее утверждение.

Следствие 4. Если приращения случайных блужданий $\{S_n^{(i)}, n \geq 0\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют условию A2, то для любого вектора $\mathbf{t}$

с положительными компонентами и вектора $\mathbf{x}$ с неотрицательными компонентами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{C}_{n,2}(\mathbf{t}) \mid \mathcal{C}_{n,1}(\mathbf{t}, \mathbf{x})) = \mathbf{P}(\mathcal{C}_2(\mathbf{t})),$$

где

$$\mathcal{C}_2(\mathbf{t}) := \left\{ \max\{-t_1^{1/\alpha} \mathfrak{l}_1, t_2^{1/\alpha} \mathfrak{m}_2, t_3^{1/\alpha} \mathfrak{m}_3, -t_4^{1/\alpha} \mathfrak{l}_4\} \leq t_2^{1/\alpha} L_2^+(1) + t_3^{1/\alpha} L_3^+(1) \right\}.$$

Для того, чтобы идти дальше, введем для $0 \leq k < l$ наборы отрезков случайной среды

$$\mathbf{Q}_+(l, k) := (Q_{l+1}, \dots, Q_{l+k}), \quad \mathbf{Q}_-(l, k) := (Q_l, \dots, Q_{l-k})$$

и обозначим $\mathbf{Q}_\pm^{(i)}(l, k)$, $i = 1, 2$, — независимые копии $\mathbf{Q}_\pm(l, k)$.

Следующая лемма играет существенную роль в дальнейших рассуждениях.

Лемма 10. Если выполнены условия A2, то для фиксированного $k \geq 1$ распределение набора

$$(\mathbf{Q}_-^{(1)}(\tau(n), k), \mathbf{Q}_+^{(1)}(\tau(n), k), \mathbf{Q}_-^{(2)}(\mu(n), k), \mathbf{Q}_+^{(2)}(\mu(n), k))$$

слабо сходится к распределению $\mathcal{M}_k^{(1)} \otimes \mathcal{N}_k^{(1)} \otimes \mathcal{N}_k^{(2)} \otimes \mathcal{M}_k^{(2)}$, где $\mathcal{M}_k^{(i)}$ — распределение вектора $\mathbf{Q}^{(i)}(k) := (Q_1^{(i)}, \dots, Q_k^{(i)})$ относительно вероятностной меры $\mathbf{P}^-$, а $\mathcal{N}_k^{(i)}$ — распределение вектора $\mathbf{Q}^{(i)}(k)$ относительно вероятностной меры $\mathbf{P}^+$.

Доказательство. В силу леммы 9 мы можем считать, что $|\tau(n) - \mu(n)| \geq 2\varepsilon n$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, а по обобщенному закону арксинуса, что $\tau(n), \mu(n) \in [4n\varepsilon, n(1 - 4\varepsilon)]$ для достаточно малых значений $\varepsilon > 0$. Дополнительные события имеют пренебрежимо малую вероятность, если сначала n устремить к бесконечности, а затем ε — к нулю.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \mathcal{A}_1(\varepsilon, n) := \{(m, l): 4n\varepsilon \leq m + 2\varepsilon n \leq l \leq n(1 - 4\varepsilon)\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_2(\varepsilon, n) := \{(m, l): 4n\varepsilon \leq l + 2\varepsilon n \leq m \leq n(1 - 4\varepsilon)\} \end{aligned}$$

и положим $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varepsilon, n) := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

В дальнейшем мы рассматриваем ситуацию $(m, l) \in \mathcal{A}_1$. Случай $(m, l) \in \mathcal{A}_2$ может быть исследован аналогичным способом путем перехода к отраженному случайному блужданию $\{-S_k, k \geq 0\}$.

Предполагая, что $(\tau(n), \mu(n)) = (m, l) \in \mathcal{A}_1$, мы свяжем с первоначальным сопровождающим случайным блужданием $\{S_j, 0 \leq j \leq n\}$

следующие четыре случайных блуждания:

$$\begin{aligned} S'_j &:= S_m - S_{m-j}, & 0 \leq j \leq m, \\ S''_j &:= S_{m+j} - S_m, & 0 \leq j \leq \frac{l-m}{2}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} S'''_j &:= S_l - S_{l-j}, & 0 \leq j \leq \frac{l-m}{2}, \\ S''''_j &:= S_{l+j} - S_l, & 0 \leq j \leq n-l. \end{aligned} \quad (27)$$

Введем события

$$\mathcal{D}_1 := \left\{ M'_m < 0, L''_{(l-m)/2} \geq 0, L'''_{(l-m)/2} \geq 0, M''''_{n-l} < 0 \right\}$$

и

$$\mathcal{D}_2 := \left\{ \max \left\{ -L'_m, M''_{(l-m)/2}, M'''_{(l-m)/2}, -L''''_{n-l} \right\} \leq S''_{(l-m)/2} + S'''_{(l-m)/2} \right\}.$$

Ясно, что если $(\tau(n), \mu(n)) = (m, l)$, то $I\{\mathcal{D}_1\} = I\{\mathcal{D}_2\} = 1$.

Пусть теперь $\psi_i: \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, — ограниченные функции. Обозначим

$$\begin{aligned} \Psi_k(\tau(n), \mu(n)) &:= \psi_1(\mathbf{Q}^{(1)}_-(\tau(n), k)) \psi_2(\mathbf{Q}^{(1)}_+(\tau(n), k)) \\ &\quad \times \psi_3(\mathbf{Q}^{(2)}_-(\mu(n), k)) \psi_4(\mathbf{Q}^{(2)}_+(\mu(n), k)). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\Psi_k(\tau(n), \mu(n))] &= \sum_{m,l=0}^n \mathbf{E} [\Psi_k(\tau(n), \mu(n)); \tau(n) = m, \mu(n) = l] \\ &= \sum_{m,l=0}^n \mathbf{E} [\Psi_k(m, l); \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2], \end{aligned}$$

где

$$\Psi_k(m, l) := \psi_1(\mathbf{Q}^{(1)}_-(m, k)) \psi_2(\mathbf{Q}^{(1)}_+(m, k)) \psi_3(\mathbf{Q}^{(2)}_-(l, k)) \psi_4(\mathbf{Q}^{(2)}_+(l, k)).$$

Введем теперь четыре независимых случайных блуждания $\{S_j^{(l)}, j = 0, 1, \dots\}$, $l = 1, 2, 3, 4$, и для вектора $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ с неотрицательными компонентами положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^* &= \mathcal{D}_1^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathcal{D}_1^*(\mathbf{x}) \\ &:= \left\{ M_{m-k}^{(1)} < x_1, L_{(l-m)/2-k}^{(2)} \geq -x_2, L_{(l-m)/2-k}^{(3)} \geq -x_3, M_{n-l-k}^{(4)} < x_4 \right\}, \\ \mathcal{D}_2^* &= \mathcal{D}_2^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathcal{D}_2^*(\mathbf{x}) \\ &:= \left\{ \max \left\{ -L_{m-k}^{(1)} - x_1, M_{(l-m)/2-k}^{(2)} + x_2, M_{(l-m)/2-k}^{(3)} + x_3, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -L_{n-l-k}^{(4)} - x_4 \right\} \leq S_{(l-m)/2-k}^{(2)} + S_{(l-m)/2-k}^{(3)} + x_2 + x_3 \right\} \end{aligned}$$

и

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(\mathbf{x}) := \mathbf{P}(\mathcal{D}_1^* \cap \mathcal{D}_2^*).$$

Пусть, как и ранее, $\mathbf{Q}^{(i)}(k) := (Q_1^{(i)}, \dots, Q_k^{(i)})$, и пусть $\mathbf{Q}^{(ij)}(k)$, $j = 1, 2$, — независимые копии наборов $\mathbf{Q}^{(i)}(k)$. Положим

$$\Psi(k) := \psi_1(\mathbf{Q}^{(11)}(k)) \psi_2(\mathbf{Q}^{(12)}(k)) \psi_3(\mathbf{Q}^{(21)}(k)) \psi_4(\mathbf{Q}^{(22)}(k)).$$

Используя условные математические ожидания относительно σ -алгебр, порожденных первыми k шагами всех четырех случайных блужданий (26)–(27), получаем

$$\mathbf{E}[\Psi_k(m, l); \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2] = \mathbf{E}[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} P(-S'_k, S''_k, S'''_k, -S''''_k)],$$

где

$$\mathcal{G}'_k := I\{M'_k < 0, L''_k \geq 0, L'''_k \geq 0, M''''_k < 0\}.$$

Из наших условий следует, что для фиксированного k

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\max\{|S'_k|, |S''_k|, |S'''_k|, |S''''_k|\} > x) = 0.$$

С другой стороны, согласно лемме 6, для любых $t > 0$ и $y \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{L}(c_n^{-1} S_{nt}^{(i)} | L_{nt}^{(i)} \geq -y) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(t^{1/\alpha} L^+)$$

при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $l - m \geq 2n\varepsilon$, то при условии $\{L_{nt}^{(i)} \geq -y\}$ и $l - m \rightarrow \infty$ последовательность случайных величин $\min(S_{(l-m)/2-k}^{(2)}, S_{(l-m)/2-k}^{(3)})$ стремится к бесконечности с вероятностью 1. Это означает, что, пренебрегая событием, имеющим малую вероятность, мы можем заменить событие $D_2^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k)$ событием

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3^\pm &= \mathcal{D}_3^\pm(\delta_1) \\ &:= \left\{ \max \left\{ -L_{m-k}^{(1)}, M_{(l-m)/2-k}^{(2)}, M_{(l-m)/2-k}^{(3)}, -L_{n-l-k}^{(4)} \right\} \right. \\ &\quad \left. \leq (1 \pm \delta_1) \left(S_{(l-m)/2-k}^{(2)} + S_{(l-m)/2-k}^{(3)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

которое не зависит от $S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k$, и получить следующие оценки снизу и сверху для интересующего нас математического ожидания:

$$\begin{aligned} &\sum_{(m,l) \in \mathcal{A}_1} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^-) \right] - h(n, \varepsilon) \\ &\leq \mathbf{E} \left[\Psi_k(\tau(n), \mu(n)); (\tau(n), \mu(n)) \in \mathcal{A}_1 \right] \\ &\leq \sum_{(m,l) \in \mathcal{A}_1} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^+) \right] + h(n, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $h(n, \varepsilon) \rightarrow 0$, если сначала $n \rightarrow \infty$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$.

Положим

$$P^\pm(\mathbf{x}) = P^\pm(\mathbf{x}, \delta_1) := \mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(\mathbf{x}) \cap \mathcal{D}_3^\pm).$$

Для завершения доказательства леммы 10, нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1. Если выполнены условия А1–А3, то для $m = nt_1$, $l = n(t_1 + 2t_2)$ и $t_4 := 1 - (t_1 + 2t_2) > 0$ справедливы оценки

$$P^\pm(\mathbf{x}, \delta_1) \leq C \mathbf{P}(\mathcal{D}_1) U(-x_1) V(x_2) V(x_3) U(-x_4) \quad (28)$$

и

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^\pm(\mathbf{x}, \delta_1)}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} = \mathbf{P}(\mathcal{C}_2(\mathbf{t})) U(-x_1) V(x_2) V(x_3) U(-x_4). \quad (29)$$

Доказательство. Для доказательства первого неравенства заметим, что

$$P^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(\mathbf{x})) \mathbf{P}(\mathcal{D}_3^\pm | \mathcal{D}_1^*(\mathbf{x})) \leq \mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(\mathbf{x}))$$

и, в силу (16), найдется константа C такая, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(\mathbf{x})) \leq C U(-x_1) V(x_2) V(x_3) U(-x_4) \mathbf{P}(\mathcal{D}_1).$$

Второе неравенство следует из (15), следствия 4, равенства

$$\frac{P^\pm(\mathbf{x})}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} = \frac{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(\mathbf{x}))}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} \mathbf{P}(\mathcal{D}_3^\pm | \mathcal{D}_1^*(\mathbf{x}))$$

и непрерывности распределений меандров устойчивых процессов Леви с параметром α .

Возвращаясь к доказательству леммы 10, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{(m,l) \in \mathcal{A}_1} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^\pm) \right] \\ &= \sum_{(m,l) \in \mathcal{A}_1} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^\pm)}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} \right] \mathbf{P}(\mathcal{D}_1). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, используя определения (26)–(27) и лемму 2, что если $m = nt_1$, $l = n(t_1 + 2t_2)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{D}_1) &= \mathbf{P}(M'_m < 0, L''_{(l-m)/2} \geq 0, L'''_{(l-m)/2} \geq 0, M''''_{n-l} < 0) \\ &= \mathbf{P}(M_m < 0) \mathbf{P}(L_{(l-m)/2} \geq 0) \mathbf{P}(L_{(l-m)/2} \geq 0) \mathbf{P}(M_{n-l} < 0) \\ &\sim \frac{1}{n^2} g(t_1, t_2) \end{aligned}$$

равномерно по $(m, l) \in \mathcal{A}_1$, где

$$g(t_1, t_2) := \left(\frac{\sin \pi \rho}{\pi} \right)^2 \frac{1}{t_1^\rho} \frac{1}{t_2^{1-\rho}} \frac{1}{t_2^{1-\rho}} \frac{1}{(1-t_1-2t_2)^\rho}.$$

Положим

$$\mathcal{B}_1(\varepsilon) := \{(t_1, t_2) : 4\varepsilon \leq t_1 + 2\varepsilon \leq t_1 + 2t_2 \leq 1 - 4\varepsilon\}.$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{(m,l) \in \mathcal{A}_1} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^\pm)}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} \right] \mathbf{P}(\mathcal{D}_1) \\ & \sim \int \int_{(t_1, t_2) \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^\pm)}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} \right] \\ & \quad \times g(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Используя теорему о мажорируемой сходимости и (29), получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{(t_1, t_2) \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^\pm)}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} \right] \\ & \quad \times g(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ & = \int \int_{(t_1, t_2) \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)} \mathbf{E} \left[\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1^*(S'_k, S''_k, S'''_k, S''''_k) \cap D_3^\pm)}{\mathbf{P}(\mathcal{D}_1)} \right] \\ & \quad \times g(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ & = \int \int_{(t_1, t_2) \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)} \mathbf{E} [\Psi(k) I\{\mathcal{G}'_k\} U(-S'_k) V(S''_k) V(S'''_k) U(-S''''_k)] \mathbf{P}(\mathcal{C}_2(\mathbf{t})) \\ & \quad \times g(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ & = \mathbf{E} [\Psi(k) U(-S'_k) V(S''_k) V(S'''_k) U(-S''''_k) I\{\mathcal{G}'_k\}] \int \int_{(t_1, t_2) \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)} \mathbf{P}(\mathcal{C}_2(\mathbf{t})) \\ & \quad \times g(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Если $(m, l) \in \mathcal{A}_2$, то можно использовать аналогичные рассуждения, применяя их к отраженному случайному блужданию $\{-S_k, k \geq 0\}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\Psi_k(\tau(n), \mu(n))] & = \mathbf{E} [\Psi(k) U(-S'_k) V(S''_k) V(S'''_k) U(-S''''_k) I\{\mathcal{G}_k\}] \\ & = \mathbf{E}^- [\psi_1(\mathbf{Q}^{(1)}(k))] \mathbf{E}^+ [\psi_2(\mathbf{Q}^{(1)}(k))] \\ & \quad \times \mathbf{E}^+ [\psi_3(\mathbf{Q}^{(2)}(k))] \mathbf{E}^- [\psi_4(\mathbf{Q}^{(2)}(k))], \end{aligned}$$

что влечет утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Вначале мы докажем соотношение (9). Пусть $\psi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, — непрерывные функции на

интервале $[0, 1]$, без потери общности ограниченные единицей по абсолютной величине. Для $k \leq m$ положим

$$\zeta^{(i)}[m, k] := \frac{1 - f_{m-k, m+k}^{(i)}(0)}{e^{S_m(i) - S_{m-k}(i)}} = \frac{1 - f_{m-k, m}^{(i)}(f_{m, m+k}^{(i)}(0))}{e^{S_m(i) - S_{m-k}(i)}},$$

и пусть

$$\mathcal{H}_k(\varepsilon) := \left\{ \left| \zeta_n^{(1)} - \zeta^{(1)}[\tau(n), k] \right| \leq \varepsilon; \left| \zeta_n^{(2)} - \zeta^{(2)}[\mu(n), k] \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

Тогда для любого фиксированного k

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \left[\psi_1(\zeta_n^{(1)}) \psi_2(\zeta_n^{(2)}) \right] - \mathbf{E} \left[\psi_1(\zeta^{(1)}[\tau(n), k]) \psi_2(\zeta^{(2)}[\mu(n), k]) \right] \right| \\ & \leq \mathbf{P} \left(\left| \zeta_n^{(1)} - \zeta^{(1)}[\tau(n), k] \right| > \varepsilon \right) + \mathbf{P} \left(\left| \zeta_n^{(2)} - \zeta^{(2)}[\mu(n), k] \right| > \varepsilon \right) \\ & \quad + \mathbf{E} \left[\left| \psi_1(\zeta_n^{(1)}) \psi_2(\zeta_n^{(2)}) - \psi_1(\zeta^{(1)}[\tau(n), k]) \psi_2(\zeta^{(2)}[\mu(n), k]) \right| I_{\{\mathcal{H}_k(\varepsilon)\}} \right]. \end{aligned}$$

В силу следствия 2 каждое из первых двух слагаемых в правой части этого выражения можно сделать сколь угодно малым, если устремить к бесконечности сначала n , а затем k . С другой стороны, ввиду равномерной непрерывности функций ψ_i , $i = 1, 2$, на интервале $[0, 1]$, величина

$$\mathbf{E} \left[\left| \psi_1(\zeta_n^{(1)}) \psi_2(\zeta_n^{(2)}) - \psi_1(\zeta^{(1)}[\tau(n), k]) \psi_2(\zeta^{(2)}[\mu(n), k]) \right| I_{\{\mathcal{H}_k(\varepsilon)\}} \right]$$

может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно малого значения $\varepsilon > 0$. Таким образом,

$$\mathbf{E} \left[\psi_1(\zeta_n^{(1)}) \psi_2(\zeta_n^{(2)}) \right] = \mathbf{E} \left[\psi_1(\zeta^{(1)}[\tau(n), k]) \psi_2(\zeta^{(2)}[\mu(n), k]) \right] + \delta_{k,n},$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\delta_{k,n}| = 0$.

Вспоминая определение $\widehat{\mathbf{E}}$ в лемме 1 и используя лемму 10, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\psi_1(\zeta^{(1)}[\tau(n), k]) \psi_2(\zeta^{(2)}[\mu(n), k]) \right] = \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_1(\zeta^{(1)}[k]) \right] \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_2(\zeta^{(2)}[k]) \right],$$

где

$$\zeta^{(i)}[k] := \frac{1 - f_{k,0}^{(i,-)}(f_{0,k}^{(i,+)}(0))}{e^{S_k(i,-)}},$$

а итерации $f_{k,0}^{(i,-)}(s)$ и $f_{0,k}^{(i,+)}(s)$ построены по независимым участкам $(Q_1^{(i)}, \dots, Q_k^{(i)})$ среды в соответствии с мерами $\mathbf{P}^-$ и $\mathbf{P}^+$. Поскольку последовательность

$$\frac{1 - f_{k,0}^{(i,-)}(s)}{e^{S_k(i,-)}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

монотонно убывает по $k = 1, 2, \dots$ и $s \in [0, 1]$, то предел

$$\zeta^{(i,-)}(s) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - f_{k,0}^{(i,-)}(s)}{e^{S_k(i,-)}} \quad (30)$$

существует $\mathbf{P}^-$ -п.н. С другой стороны, последовательность $f_{0,k}^{(i,+)}(0)$ монотонно возрастает по k и, следовательно, предел

$$q^{(i,+)} := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{0,k}^{(i,+)}(0) \quad (31)$$

существует $\mathbf{P}^+$ -п.н. В результате предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta^{(i)}[k] = \zeta^{(i,-)}(q^{(i,+)}) := \zeta^{(i)}$$

существует $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. Отсюда и из леммы 1 вытекает соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_1 \left(\zeta^{(1)}[k] \right) \right] \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_2 \left(\zeta^{(2)}[k] \right) \right] = \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_1 \left(\zeta^{(1)} \right) \right] \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_2 \left(\zeta^{(2)} \right) \right],$$

что влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\psi_1(\zeta_n^{(1)}) \psi_2(\zeta_n^{(2)}) \right] = \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_1 \left(\zeta^{(1)} \right) \right] \widehat{\mathbf{E}} \left[\psi_2 \left(\zeta^{(2)} \right) \right].$$

Итак, независимость и сходимости (9), заявленные в теореме 2, доказаны. Тот факт, что предельные случайные величины в (9) положительны с вероятностью 1 установлен в теореме 1 работы [9].

Второе утверждение теоремы 2 мы докажем только для $t = 1$. Соответствующие утверждения для $0 < t < 1$ могут быть выведены из теоремы 4, которая будет доказана в следующем разделе. Положим

$$\begin{aligned} \zeta^{(i)}[m, k](\lambda) &:= \frac{1 - f_{m-k, m+k}^{(i)}(\exp\{-\lambda e^{S_{m+k}(i) - S_m(i)}\})}{e^{S_m(i) - S_{m-k}(i)}} \\ &= \frac{1 - f_{m-k, m}^{(i)}(f_{m, m+k}^{(i)}(\exp\{-\lambda e^{S_{m+k}(i) - S_m(i)}\}))}{e^{S_m(i) - S_{m-k}(i)}}, \end{aligned}$$

и пусть $\zeta^{(i)}[m, k] = \zeta^{(i)}[m, k](\infty)$. Заметим сначала, что согласно лемме 10

$$\begin{aligned} & \left(\zeta^{(1)}[\tau(n), k](\lambda_1), \zeta^{(1)}[\tau(n), k], \zeta^{(2)}[\mu(n), k](\lambda_2), \zeta^{(2)}[\mu, k] \right) \\ & \xrightarrow{d} \left(\zeta^{(1)}[k](\lambda_1), \zeta^{(1)}[k], \zeta^{(2)}[k](\lambda_2), \zeta^{(2)}[k] \right) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, где

$$\zeta^{(i)}[k](\lambda_i) := \frac{1 - f_{k,0}^{(i,-)}(f_{0,k}^{(i,+)}(\exp\{-\lambda e^{-S_k(i,+)}\}))}{e^{S_k(i,-)}}$$

и векторы $(\zeta^{(i)}[k](\lambda_i), \zeta^{(i)}[k])$, $i = 1, 2$, независимы.

Этот факт в сочетании с леммами 4 и 5 влечет существование независимых векторов $(\zeta^{(i)}(\lambda_i), \zeta^{(i)})$, $i = 1, 2$ таких, что

$$\left(e^{-S_{\tau(n)}(i)} \left(1 - f_{0,n}^{(i)} \left(\exp \left\{ -\lambda_i e^{S_{\tau(n)}(i) - S_n(i)} \right\} \right), 1 - f_{0,n}^{(i)}(0) \right) \right) \xrightarrow{d} \left(\zeta^{(i)}(\lambda_i), \zeta^{(i)} \right).$$

Используя это соотношение и равенство

$$\Phi_n(\lambda) := \mathbf{E}_\pi [e^{-\lambda \hat{Y}_n} | Z_n > 0] = 1 - \frac{1 - f_{0,n}(\exp\{-\lambda(1 - f_{0,n}(0))e^{-S_n}\})}{1 - f_{0,n}(0)}$$

и повторяя рассуждения из теоремы 1 статьи [10] (см., в частности, формулы (3.1)–(3.6) указанной работы), нетрудно проверить, что $(\Phi_n^{(1)}(\lambda_1), \Phi_n^{(2)}(\lambda_2)) \Rightarrow (\Phi^{(1)}(\lambda_1), \Phi^{(2)}(\lambda_2))$ при $n \rightarrow \infty$, где (случайные) преобразования Лапласа $\Phi^{(i)}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, обладают свойствами, заявленными в теореме 2 для случая $t = 1$.

3. Многомерные условные распределения. Для $b \geq 2$ и $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_b)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_b)$, таких, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_b = 1$ и $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, b$, обозначим $N_j = nt_j$ и, вспоминая (5), положим

$$\Phi_n(\mathbf{t}, \bar{\lambda}) := \mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{i=1}^b \lambda_i \hat{Y}_{N_i} \right\} \middle| Z_n > 0 \right]$$

и

$$\Psi_n(\mathbf{t}, \bar{\lambda}) := \mathbf{E}_\pi \left[\hat{Y}_n \exp \left\{ - \sum_{i=1}^b \lambda_i \hat{Y}_{N_i} \right\} \middle| Z_n > 0 \right].$$

Для натуральных $d \leq b^{(1)}$ и $e \leq b^{(2)}$ и наборов неотрицательных целых чисел $\mathbf{P} = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_d)$ и $\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2, \dots, r_e)$ таких, что

$$0 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_d = b^{(1)}, \quad 0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_e = b^{(2)}$$

введем события

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(1)}(\mathbf{t}; \mathbf{P}, n) &:= \{\tau(N_1) = \dots = \tau(N_{p_1}) < \tau(N_{p_1+1}) = \dots \\ &= \tau(N_{p_2}) < \dots = \tau(N_{p_{d-1}}) < \tau(N_{p_{d-1}+1}) = \dots = \tau(N_{p_d})\}, \\ \mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{t}; \mathbf{r}, n) &:= \{\mu(N_1) = \dots = \mu(N_{r_1}) < \mu(N_{r_1+1}) = \dots \\ &= \mu(N_{r_2}) < \dots = \mu(N_{r_{e-1}}) < \mu(N_{r_{e-1}+1}) = \dots = \mu(N_{r_e})\} \end{aligned}$$

и положим

$$\mathcal{U}(\mathbf{t}; \mathbf{P}, \mathbf{r}, n) := \mathcal{U}^{(1)}(\mathbf{t}; \mathbf{P}, n) \cap \mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{t}; \mathbf{r}, n).$$

Основной результат данного раздела выглядит следующим образом (напомним, что мы используем верхние индексы $i = 1, 2$ для соответствующих характеристик и величин, связанных с ветвящимися процессами $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$).

Теорема 4. Если выполнены условия A1–A3, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \left(\Phi_n^{(1)}(\mathbf{t}, \bar{\lambda}^{(1)}), \Phi_n^{(2)}(\mathbf{t}, \bar{\lambda}^{(2)}) \right) \mid \mathcal{U}(\mathbf{t}; \mathbf{P}, \mathbf{r}, n) \right\} \Rightarrow \left(\Phi^{(1)}(\bar{\lambda}^{(1)}), \Phi^{(2)}(\bar{\lambda}^{(2)}) \right), \quad (32)$$

где $\Phi^{(i)}(\bar{\lambda}^{(i)})$, $i = 1, 2$, — (случайные) преобразования Лапласа собственных случайных векторов. Кроме того, случайные функции $\Phi^{(i)}(\bar{\lambda}^{(i)})$, $i = 1, 2$, независимы.

Заметим, что предельные случайные величины в (32) не зависят от $\mathbf{t}$.

Для доказательства этой теоремы напомним сначала ряд результатов, заимствованных из [10], для ветвящихся процессов с одним типом частиц.

Обозначим $Z_n(k)$ количество частиц в момент n в ветвящемся процессе с одним типом частиц, стартующем с одной частицы в момент $k \leq n$. Положим

$$\hat{Y}_n(k) := \frac{Z_n(k)}{\mathbf{E}_\pi[Z_n(k) \mid Z_n(k) > 0]},$$

$$\Phi_{k,n,\pi}(\lambda) = \Phi_{k,n}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda \hat{Y}_n(k)} \mid Z_n(k) > 0 \right], \quad \Phi_n(\lambda) := \Phi_{0,n}(\lambda),$$

и пусть

$$\Psi_{k,n}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[\hat{Y}_n(k) e^{-\lambda \hat{Y}_n(k)} \mid Z_n(k) > 0 \right], \quad \Psi_n(\lambda) := \Psi_{0,n}(\lambda).$$

Следующие два результата, описывающие свойства (случайных) преобразований Лапласа $\Psi_n(\lambda)$ и $\Phi_{k,n}(\lambda)$, были доказаны в лемме 7 и теореме 3 работы [10], соответственно.

Лемма 11. Если выполнены условия A2–A3, то $\Psi_n(\cdot) \Rightarrow -\Phi'(\cdot)$, $n \rightarrow \infty$, где функция Φ та же, что и в (8).

Лемма 12. Если выполнены условия A2–A3, то для любых $\Lambda > 1$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} |\Psi_{\tau(n)-k, \tau(n)+k}(\lambda) - \Psi_{0,n}(\lambda)| > \varepsilon \right) = 0.$$

Следующее утверждение легко вывести из следствия 7 статьи [10] и леммы 5 данной работы.

Лемма 13. Если выполнены условия A2–A3, то для любых $\Lambda > 1$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{1 \leq \lambda \leq \Lambda} |\Phi_{\tau(n)-k, \tau(n)+k}(\lambda) - \Phi_{0,n}(\lambda)| > \varepsilon \right) = 0.$$

Объединяя следствия 8 и 9 работы [10], легко убедиться в справедливости такого утверждения:

Лемма 14. Если выполнены условия А2–А3, то для любых $\Lambda > 1$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\Lambda}} \left| \Phi_n \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \right) - \Phi_n(\mathbf{t}, \bar{\lambda}) \right| > \varepsilon; \tau(n) < N_1 \right) = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\Lambda}} \left| \Psi_n \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \right) - \Psi_n(\mathbf{t}, \bar{\lambda}) \right| > \varepsilon; \tau(n) < N_1 \right) = 0.$$

Упомянем, наконец, еще один результат, содержащийся в лемме 25 из [10]. Положим

$$\mathcal{U}(\mathbf{t}; n) =: \{0 < \tau(N_1) < \tau(N_2) < \dots < \tau(N_d) = \tau(n)\}. \quad (33)$$

Лемма 15. Если выполнены условия А2–А3, то для любых $\Lambda > 1$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{1 \leq \min_i \lambda_i \leq \Lambda} \left| \Phi_n(\bar{\mathbf{t}}, \bar{\lambda}) - \Phi_{N_{d-1}, N_d}(\lambda_d) \prod_{j=1}^{d-1} \Psi_{N_{j-1}, N_j}(\lambda_j) \right| > \varepsilon \mid \mathcal{U}(\mathbf{t}; n) \right) = 0.$$

Обозначим

$$\lambda_j(\mathbf{p}) := \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{p}_{j-1}+1}^{\mathbf{p}_j} \lambda_{\mathbf{k}}.$$

Из лемм 14 и 15 вытекает, что для любых $\Lambda > 1$ и $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{1 \leq \min_i \lambda_i \leq \Lambda} \left| \Phi_n(\mathbf{t}, \bar{\lambda}) - \Phi_{N_{p_{d-1}}, N_{p_d}}(\lambda_d(\mathbf{p})) \prod_{j=1}^{d-1} \Psi_{N_{p_{j-1}}, N_{p_j}}(\lambda_j(\mathbf{p})) \right| \right. \\ \left. > \varepsilon \mid \mathcal{U}(\mathbf{t}; \mathbf{P}, n) \right) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Обозначим $\mu(k, l)$ последний момент, когда случайное блуждание $\{S_j, k \leq j \leq l\}$ достигает своего максимального значения на интервале $[k, l]$, и пусть $\tau(k, l)$ — первый момент, когда случайное блуждание $\{S_j, k \leq j \leq l\}$ достигает своего минимального значения на этом интервале. Положим

$$\begin{aligned} \Xi^{(1)}(k, \mathbf{N}, \bar{\lambda}) &:= \Phi_{\tau(N_{p_{d-1}}, N_{p_d})-k, \tau(N_{p_{d-1}}, N_{p_d})+k}^{(1)}(\lambda_d(\mathbf{p})) \\ &\times \prod_{j=1}^{d-1} \Psi_{\tau(N_{p_{j-1}}, N_{p_j})-k, \tau(N_{p_{j-1}}, N_{p_j})+k}^{(1)}(\lambda_j(\mathbf{p})) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Xi^{(2)}(k, \mathbf{N}, \bar{\lambda}) &:= \Phi_{\mu(N_{r_{e-1}}, N_{r_e})-k, \mu(N_{r_{e-1}}, N_{r_e})+k}^{(2)}(\lambda_e(\mathbf{r})) \\ &\times \prod_{l=1}^{e-1} \Psi_{\mu(N_{r_{l-1}}, N_{r_l})-k, \mu(N_{r_{l-1}}, N_{r_l})+k}^{(2)}(\lambda_l(\mathbf{r})). \end{aligned}$$

По лемме 10 функции, входящие в $\Xi^{(i)}(k, \mathbf{N}, \bar{\lambda})$ в качестве множителей, асимптотически независимы, если $[N_{p_{j-1}}, N_{p_j}] \cap [N_{r_{l-1}}, N_{r_l}] \neq \emptyset$ для некоторых j и l , и, очевидно, независимы, если интервалы $[N_{p_{j-1}}, N_{p_j}]$ и $[N_{r_{l-1}}, N_{r_l}]$ не пересекаются. Более того, пределы указанных множителей при $n \rightarrow \infty$ не зависят от $\mathbf{t}$.

Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\Xi^{(1)}(k, \mathbf{N}, \bar{\lambda}^{(1)}), \Xi^{(2)}(k, \mathbf{N}, \bar{\lambda}^{(2)}) \right) \mid \mathcal{W}(\mathbf{t}; \mathbf{p}, \mathbf{r}, n) \right\} \\ & \Rightarrow \left(\Xi^{(1)}(k, \bar{\lambda}^{(1)}), \Xi^{(2)}(k, \bar{\lambda}^{(2)}) \right), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\Xi^{(1)}(k, \bar{\lambda}^{(1)}), \Xi^{(2)}(k, \bar{\lambda}^{(2)})$ — независимые случайные величины.

С другой стороны, в соответствии с леммой 12 и равенством (34)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{1 \leq \min_j \lambda_j \leq \Lambda} \left| \Phi_n^{(i)}(\mathbf{t}, \bar{\lambda}) - \Xi^{(i)}(k, \mathbf{N}, \bar{\lambda}) \right| > \varepsilon \mid \mathcal{W}^{(i)}(\mathbf{t}; \mathbf{r}, n) \right) = 0. \quad (36)$$

При помощи этих двух соотношений, повторяя почти дословно доказательство теоремы 2 из [10], нетрудно убедиться в справедливости сходимости (32) и показать, что

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\bar{\lambda}) &= (-1)^{d-1} \Phi_d^{(1)}(\lambda_d(\mathbf{p})) \prod_{j=1}^{d-1} \Phi_j^{(1)'}(\lambda_j(\mathbf{p})), \\ \Phi^{(2)}(\bar{\lambda}) &= (-1)^{e-1} \Phi_e^{(1)}(\lambda_e(\mathbf{r})) \prod_{l=1}^{e-1} \Phi_l^{(2)'}(\lambda_l(\mathbf{r})), \end{aligned}$$

где случайные функции $\Phi_j^{(1)}, j = 1, \dots, d$, и $\Phi_j^{(2)}, j = 1, \dots, e$, взаимно независимы. Более того, они одинаково распределены внутри каждой группы, а $\Phi_j^{(1)'}, j = 1, \dots, d-1$ и $\Phi_j^{(2)'}, j = 1, \dots, e$ являются производными независимых функций.

Тот факт, что соответствующие распределения — собственные, установлен в [10]. Теорема 4 доказана.

4. Совместные распределения в случайные моменты. В

этом разделе мы докажем теорему 3, описывающую распределение пары $(Z_{\tau(nt)}^{(1)}, Z_{\tau(nt)}^{(2)})$ при условии, что оба типа не выродились к моменту n .

Из определения (11) следует, что

$$\varphi_{\tau(nt), n}^{(1)}(s) = \frac{1 - f_{0, \tau(nt)}^{(1)}(s f_{\tau(nt), n}^{(1)}(0))}{1 - f_{0, n}^{(1)}(0)} - \frac{1 - f_{0, \tau(nt)}^{(1)}(s)}{1 - f_{0, n}^{(1)}(0)}.$$

Вначале мы рассмотрим случай $\tau(n) = \tau(nt), \mu(n) < \tau(n)$. Будем предполагать без ограничения общности, что $\tau(n)$ и $\mu(n)$ принадлежат интервалу $[4\varepsilon n, n(1 - 4\varepsilon)]$ для достаточно малого значения ε . Более того, согласно лемме 9 мы можем предполагать, что $\mu(n) < \tau(n) - 2\varepsilon n$.

Если $\tau(n) = \tau(nt)$, то, в соответствии со следствием 2, мы можем заменить $\varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(s)$ величиной

$$\varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(k; s) := \frac{1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)}^{(1)}(s f_{\tau(n), \tau(n)+k}^{(1)}(0))}{1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)+k}^{(1)}(0)} - \frac{1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)}^{(1)}(s)}{1 - f_{\tau(n)-k, \tau(n)+k}^{(1)}(0)},$$

если k достаточно велико. Заметим, что в силу следствий 2, 3 и соотношений (30) и (31)

$$\mathcal{L}(\varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(k; s)) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\frac{\zeta^{(1,-)}(s q^{(1,+)}) - \zeta^{(1,-)}(s)}{\zeta^{(1,-)}(q^{(1,+)})}\right) := \mathcal{L}(\varphi^{(1)}(s)),$$

если вначале n , а затем k устремить к бесконечности.

Для анализа второй допредельной компоненты в (12) заметим, что в силу неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda \hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)}} \mid Z_n^{(2)} > 0 \right] - \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda \hat{Y}_n^{(2)}} \mid Z_n^{(2)} > 0 \right] \right| \\ & \leq \lambda \mathbf{E}_\pi \left[\left| \hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)} - \hat{Y}_n^{(2)} \right| \mid Z_n^{(2)} > 0 \right], \end{aligned}$$

оценки $\mu(n) < \tau(n) - 2\varepsilon n$ и леммы 19 в [10] мы можем заменить случайную величину $\tilde{\Phi}_{\tau(n),n}^{(2)}(\lambda)$ на $\Phi_{0,n}^{(2)}(\lambda)$. В свою очередь, ввиду леммы 13, $\Phi_{0,n}^{(2)}(\lambda)$ можно заменить величиной

$$\Phi_{\mu(n)-k, \mu(n)-k}^{(2)}(\lambda) = \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda \hat{Y}_{\mu(n)+k}^{(2)}} \mid Z_{\mu(n)-k}^{(2)} > 0 \right]$$

(напомним, что точки минимума случайного блуждания $\{S_k(2), 0 \leq k \leq n\}$ это точки максимума случайного блуждания $\{S_k(1), 0 \leq k \leq n\}$).

Поскольку теперь интервалы $[\mu(n) - k, \mu(n) + k]$ и $[\tau(n) - k, \tau(n) + k]$ не пересекаются, мы можем воспользоваться леммой 10 и, устремив k к бесконечности, заключить, что

$$\begin{aligned} & \left(\varphi_{\tau(n),n}^{(1)}(k; s), \Phi_{\mu(n)-k, \mu(n)-k}^{(2)}(\lambda) \right) I\{\mu(n) < \tau(nt) = \tau(n)\} \\ & \Rightarrow \left(\varphi^{(1)}(s), \Phi^{(2)}(\lambda) \right) I\{\mu_1 < \tau_1 = \tau_t\}. \end{aligned}$$

Это дает первое слагаемое в правой части (12).

Оставшиеся случаи могут быть рассмотрены аналогичным образом. При анализе первой компоненты допредельного вектора при условии $\tau(nt) < \tau(n)$ необходимо использовать соотношение

$$\begin{aligned} \varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(k; s) &= \frac{f_{\tau(nt)-k, \tau(nt)}^{(1)}(s) - f_{\tau(n)-k, \tau(nt)}^{(1)}(s f_{\tau(nt), \tau(nt)+k}^{(1)}(0))}{1 - f_{\tau(nt)-k, \tau(nt)+k}^{(1)}(0)} \\ &\Rightarrow -s(\zeta^{(1,-)}(s))', \end{aligned}$$

справедливого, если сначала n , а затем k устремить к бесконечности. Этот факт был установлен в теореме 6 из [11] при помощи неравенств

$$\varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(k; s) \leq s \frac{(f_{\tau(nt)-k, \tau(nt)}^{(1)})'(s)}{e^{S_{\tau(nt)}}} \frac{e^{S_{\tau(nt)-k}} (1 - f_{\tau(nt), \tau(nt)+k}^{(1)}(0))}{1 - f_{\tau(nt)-k, \tau(nt)+k}^{(1)}(0)}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{\tau(nt),n}^{(1)}(k; s) &\geq s \frac{(f_{\tau(nt)-k, \tau(nt)}^{(1)})'(s) f_{\tau(nt), \tau(nt)+k}^{(1)}(0))}{e^{S_{\tau(nt)}}} \\ &\times \frac{e^{S_{\tau(nt)-k}} (1 - f_{\tau(nt), \tau(nt)+k}^{(1)}(0))}{1 - f_{\tau(nt)-k, \tau(nt)+k}^{(1)}(0)} \end{aligned}$$

и соотношений (20) и (21).

Для анализа первой компоненты допредельного вектора в теореме 3 в случае $\mu(n) > \tau(nt)$ положим

$$\sigma_{\tau(nt),n}^{(2)} := \frac{e^{S_{\tau(nt)}} (1 - f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0))}{1 - f_{0,n}^{(2)}(0)}$$

и заметим, что при $\mathbf{m}_n^*(k) := \mathbf{E}_\pi[Z_n(k) \mid Z_n(k) > 0]$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}_{\tau(nt),n}^{(2)}(\lambda) \\ &= \frac{f_{0,\tau(nt)}^{(2)}(\exp\{-\lambda \mathbf{m}_n^*(\tau(nt))\}) - f_{0,\tau(nt)}^{(2)}(\exp\{-\lambda \mathbf{m}_n^*(\tau(nt))\}) f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0))}{1 - f_{0,n}^{(2)}(0)} \\ &\leq \sigma_{\tau(nt),n}^{(2)} \mathbf{E}_\pi[\hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)} e^{-\lambda \hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)}} \mid Z_{\tau(nt)}^{(2)} > 0] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\tau(nt),n}^{(2)}(\lambda) &\geq \sigma_{\tau(nt),n}^{(2)} \mathbf{E}_\pi[\hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)} e^{-\lambda \hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)}} (f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0))^{Z_{\tau(nt)}^{(2)}} \mid Z_{\tau(nt)}^{(2)} > 0] \\ &- \sigma_{\tau(nt),n}^{(2)} \mathbf{E}_\pi[\hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)} e^{-\lambda \hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)}} [1 - (f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0))^{Z_{\tau(nt)}^{(2)}}] \mid Z_{\tau(nt)}^{(2)} > 0]. \end{aligned}$$

Если $\mu(n) > \tau(nt)$, то силу леммы 11 и соотношения (20) $\sigma_{\tau(nt),n}^{(2)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ при $n \rightarrow \infty$, где $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ означает сходимость по вероятности относительно меры $\mathbf{P}$. Далее, $f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0) I\{\mu(n) > \tau(nt)\} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, если $\mu(n) > \tau(nt)$, то с вероятностью близкой к 1

$$(f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0))^{Z_{\tau(nt)}^{(2)}} \geq \exp\left\{-2Z_{\tau(nt)}^{(2)}(1 - f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0))\right\} \geq e^{-2W_n},$$

где $W_n := Z_{\tau(nt)}^{(2)} e^{-S_{\mu(n)} + S_{\tau(nt)}}$. Ясно, что $\mathbf{E}_\pi[W_n] = e^{-S_{\mu(n)}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\mathbf{P}(e^{-2W_n} < 1 - \varepsilon) = \mathbf{P}(2W_n > -\ln(1 - \varepsilon)) \leq \frac{2\mathbf{E}W_n}{-\ln(1 - \varepsilon)} = \frac{2\mathbf{E}[e^{-S_{\mu(n)}}]}{-\ln(1 - \varepsilon)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, что влечет $e^{-2W_n} \xrightarrow{P} 1$. В результате имеем

$$(f_{\tau(nt),n}^{(2)}(0))^{Z_{\tau(nt)}^{(2)}} \xrightarrow{P} 1$$

на множестве $\mu(n) > \tau(nt)$. Таким образом, вместо $\tilde{\Phi}_{nt}^{(2)}(\lambda)$ достаточно исследовать поведение случайной величины

$$\Psi_{\tau(nt),n}^{(2)}(\lambda) = \mathbf{E}_{\pi} \left[\hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)} e^{-\lambda \hat{Y}_{\tau(nt)}^{(2)}} \mid Z_{\tau(nt)}^{(2)} > 0 \right]$$

при условии $\mu(n) > \tau(nt)$.

Используя формулу полной вероятности и лемму 12, несложно показать, что $\Psi_{\tau(nt),n}(\lambda)$ можно заменить случайной функцией $\Psi_{\mu(n)-k, \mu(n)+k}^{(2)}(\lambda)$. Как мы уже видели, интервалы $[\mu(n) - k, \mu(n) + k]$ и $[\tau(n) - k, \tau(n) + k]$ с вероятностью близкой к 1 не пересекаются для всех достаточно больших значений n и подходящим образом выбранных k . Таким образом, для завершения доказательства достаточно применить лемму 10 и вспомнить лемму 11.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afanasyev V. I., Geiger G., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab., 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
2. Athreya K. B., Karlin S. On branching processes with random environments. I. Extinction probabilities. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, p. 1499–1520.
3. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 640 с.
4. Doney R. A., Jones E. M. Large deviation results for random walks conditioned to stay positive. — J. London Mathem. Society, submitted.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II. М.: Мир, 1984, 738 с.
6. Geiger J., Kersting G. The survival probability of a critical branching process in random environment. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
7. Smith W. L., Wilkinson W. On branching processes in random environment. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 3, p. 814–827.
8. Спitzer Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
9. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде, I: предельные теоремы. — Теория вероятн. и ее применен., 2003, т. 48, в. 2, с. 274–300.
10. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде, II: конечномерные распределения. — Теория вероятн. и ее применен., 2004, т. 49, в. 2, с. 231–268.
11. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. — Теория вероятн. и ее применен., 2006, т. 51, в. 1, с. 22–46.

Поступила в редакцию
21.X.2011