Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Кареев, Нижние границы для среднего объема выборки и эффективность последовательных процедур отбора, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 2, 278–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:11:02

© 2012 г.

КАРЕЕВ И. А.*

**НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СРЕДНЕГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ
И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ
ПРОЦЕДУР ОТБОРА**

Устанавливаются некоторые нижние границы для среднего объема выборки в процедурах отбора популяции с наибольшим значением скалярного параметра, когда гарантируется заданная вероятность корректного решения. При построении границ используются универсальные границы Володина–Малютова [1], [5]. Полученные результаты применяются для оценки эффективности процедуры отбора Бекхофера [10] и ее последовательных модификаций [7], [8].

Ключевые слова и фразы: отбор наилучшей популяции, нижние границы для среднего объема выборки, эффективность.

1. Введение. Рассматривается задача отбора одной из m популяций с наибольшим значением скалярного параметра θ («наилучшей популяции»). При этом предполагается, что распределения наблюдаемых случайных характеристик популяций принадлежат единому семейству распределений, индексированных скалярным параметром θ .

Существует несколько подходов к построению процедур отбора, гарантирующих заданные ограничения на вероятность корректного отбора и обладающих конечным числом наблюдений. Например, подход Р. Бекхофера [10] основан на введении «зоны безразличия», отграничивающей на заданную величину наилучшую популяцию от других, в то время как подход Ш. С. Гупты [11] основан на отборе подмножества популяций, которое содержит наилучшую с заданной вероятностью. Оба эти подхода и соответствующие им процедуры отбора см. в обзоре [9].

В настоящей работе рассматриваются процедуры, гарантирующие заданные ограничения на вероятность корректного отбора, когда значение параметра θ наилучшей популяции в достаточной мере отстоит от значений параметра в других популяциях (подход Бекхофера). Различные применения этого подхода к построению гарантийных процедур отбора — как основанных на фиксированном числе наблюдений, так и последовательных — можно найти в монографии [8].

*Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, 420008 Казань, Россия; e-mail: kareevia@gmail.com

Одной из важнейших характеристик гарантийных процедур отбора является средний объем выборки. Нижние границы для среднего объема выборки позволяют оценить снизу средний объем выборки для всевозможных гарантийных процедур отбора. Помимо того, что такая граница представляет интерес сама по себе, как некоторый ориентир при планировании объема наблюдений, она также может использоваться для оценки эффективности процедур отбора, т.е. позволяет оценить, насколько средний объем наблюдений конкретной гарантийной процедуры далек от возможного минимума.

Наиболее ранние нижние границы для среднего объема выборки были связаны с задачами проверки гипотез, это нижние границы Вальда и Саймонса (см., например, [13]). Позднее И. Н. Володин построил универсальную нижнюю границу для среднего объема выборки (см. [1] и [4]), основанную на свойствах различающей информации по Кульбаку–Лейблеру. Эта граница применима для любой статистической проблемы, и ее первые применения были связаны с задачами проверки гипотез (критерии согласия и однородности [2], а также критерии инвариантности семейств распределений относительно групп преобразований выборочного пространства [3]). В дальнейшем М. Б. Малютовым [5] эти границы были распространены на случай управления наблюдениями, с семейством наблюдаемых случайных величин произвольной мощности. Это позволило построить нижние границы для среднего объема наблюдений в проблеме однородности более чем двух популяций, а также для задач регрессии и планирования статистических экспериментов (см. [5], [12]).

Целью этой работы является построение нижних границ для среднего объема выборки гарантийных процедур отбора и применение этих границ для проверки эффективности нескольких процедур отбора для нормальной модели. Второй раздел посвящен выводу нижних границ посредством применения несколько видоизмененного метода Гальчука–Малютова [12] при решении задач на минимакс, а также непосредственному вычислению границ для нормальных и показательных распределений. В третьем разделе полученные границы применяются к исследованию эффективности нескольких процедур отбора наилучшей (по среднему значению) нормальной модели с общей известной дисперсией. Находится эффективность процедуры Бекхофера с фиксированным числом наблюдений, ее последовательной модификации (см. о данных процедурах в монографии [8]), а также эффективность более новой последовательной процедуры Као–Лая [7].

Эффективность процедуры Бекхофера с фиксированным числом наблюдений относительно более грубых, чем у Малютова [5], нижних границ Володина [4] была также исследована А. А. Новиковым [6]. В своей работе он определял асимптотическую эффективность этой процедуры

отбора относительно множества равномерно не менее мощных процедур. Таким образом, результаты третьего раздела, в которой определяется асимптотическая эффективность процедуры Бекхофера относительно множества всех процедур отбора, гарантирующих заданные ограничения на вероятность корректного отбора, дополняют и уточняют результаты Новикова.

2. Нижняя граница для среднего объема выборки. Рассматривается задача отбора одной из m популяций с наибольшим значением параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}$. Предполагается, что наблюдаемая случайная характеристика ξ_i , соответствующая i -й популяции, имеет распределение $\mathbf{P}_{\theta_i} \in \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ со значением параметра $\theta = \theta_i$. В эксперименте наблюдаются независимые копии случайной величины ξ_i .

Отбор популяции после окончания наблюдений осуществляется решающей функцией δ , принимающей значение в пространстве решений $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_m\}$, где d_i обозначает отбор i -й популяции как наилучшей.

Пусть $\theta_{[1]} \leq \dots \leq \theta_{[m]}$ — упорядоченные значения θ в популяциях.

Далее будут рассматриваться процедуры отбора с зоной безразличия. Введение зоны безразличия состоит в сужении исходного параметрического пространства Θ^m до некоторого пространства Θ_{Δ} ($\Delta > 0$), где фиксированное значение Δ определяет размер зоны безразличия. При этом заданное ограничение α на вероятность корректного решения гарантируется только на Θ_{Δ} .

Для общей проблемы отбора предлагается ввести зону безразличия следующим образом. Определим функцию $r_{\Delta}(\theta)$, $\Delta > 0$, $\theta \in \Theta$, удовлетворяющую следующим условиям: $r_{\Delta}(\theta)$ строго возрастает по θ при каждом фиксированном Δ , строго убывает по Δ при каждом фиксированном θ и $r_{\Delta}(\theta) < \theta$. Параметрическое пространство с зоной безразличия определим как

$$\Theta_{\Delta} = \{\theta \in \Theta^m: \theta_{[m-1]} \leq r_{\Delta}(\theta_{[m]})\}.$$

Например, если θ — параметр сдвига, то естественно положить $r_{\Delta}(\theta) = \theta - \Delta$, чему соответствует $\Theta_{\Delta} = \{\theta \in \Theta^m: \theta_{[m]} - \theta_{[m-1]} \geq \Delta\}$, а в случае параметра масштаба $r_{\Delta}(\theta) = (1 - \Delta)\theta$, так что $\Theta_{\Delta} = \{\theta \in \Theta^m: \theta_{[m-1]}/\theta_{[m]} \leq 1 - \Delta\}$.

Введем подмножество $B_{\Delta}(\theta)$ пространства Θ_{Δ} :

$$B_{\Delta}(\theta) = \{\vartheta \in \Theta_{\Delta}: D_{\theta} \cap D_{\vartheta} = \emptyset\},$$

где $D_{\theta} \subseteq \mathcal{D}$ — подмножество корректных для θ решений. Таким образом, множеству $B_{\Delta}(\theta)$ принадлежат только те параметрические векторы ϑ , номер наибольшей компоненты которых отличен от номера наибольшей компоненты θ . Пусть $I(\theta_i, \vartheta_i)$ — различающая информация по Кульбаку–Лейблеру между распределениями $\mathbf{P}_{\theta_i}$ и $\mathbf{P}_{\vartheta_i}$.

Используя универсальные границы Володина–Малютова, представим нижнюю границу для среднего значения общего для всех популяций объема наблюдений $\mathbf{E}_\theta \nu$ в виде

$$\mathbf{E}_\theta \nu \geq \inf_{\mathbf{w} \in W} \sup_{\boldsymbol{\vartheta} \in B_\Delta(\boldsymbol{\theta})} \frac{\omega(\alpha(\boldsymbol{\theta}), \alpha(\boldsymbol{\vartheta}))}{\sum_{i=1}^m w_i I(\theta_i, \vartheta_i)}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_\Delta,$$

где

$$\omega(x, y) = x \ln \frac{x}{1-y} + (1-x) \ln \frac{1-x}{y}$$

— функция Вальда, $\alpha(\boldsymbol{\theta})$ — вероятность ошибочного решения процедуры отбора, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ и

$$W = \left\{ \mathbf{w} \in [0; 1]^m : \sum_{i=1}^m w_i = 1 \right\}$$

— единичный симплекс.

Заметим, что $\omega(x, y)$ — убывающая по x и по y функция при $x + y < 1$. Поэтому для заданного ограничения α на вероятность ошибочного решения: $\alpha(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$ получаем следующую нижнюю границу для гарантийной процедуры отбора:

$$\mathbf{E}_\theta \nu \geq \frac{\omega(\alpha, \alpha)}{G(\boldsymbol{\theta}, \Delta)}, \quad (1)$$

где

$$G(\boldsymbol{\theta}, \Delta) = \sup_{\mathbf{w} \in W} \inf_{\boldsymbol{\vartheta} \in B_\Delta(\boldsymbol{\theta})} \sum_{i=1}^m w_i I(\theta_i, \vartheta_i).$$

Нетрудно убедиться, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $f_1(x), \dots, f_k(x)$ — непрерывные, строго возрастающие функции и

$$f_1(0) = \dots = f_k(0).$$

Пусть задан $y \in \mathbf{R}_+$, и пусть

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^k : \sum_{i=1}^k x_i = y \right\}.$$

Тогда существует такой вектор $\mathbf{x}^* \in X$, что

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \min_{1 \leq i \leq k} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq k} f_i(x_i^*)$$

и $f_1(x_1^*) = \dots = f_k(x_k^*)$.

В дальнейшем различающую информацию $I(u, v)$, $u, v \in \Theta \subset \mathbf{R}$, называем *строго монотонной*, если при каждом фиксированном u информация $I(\cdot, v)$ как функция от v убывает при $v < u$ и возрастает при $v > u$. Для устранения громоздкости формул квадратные скобки в записи упорядоченных значений вектора θ будут опускаться, так что всегда $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$.

Теорема 1. Пусть семейство распределений $\mathcal{P}$ таково, что различающая информация $I(u, v)$ строго монотонна. Тогда для любого $\theta \in \Theta_\Delta$ справедлива оценка

$$\mathbf{E}_\theta \nu \geq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\omega(\alpha, \alpha)}{I(\theta_i, r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)))},$$

где $t \geq 0$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} r_t(\theta_m) \in \Theta, \quad r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)) \in \Theta, \\ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{I(\theta_m, r_t(\theta_m))}{I(\theta_i, r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)))} \leq 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$r_t(\theta_m) \geq \theta_{m-1}. \quad (3)$$

Доказательство. Требуемое неравенство получается из (1) путем оценивания сверху минимакса в выражении для $G(\theta, \Delta)$ — множество $B_\Delta(\theta)$ сокращается до некоторого подмножества векторов $H = \{\vartheta^{(k)}, k = 1, \dots, m-1\}$, зависящих от θ и определяемых таким образом, чтобы в последующем упростить вычисление супремума.

Таким образом, доказательство теоремы можно разделить на три этапа: (i) построение векторов $\vartheta^{(k)}$ и упрощение получившейся оценки для $G(\theta, \Delta)$; (ii) вычисление значений $w_1, \dots, w_{m-1}$, доставляющих супремум при фиксированном w_m ; (iii) нахождение супремума по w_m .

Зафиксируем $\theta \in \Theta_\Delta$ и приступим к осуществлению первого этапа доказательства.

(i) Пусть $\vartheta^{(k)}$ — m -мерный вектор, совпадающий с θ во всех компонентах, кроме m -й и k -й:

$$\vartheta_i^{(k)} = \begin{cases} r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)), & i = k, \\ r_t(\theta_m), & i = m, \\ \theta_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где t определяется из условий (2), (3).

Легко видеть, что $\vartheta^{(k)} \in \Theta_\Delta$ — это следует из (3) и равенств

$$\vartheta_{[m-1]}^{(k)} = \vartheta_m^{(k)} = r_t(\theta_m) = r_\Delta(r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m))) = r_\Delta(\vartheta_k^{(k)}) = r_\Delta(\vartheta_{[m]}^{(k)}).$$

Так как $D_{\theta} = \{m\}$ и $D_{\vartheta^{(k)}} = \{k\}$, то $H = \{\vartheta^{(k)}, 1 \leq k \leq m-1\} \subset B_{\Delta}(\theta)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} G(\theta, \Delta) &= \sup_{\mathbf{w} \in W} \inf_{\vartheta \in B_{\Delta}(\theta)} \sum_{i=1}^m w_i I(\theta_i, \vartheta_i) \leq \sup_{\mathbf{w} \in W} \inf_{\vartheta \in H} \sum_{i=1}^m w_i I(\theta_i, \vartheta_i) \\ &= \sup_{\mathbf{w} \in W} \min_{1 \leq k \leq m-1} \sum_{i=1}^m w_i I(\theta_i, \vartheta_i^{(k)}). \end{aligned}$$

Принимая во внимание определение вектора $\vartheta^{(k)}$ и применяя тождество $I(u, u) \equiv 0$, получаем

$$G(\theta, \Delta) \leq \sup_{\mathbf{w} \in W} \min_{1 \leq k \leq m-1} b_k(w_m, w_k), \quad (4)$$

где

$$b_k(w_m, w_k) = w_k I(\theta_k, r_{\Delta}^{-1}(r_t(\theta_m))) + w_m I(\theta_m, r_t(\theta_m)).$$

(ii) Будет показано, что супремум по единичному симплексу W достигается на векторе $\mathbf{w}$, первые $m-1$ компонент которого связаны соотношениями $b(w_m, w_1) = \dots = b(w_m, w_{m-1})$.

Из (4) следует, что

$$G(\theta, \Delta) \leq \sup_{w_m \in [0;1]} g(w_m), \quad (5)$$

где

$$g(w_m) = \sup_{(w_1, \dots, w_{m-1}) \in W_1(w_m)} \min_{1 \leq k \leq m-1} b_k(w_m, w_k)$$

и

$$W_1(w_m) = \left\{ (w_1, \dots, w_{m-1}) \in [0;1]^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} w_i = 1 - w_m \right\}.$$

Найдем значение $g(w_m)$ при каждом фиксированном $w_m \in [0;1]$. Заметим, что $b_k(w_m, w_k)$ — строго возрастающая по w_k функция, что легко увидеть из ее определения и неравенства (3).

Если в лемме 1 положить $f_i(x_i) = b_i(w_m, x_i)$ и $y = 1 - w_m$, то из утверждения леммы будет следовать существование вектора $(w_1^*, \dots, w_{m-1}^*) \in W_1(w_m)$, на котором достигается супремум в выражении для $g(w_m)$:

$$g(w_m) = \min_{1 \leq k \leq m-1} b_k(w_m, w_k^*),$$

причем

$$b_1(w_m, w_1^*) = \dots = b_{m-1}(w_m, w_{m-1}^*). \quad (6)$$

Пусть $\lambda = b_1(w_m, w_1^*)$. Тогда из определения $b_k(w_m, w_k^*)$ и равенств (6) получаем

$$w_k^* I(\theta_k, r_{\Delta}^{-1}(r_t(\theta_m))) + w_m I(\theta_m, r_t(\theta_m)) = \lambda, \quad 1 \leq k \leq m-1,$$

откуда следует, что

$$w_k^* = \frac{\lambda - w_m I(\theta_m, r_t(\theta_m))}{I(\theta_k, r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)))}. \quad (7)$$

(iii) Осталось найти супремум по w_m . Так как $(w_1^*, \dots, w_{m-1}^*) \in W_1$, то по определению W_1 величины $w_1^*, \dots, w_{m-1}^*$ должны удовлетворять равенству

$$\sum_{i=1}^{m-1} w_i^* = 1 - w_m. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (8) и разрешая получившееся уравнение относительно λ , находим, что

$$\lambda = V + (I(\theta_m, r_t(\theta_m)) - V)w_m,$$

где

$$V = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{I(\theta_i, r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)))} \right)^{-1} > 0.$$

Из определения $g(w_m)$ и равенств (6) следует равенство

$$g(w_m) = \lambda = V + (I(\theta_m, r_t(\theta_m)) - V)w_m.$$

Условие (2) можно представить в виде

$$I(\theta_m, r_t(\theta_m)) - V < 0,$$

откуда следует невозрастание функции $g(w_m)$ по w_m . Поэтому верно равенство

$$\sup_{w_m \in [0;1]} g(w_m) = g(0) = V.$$

Подставляя его в (5), получаем требуемое утверждение. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. В теореме 1 желательно выбирать t как можно большим, так как с ростом t увеличивается и точность оценки.

Полученная в теореме 1 нижняя граница в общем случае является менее точной, чем исходная граница (1). Однако при определенных условиях на значения параметров и распределение популяций эти границы совпадают, что утверждает следующее предложение.

Предложение 1. Пусть выполняются условия теоремы 1 и

- (i) $\theta_1 = \dots = \theta_{m-1}$;
- (ii) $[r_\Delta(\theta_1); r_\Delta^{-1}(\theta_m)] \subseteq \Theta$;
- (iii) выполняется более сильный вариант условия (2) теоремы 1:

$$(m-1)I(\theta_m, r_t(\theta_m)) = I(\theta_1, r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)));$$

(iv) существует значение $w^* \in [0; 1]$ такое, что

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} \left(\frac{1 - w^*}{m - 1} I(\theta_1, r_{\Delta}^{-1}(\vartheta)) + w^* I(\theta_m, \vartheta) \right) = I(\theta_m, r_t(\theta_m)).$$

Тогда имеет место равенство

$$\frac{\omega(\alpha, \alpha)}{G(\boldsymbol{\theta}, \Delta)} = \frac{\omega(\alpha, \alpha)}{I(\theta_m, r_t(\theta_m))}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что выполняется неравенство

$$G(\boldsymbol{\theta}, \Delta) \leq I(\theta_m, r_t(\theta_m)).$$

В самом деле, оно является следствием теоремы 1, согласно которой

$$G(\boldsymbol{\theta}, \Delta) \leq \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{I(\theta_i, r_{\Delta}^{-1}(r_t(\theta_m)))} \right)^{-1},$$

откуда, учитывая условия (i) и (iii) предложения, получаем требуемое неравенство:

$$G(\boldsymbol{\theta}, \Delta) \leq \frac{1}{m - 1} I(\theta_1, r_{\Delta}^{-1}(r_t(\theta_m))) = I(\theta_m, r_t(\theta_m)).$$

Покажем теперь, что

$$G(\boldsymbol{\theta}, \Delta) \geq I(\theta_m, r_t(\theta_m)).$$

Пусть $W_0 = W \cap \{w_1 = \dots = w_{m-1} = (1 - w_m)/(m - 1)\}$. Беря в выражении для $G(\boldsymbol{\theta}, \Delta)$ супремум по более узкому, чем W , множеству W_0 , получаем оценку снизу:

$$G(\boldsymbol{\theta}, \Delta) \geq \sup_{\mathbf{w} \in W_0} \inf_{\boldsymbol{\vartheta} \in B_{\Delta}(\boldsymbol{\theta})} a(w_m, \boldsymbol{\vartheta}) = \sup_{w_m \in [0; 1]} \inf_{\boldsymbol{\vartheta} \in B_{\Delta}(\boldsymbol{\theta})} a(w_m, \boldsymbol{\vartheta}), \quad (9)$$

где

$$a(w_m, \boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1 - w_m}{m - 1} \sum_{i=1}^{m-1} I(\theta_i, \vartheta_i) + w_m I(\theta_m, \vartheta_m).$$

По определению множества $B_{\Delta}(\boldsymbol{\theta})$ векторы $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m) (\in B_{\Delta}(\boldsymbol{\theta}))$ таковы, что $\vartheta_m \neq \vartheta_{[m]}$ и $\vartheta_{[m-1]} < \vartheta_{[m]}$, т.е. ϑ_m не является максимальным и существует ровно один максимальный элемент. Поэтому из (9) следует неравенство

$$G(\boldsymbol{\theta}, \Delta) \geq \sup_{w_m \in [0; 1]} \min_{1 \leq k \leq m-1} \inf_{\boldsymbol{\vartheta} \in B_{\Delta}(\boldsymbol{\theta}) \cap \{\vartheta_k = \vartheta_{[m]}\}} a(w_m, \boldsymbol{\vartheta}). \quad (10)$$

Так как $\theta_1 = \dots = \theta_{m-1}$, то нетрудно видеть, что

$$\inf_{\vartheta \in B_\Delta(\theta) \cap \{\vartheta_i = \vartheta_{[m]}\}} a(w_m, \vartheta) = \inf_{\vartheta \in B_\Delta(\theta) \cap \{\vartheta_j = \vartheta_{[m]}\}} a(w_m, \vartheta), \quad 1 \leq i, j \leq m-1.$$

Таким образом, в (10) вместо взятия минимума по k достаточно выбрать, например, $k = 1$, так что

$$G(\theta, \Delta) \geq \sup_{w_m \in [0;1]} \inf_{\vartheta \in B_\Delta(\theta) \cap \{\vartheta_1 = \vartheta_{[m]}\}} a(w_m, \vartheta). \quad (11)$$

Пусть

$$A = \left\{ (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m) : \vartheta_m \in [r_\Delta(\theta_1); \theta_m], \vartheta_1 = r_\Delta^{-1}(\vartheta_m), \right. \\ \left. \vartheta_i = \min\{\theta_1, \vartheta_m\}, \quad 2 \leq i \leq m-1 \right\}.$$

Если $\vartheta \in A$, то из условия (ii) следует, что $\vartheta \in \Theta_\Delta$ и $D_\vartheta \cap D_\theta = \emptyset$, так как $D_\vartheta = \{1\}$, а $D_\theta = \{m\}$. Следовательно, по определению $B_\Delta(\theta)$,

$$A \subseteq B_\Delta(\theta) \cap \{\vartheta_1 = \vartheta_{[m]}\}.$$

С другой стороны, учитывая строгую монотонность различающей информации и условие (i), нетрудно показать, что

$$\inf_{\vartheta \in B_\Delta(\theta) \cap \{\vartheta_1 = \vartheta_{[m]}\}} a(w_m, \vartheta) = \inf_{\vartheta \in A} a(w_m, \vartheta). \quad (12)$$

Легко видеть, что если $\vartheta_1 = r_\Delta^{-1}(\vartheta_m)$, то (см. определение $a(w_m, \vartheta)$)

$$a(w_m, \vartheta) \geq \frac{1-w_m}{m-1} I(\theta_1, r_\Delta^{-1}(\vartheta_m)) + w_m I(\theta_m, \vartheta_m).$$

Таким образом, по определению множества A , из (11) и (12) следует

$$G(\theta, \Delta) \geq \sup_{w_m \in [0;1]} \inf_{\vartheta_m \in \Theta} \left(\frac{1-w_m}{m-1} I(\theta_1, r_\Delta^{-1}(\vartheta_m)) + w_m I(\theta_m, \vartheta_m) \right).$$

Отсюда и из условия (iv) получаем

$$G(\theta, \Delta) \geq I(\theta_m, r_t(\theta_m)),$$

что и требовалось доказать. Предложение 1 доказано.

Несложно показать, что верно следующее утверждение.

Предложение 2. Условие (iv) предложения 1 выполняется автоматически, если выполняется одно из следующих дополнительных условий:

1) существует непрерывная функция $\vartheta(w)$ такая, что для любого $w \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} & \frac{1-w}{m-1} I(\theta_1, r_{\Delta}^{-1}(\vartheta(w))) + wI(\theta_m, \vartheta(w)) \\ &= \inf_{\vartheta \in \Theta} \left(\frac{1-w}{m-1} I(\theta_1, r_{\Delta}^{-1}(\vartheta)) + wI(\theta_m, \vartheta) \right); \end{aligned}$$

2) $I(\theta_1, x)$ выпукла по x на $[\theta_1; r_{\Delta}^{-1}(\theta_m)]$ и $I(\theta_m, x)$ выпукла по x на $[r_{\Delta}(\theta_1); \theta_m]$.

Пример 1 (нижние границы для нормальной модели). Пусть $\xi_i \sim \mathcal{N}(\theta_i, \sigma^2)$ с некоторой известной дисперсией σ^2 . Целью отбора будет нахождение популяции с наибольшим значением параметра $\theta_i \in \Theta = \mathbf{R}$. Определим функцию $r_{\Delta}(\theta) = \theta - \Delta$, чему соответствует

$$\Theta_{\Delta} = \{\theta \in \Theta^m: \theta_m - \theta_{m-1} \geq \Delta\}.$$

Для нормальной модели различающая информация принимает вид

$$I(\theta_i, \vartheta_i) = \frac{(\theta_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}.$$

Предложение 3. Справедлива оценка:

$$\mathbf{E}_{\theta} \nu \geq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2\sigma^2 \omega(\alpha, \alpha)}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2},$$

где $t = (\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta) / (\sqrt{m-1} + 1)$.

Доказательство. Подставляя в условие (2) теоремы 1 выражение для различающей информации нормальной модели и учитывая, что $r_t(\theta) = \theta - t$, $r_{\Delta}^{-1}(\theta) = \theta + \Delta$, получаем условие на t :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{I(\theta_m, r_t(\theta_m))}{I(\theta_i, r_{\Delta}^{-1}(r_t(\theta_m)))} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{t^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2} \leq 1.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{t^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2} \leq \frac{(m-1)t^2}{(\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta - t)^2}. \quad (13)$$

Найдем $t^* \in [0; \theta_m - \theta_{m-1}]$. Из условия

$$\frac{(m-1)t^{*2}}{(\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta - t^*)^2} = 1$$

получаем

$$t^* = \frac{\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta}{\sqrt{m-1} + 1}.$$

Покажем, что для t^* выполняется также условие (3). Так как $\sqrt{m-1} + 1 \geq 2$ и $\Delta \leq \theta_m - \theta_{m-1}$, то

$$t^* \leq \frac{2(\theta_m - \theta_{m-1})}{2} = \theta_m - \theta_{m-1}.$$

Из (13) и определения t^* следует, что

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{t^{*2}}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t^*)^2} \leq 1.$$

Следовательно, полученное t^* удовлетворяет условиям теоремы 1 и доказываемое неравенство верно. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. При выполнении условий предложения 3 и при дополнительном условии $\theta_1 = \dots = \theta_{m-1}$ имеет место равенство

$$G(\theta, \Delta) = \frac{1}{2\sigma^2(\sqrt{m-1} + 1)^2} (\theta_m - \theta_1 + \Delta)^2.$$

Доказательство. Сразу заметим, что это предложение является следствием предложения 1 для рассматриваемой нормальной модели. Поэтому достаточно показать, что условия предложения 1 выполняются.

То, что выполняются условия теоремы 1, было показано в предложении 3. Выполнение условий (i) и (ii) очевидно. Выполнение условия (iv) следует из предложения 2 и того факта, что для нормальной модели информация $I(u, v)$ выпукла по v при фиксированном u .

Условие (iii) для нормальной модели имеет вид

$$(m-1)t^2 = (\theta_m - \theta_1 + \Delta - t)^2,$$

откуда следует, что

$$t = \frac{\theta_m - \theta_1 + \Delta}{\sqrt{m-1} + 1}.$$

Так как по условию $\theta_{m-1} = \theta_1$, то t в условии (iii) совпадает со значением t в предложении 3, следовательно, условие (iii) выполняется.

Таким образом, все условия предложения 1 выполнены, так что

$$G(\theta, \Delta) = \frac{1}{m-1} I(\theta_m, r_t(\theta_m)).$$

Переписывая это равенство для нормальной модели, приходим к равенству

$$G(\theta, \Delta) = t^2 = \frac{1}{2\sigma^2(\sqrt{m-1} + 1)^2} (\theta_m - \theta_1 + \Delta)^2.$$

Предложение 4 доказано.

Лемма 2. *Обозначим*

$$t = \frac{\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta}{\sqrt{m-1} + 1}.$$

Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2}{(\sqrt{m-1}(\theta_m - \theta_i + \Delta) + \theta_{m-1} - \theta_i)^2}. \quad (14)$$

Пусть существует константа C такая, что $\theta_m - \theta_1 < C$ при любом m . Тогда

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2} \sim \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta_m - \theta_i + \Delta)^2} \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Равенство (14) получается подстановкой в его левую часть выражения для t и выполнением несложных преобразований.

Докажем справедливость формулы (15). Для этого применим к левой части (15) равенство (14) и вынесем в знаменателе множитель $\sqrt{m-1}$ за скобки:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2} \\ &= \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{((\theta_m - \theta_i + \Delta) + (\theta_{m-1} - \theta_i)/\sqrt{m-1})^2}, \end{aligned}$$

откуда, составляя локальный ряд Тейлора, легко получаем требуемый результат. Лемма 2 доказана.

Предложение 5. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{\theta \in \Theta_\Delta} \mathbf{E}_\theta \nu \geq \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2 \omega(\alpha, \alpha)}{2\Delta^2} \sigma^2.$$

Доказательство. Применяя предложение 3 и равенство (14) леммы 2, получаем

$$\mathbf{E}_\theta \nu \geq 2\sigma^2 \omega(\alpha, \alpha) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2}{(\sqrt{m-1}(\theta_m - \theta_i + \Delta) + \theta_{m-1} - \theta_i)^2}.$$

Если положить $\theta = (0, \dots, 0, \Delta)$ — наихудший для отбора случай, то требуемое утверждение становится очевидным. Предложение 5 доказано.

Пример 2 (нижние границы для показательной модели). Пусть $\xi_i \sim E(\theta_i)$ с функцией плотности

$$f(x|\theta_i) = \frac{1}{\theta_i} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_i} x \right\}, \quad x \geq 0.$$

Целью отбора является нахождение популяции с наибольшим значением параметра $\theta_i \in \Theta$, $\Theta = (0, +\infty)$. Введем функцию $r_\Delta(\theta) = (1 - \Delta)\theta$, чему соответствует $\Theta_\Delta = \{\theta \in \Theta^m: \theta_{m-1}/\theta_m \leq 1 - \Delta\}$.

Для показательной модели различающая информация имеет вид

$$I(u, v) = \frac{u}{v} - \ln \frac{u}{v} - 1.$$

Лемма 3. Функция $f(x) = x - \ln x$, $x > 0$, строго убывает на $(0; 1)$, строго возрастает на $(1; +\infty)$ и $\min_x f(x) = f(1) = 1$.

Предложение 6. Имеет место оценка

$$\mathbf{E}_{\theta} \nu \geq 2\sigma^2 \omega(\alpha, \alpha) \sum_{i=1}^{m-1} \left[(1 - \Delta)s \frac{\theta_i}{\theta_m} - \ln \left((1 - \Delta)s \frac{\theta_i}{\theta_m} \right) - 1 \right]^{-1},$$

где

$$s = \frac{m - 2 - \ln((1 - \Delta)\theta_{m-1}/\theta_m)}{m - 1 - (1 - \Delta)\theta_{m-1}/\theta_m}.$$

Доказательство. Условие (2) теоремы 1 для рассматриваемой показательной модели принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{1-t} - \ln \frac{1}{1-t} - 1 \right) \left(\frac{1-\Delta}{1-t} \frac{\theta_i}{\theta_m} - \ln \left(\frac{1-\Delta}{1-t} \frac{\theta_i}{\theta_m} \right) - 1 \right)^{-1} \leq 1.$$

Пусть $s = (1 - t)^{-1}$. Тогда это условие можно представить как

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{s - \ln s - 1}{a(\theta_i)} \leq 1, \quad (16)$$

где

$$a(\vartheta) = (1 - \Delta)s \frac{\vartheta}{\theta_m} - \ln \left((1 - \Delta)s \frac{\vartheta}{\theta_m} \right) - 1.$$

Условие (3) теоремы 1 принимает вид $s \leq \theta_m/\theta_{m-1}$. Если предположить, что

$$1 \leq s \leq \frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}, \quad (17)$$

то тогда справедливо неравенство $a(\theta_{m-1}) \leq a(\theta_i)$, $1 \leq i \leq m - 1$, ибо $a'(\vartheta) \leq 0$ при $\vartheta \in (0; \theta_{m-1}]$, так что $a(\vartheta)$ не возрастает на $(0; \theta_{m-1}]$.

Таким образом, для левой части (16) справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{s - \ln s - 1}{a(\theta_i)} \leq \frac{(m-1)s - \ln s - (m-1)}{a(\theta_{m-1})}. \quad (18)$$

Найдем значение s из равенства

$$\frac{(m-1)s - \ln s - (m-1)}{a(\theta_{m-1})} = 1.$$

Очевидно, что

$$s = \frac{m-2 - \ln((1-\Delta)\theta_{m-1}/\theta_m)}{m-1 - (1-\Delta)\theta_{m-1}/\theta_m}. \quad (19)$$

Из (18) следует, что для полученного значения s выполняется условие (16). Осталось показать, что s из (19) удовлетворяет предположению (17).

Докажем, что $s \geq 1$. Для этого найдем знак разности числителя и знаменателя правой части (19):

$$\begin{aligned} & \left(m-2 - \ln \left((1-\Delta) \frac{\theta_{m-1}}{\theta_m} \right) \right) - \left(m-1 - (1-\Delta) \frac{\theta_{m-1}}{\theta_m} \right) \\ &= (1-\Delta) \frac{\theta_{m-1}}{\theta_m} - \ln \left((1-\Delta) \frac{\theta_{m-1}}{\theta_m} \right) - 1 \geq 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

(см. лемму 3). Это доказывает, что $s \geq 1$.

Покажем, что для полученного s справедливо $s \leq \theta_m/\theta_{m-1}$, т.е.

$$\frac{m-2 - \ln(1-\Delta) + \ln(\theta_m/\theta_{m-1})}{(m-1)\theta_m/\theta_{m-1} - (1-\Delta)} \leq 1. \quad (20)$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что разность знаменателя и числителя неотрицательна. Имеем

$$\begin{aligned} & \left((m-1) \frac{\theta_m}{\theta_{m-1}} - (1-\Delta) \right) - \left((m-2) - \ln(1-\Delta) + \ln \frac{\theta_m}{\theta_{m-1}} \right) \\ & \geq -(1-\Delta) + \ln(1-\Delta) + \left(\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}} - \ln \frac{\theta_m}{\theta_{m-1}} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $\theta_m/\theta_{m-1} \geq (1-\Delta)^{-1} > 1$, то по лемме 3

$$\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}} - \ln \frac{\theta_m}{\theta_{m-1}} \geq \frac{1}{1-\Delta} + \ln(1-\Delta),$$

поэтому правая часть (21) не меньше

$$\Delta \frac{2-\Delta}{1-\Delta} + 2\ln(1-\Delta).$$

Это выражение не убывает по Δ на $[0; 1)$, откуда следует неотрицательность правой части (21), что и устанавливает справедливость (20).

Итак, $t = 1 - s^{-1}$ с s из (19) удовлетворяет условиям теоремы 1, откуда непосредственно следует утверждение предложения 6.

3. Эффективность процедур отбора для нормальной модели. Исследуем асимптотическую ($\alpha \rightarrow 0$) эффективность процедур отбора в нормальной модели с общей известной дисперсией. Под асимптотической эффективностью будем понимать величину

$$\mathcal{E}(\theta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\inf_{\psi \in H(\alpha)} \mathbf{E}_{\theta} \nu_{\psi}}{\mathbf{E}_{\theta} \nu_{\varphi}}, \quad (22)$$

где φ — процедура отбора, эффективность которой рассматривается, а $H(\alpha)$ — множество всех процедур, вероятность корректного отбора в которых не меньше $1 - \alpha$ для любого $\theta \in \Theta_{\Delta}$.

Сразу заметим, что для нормальной модели наилучшим для отбора случаем является ситуация, когда $\theta_1 = \dots = \theta_{m-1} = \theta_m - \Delta$, т.е. когда популяции настолько похожи, насколько это возможно в рамках параметрического пространства с зоной безразличия.

Очевидно, что выполняется следующая лемма.

Лемма 4. Верна асимптотическая формула $\omega(\alpha, \alpha) = -\ln \alpha + o(1)$, $\alpha \rightarrow 0$.

Рассмотрим эффективность нескольких процедур отбора.

3.1. Процедура Бекхофера с фиксированным числом наблюдений (см. [8]). Это процедура отбирает в качестве наилучшей ту популяцию, выборочное среднее которой наибольшее. Для этой процедуры объем выборки не является случайной величиной и совпадает с необходимым объемом выборки n_{α} (а значит, и $\mathbf{E}_{\theta} \nu = n_{\alpha}$). Для необходимого объема выборки процедуры Бекхофера верна асимптотическая ($\alpha \rightarrow 0$) формула (см. [8]):

$$n_{\alpha} = -\frac{4m\sigma^2}{\Delta^2} \ln \alpha (1 + O(1)), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (23)$$

Теорема 2. Для асимптотической эффективности процедуры отбора Бекхофера с фиксированным числом наблюдений верны соотношения

$$\mathcal{E}(\theta) \geq \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}, \quad t = \frac{\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta}{\sqrt{m-1} + 1}, \quad (24)$$

и

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\Delta}} \mathcal{E}(\theta) \geq \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2}{8m}. \quad (25)$$

Доказательство. Пусть в (22) φ — процедура Бекхофера.

Для оценки снизу величины $\inf_{\psi \in H(\alpha)} \mathbf{E}_{\theta} \nu_{\psi}$ из (22) воспользуемся неравенством предложения 3:

$$\inf_{\psi \in H(\alpha)} \mathbf{E}_{\theta} \nu_{\psi} \geq \omega(\alpha, \alpha) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2\sigma^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}.$$

Из леммы 4 следует, что

$$\inf_{\psi \in H(\alpha)} \mathbf{E}_{\theta} \nu_{\psi} \geq (-\ln \alpha + O(1)) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2\sigma^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Подставляя эту оценку и (23) в (22), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta) &\geq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\ln \alpha + O(1)}{-4m\sigma^2 \ln \alpha (1 + O(1))} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2\sigma^2 \Delta^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}, \end{aligned}$$

и первое неравенство теоремы доказано.

Пусть $\theta^* = (0, \dots, 0, \Delta)$. Из (24) следует, что

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\Delta}} \mathcal{E}(\theta) \geq \mathcal{E}(\theta^*) \geq \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta^2}{(2\Delta - t)^2}, \quad \text{где } t = \frac{2\Delta}{\sqrt{m-1} + 1},$$

откуда, произведя тривиальные преобразования, получаем (25). Теорема 2 доказана.

3.2. Последовательная процедура Бекхофера (см. [8]). Эта процедура отбора является развитием идей процедуры Бекхофера с фиксированным числом наблюдений. В то же время она обладает достаточно простым управлением: на каждом шаге наблюдается по одному значению из каждой популяции и после этого решается вопрос об остановке или продолжении эксперимента. Для среднего объема выборки последовательной процедуры Бекхофера верна асимптотическая ($\alpha \rightarrow 0$) формула (см. [8]):

$$\mathbf{E}_{\theta} \nu = -\frac{m\sigma^2}{\Delta(\theta_m - \theta_{m-1})} \ln \alpha (1 + O(1)), \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Заметим, что эта формула зависит лишь от разности между наибольшим и вторым по величине значениями параметра θ — в наших обозначениях θ_m и θ_{m-1} . Связано это с уже упомянутой выше простотой управления этой последовательной процедуры.

Теорема 3. Для асимптотической эффективности последовательного варианта процедуры отбора Бекхофера верны соотношения

$$\mathcal{E}(\theta) \geq \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta(\theta_m - \theta_{m-1})}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}, \quad t = \frac{\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta}{\sqrt{m-1} + 1},$$

и

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\Delta}} \mathcal{E}(\theta) \geq \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2}{2m}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

3.3. Процедура Као–Лая (см. [7]). Основная идея этой процедуры состоит в последовательном исключении тех популяций, которые с малой вероятностью являются лучшими по результатам уже сделанных наблюдений. Такой подход позволяет сократить количество наблюдений, когда значения параметров в популяциях сильно отличаются друг от друга. Для среднего объема выборки последовательной процедуры Као–Лая верна асимптотическая формула при $\alpha \rightarrow 0$ (см. [7]):

$$\mathbf{E}_{\theta} \nu = - \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{4\sigma^2}{(\Delta + \theta_m - \theta_i)^2} + \frac{4\sigma^2}{(\Delta + \theta_m - \theta_{m-1})^2} \right) \ln \alpha (1 + O(1)).$$

Теорема 4. Для асимптотической эффективности последовательной процедуры отбора Као–Лая верны соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta) \geq & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2} \\ & \times \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\Delta + \theta_m - \theta_i)^2} + \frac{1}{(\Delta + \theta_m - \theta_{m-1})^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $t = (\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta) / (\sqrt{m-1} + 1)$, и

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\Delta}} \mathcal{E}(\theta) \geq \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2}{2m}.$$

Пусть существует константа C такая, что $\theta_m - \theta_1 < C$ при любом m . Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta_{\Delta}} \mathcal{E}(\theta) \geq \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Доказательство. Первая часть теоремы доказывается по аналогии с теоремой 2.

Неравенство (26) аналогичным образом следует из соотношения (15) леммы 2. Теорема 4 доказана.

Итак, последовательная процедура Бекхофера оказалась асимптотически эффективной при $m = 2$ в наихудшем для отбора случае (т.е. когда $\theta_1 = \theta_2 - \Delta$). Это показывает также, что полученная нижняя граница для нормальной модели с $m = 2$ точна, несмотря на вводимые при ее выводе огрубления. При увеличении m максимальная асимптотическая эффективность процедуры Бекхофера падает вплоть до $1/2$. Максимальная асимптотическая эффективность процедуры Бекхофера с фиксированным числом наблюдений в 4 и более раз меньше, чем у ее последовательного варианта. Заметим, что минимальная асимптотическая эффективность обеих процедур равна нулю при любом m .

Максимальная асимптотическая эффективность процедуры Као–Лай оказалась такой же, как и у последовательной процедуры Бекхофера. Однако при этом процедура Као–Лай эффективнее, когда распределения популяций сильно различаются между собой. В частности, при некоторых условиях, если рассматривать случай $m \rightarrow \infty$, минимальная асимптотическая эффективность процедуры Као–Лай стремится к $1/2$ при любых соотношениях между значениями параметра θ в популяциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Володин И. Н. Нижние границы для среднего объема выборки и эффективность процедур статистического вывода. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 1, с. 119–129.
2. Володин И. Н. Нижние границы для среднего объема выборки в критериях согласия и однородности. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 3, с. 637–645.
3. Володин И. Н. Нижние границы для среднего объема выборки в критериях инвариантности. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 2, с. 359–364.
4. Володин И. Н. Нижние границы для среднего объема выборки в процедурах с управлением. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 3, с. 630–631.
5. Малютков М. Б. Нижние границы для средней длительности последовательно планируемого эксперимента. — Изв. вузов, сер. матем., 1983, № 11, с. 19–41.
6. Новиков А. А. Эффективность процедур отбора. — Исслед. по прикл. матем., 1984, т. 11, № 2, с. 43–51.
7. Kao S. C., Lai T. L. Sequential selection procedures based on confidence sequences for normal populations. — Comm. Statist. A: Theory Methods, 1980, v. 9, № 16, p. 1657–1676.
8. Bechhofer R. E., Kiefer J., Sobel M. Sequential Identification and Ranking Procedures, with Special Reference to Koopman–Darmois Populations. Chicago: Univ. Chicago Press, 1968, 420 p.
9. Gupta S. S. Selection and ranking procedures: a brief introduction. — Comm. Statist. A: Theory Methods, 1977, v. 6, p. 993–1001.
10. Bechhofer R. E. A single-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with known variances. — Ann. Math. Statist., 1954, v. 25, p. 16–39.
11. Gupta S. S. On a decision rule for a problem in ranking means. — Ph.D. Thesis (Mimeo. Ser. № 150), Inst. of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill, NC, 1956.
12. Galtchouk L. I., Maljutov M. B. One bound for the mean duration of sequential testing homogeneity. — MODA 4 — Advances in Model-Oriented Data Analysis (Spetses, 1995). Heidelberg: Physica, 1995, p. 49–56.
13. Simons G. Lower bounds for average sample number of sequential multihypothesis tests. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1343–1364.

Поступила в редакцию
26.X.2011