Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колесников, Соболевская регулярность транспортировки вероятностных мер и транспортные неравенства, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 2, 296–321

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:46:55

© 2012 г.

КОЛЕСНИКОВ А. В.*

СОБОЛЕВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ ТРАНСПОРТИРОВКИ
ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И ТРАНСПОРТНЫЕ
НЕРАВЕНСТВА¹⁾

В работе изучаются соболевские априорные оценки для оптимальной транспортировки $T = \nabla \Phi$ вероятностных мер $\mu = e^{-V} dx$ и $\nu = e^{-W} dx$ на $\mathbf{R}^d$. В предположении равномерной выпуклости потенциала W в работе доказано, что величина $\int \|D^2 \Phi\|_{\text{HS}}^2 d\mu$, где $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ — норма Гильберта–Шмидта, ограничена информацией Фишера меры μ . Помимо этого доказаны близкие оценки для $L^p(\mu)$ -нормы $\|D^2 \Phi\|$ и получены L^p -обобщения известной теоремы Каффарелли о сжатии. Установлена связь между результатами настоящей статьи и транспортным неравенством Талагранна. Также доказаны не зависящие от размерности версии данного неравенства для информации Фишера относительно гауссовских мер.

Ключевые слова и фразы: задача Монжа–Канторовича, уравнение Монжа–Ампера, соболевские априорные оценки, гауссовские меры, логарифмически вогнутые меры, транспортные неравенства, логарифмическое неравенство Соболева, липшицевы отображения.

1. Введение. Пусть $\mu = e^{-V} dx$ и $\nu = e^{-W} dx$ — вероятностные меры на $\mathbf{R}^d$ и $T = \nabla \Phi$ — оптимальное транспортное отображение, причем мера ν является образом μ относительно T : $\nu = \mu \circ T^{-1}$. Для краткости будем далее говорить, что T отображает μ в ν . Соответствующий выпуклый потенциал обозначен через Φ . Для ознакомления с теорией оптимальной транспортировки мы рекомендуем читателю книгу [24].

Предполагая, что W — равномерно выпуклая функция ($D^2 W \geq K \cdot I$, $K > 0$), мы доказываем, что

$$\mathcal{I}_\mu := \int |\nabla V|^2 d\mu \geq K \int \|D^2 \Phi\|_{\text{HS}}^2 d\mu. \quad (1.1)$$

*Высшая школа экономики, ул. Мясницкая, 20, 101000 Москва, Россия; e-mail: sascha7@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ 10-01-00518, 11-01-90421-Укр-ф-а, гранта DAAD (2010) и проекта SFB701 университета Билефельда. В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 11-01-0175, реализованного в рамках программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012–2013 гг.

Более общим образом, в работе показано, что для любого единичного вектора $e \in \mathbf{R}^d$ и $p \geq 1$ выполнено неравенство

$$\frac{p+1}{2} \|V_e^2\|_{L^p(\mu)} \geq K \|\Phi_{ee}^2\|_{L^p(\mu)}. \quad (1.2)$$

Этот результат можно рассматривать как (глобальную, не зависящую от размерности) соболевскую априорную оценку для уравнения Монжа–Ампера

$$e^{-V} = e^{-W(\nabla\Phi)} \det D^2\Phi.$$

Теория регулярности для оператора Монжа–Ампера имеет длинную историю. Много известных ученых внесли вклад в ее создание. С ней можно познакомиться по книге [11] (см. также [25], [33], [9], [5], [15]). В частности, соболевские оценки для оптимальной транспортировки были получены Л. Каффарелли в [3]. Самые последние результаты в этом направлении касаются гёльдеровской регулярности транспортных отображений на многообразиях (см. работы [22], [17], [7], [13] и ссылки в них).

Подход, используемый в настоящей работе, является по существу вероятностным. Полученные здесь оценки: 1) не зависят от размерности, 2) являются глобальными, 3) могут быть получены конструктивным путем с помощью интегрирования по частям и так называемого касательного формализма. В работе используется техника, близкая работам Н. М. Ивочкиной (см., например, [30]). Несмотря на обилие результатов, единственная ранее известная не зависящая от размерности глобальная оценка была доказана Л. Каффарелли (теорема Каффарелли о сжатии) [4]. Согласно этому результату, каждая оптимальная транспортировка T , отображающая стандартную гауссовскую меру в логарифмически вогнутую меру ν с равномерно выпуклым потенциалом W (т.е. $D^2W \geq K \cdot I$ с $K > 0$) является $1/\sqrt{K}$ -сжатием (т.е. $\|T\|_{\text{Lip}} \leq 1/\sqrt{K}$).

Теорема о сжатии приобрела большую популярность среди специалистов по теории вероятностей в силу своих замечательных аналитических следствий (таких, например, как теорема Бакри–Леду, вероятностная версия теоремы сравнения Леви–Громова). Некоторые недавние обобщения этой теоремы можно найти в работах [31], [12], [23]. Другими возможными приложениями являются оценки типа Соболева, изопериметрические неравенства и т.д. Заметим, что в силу недавнего наблюдения Э. Мильмана (см. [19], [20]) даже более слабых L^p -оценок для $\|D^2\Phi\|$ достаточно для доказательства результатов подобного рода, если мера образ логарифмически вогнута.

Заметим также (это, впрочем, не является целью статьи), что таким же способом можно установить соболевские оценки для производных третьего порядка. Полученные в работе оценки основаны на следующем

(формальном) равенстве:

$$\int V_{x_i}^2 d\mu = \int \langle D^2\Phi \cdot D^2W(\nabla\Phi) \cdot D^2\Phi \cdot e_i, e_i \rangle d\mu + \int \|(D^2\Phi)^{-1/2} D^2\Phi_{x_i} (D^2\Phi)^{-1/2}\|_{\text{HS}}^2 d\mu.$$

В частности, если функция Φ достаточно гладкая и $D^2W \geq K \cdot I$, $K > 0$, то это равенство влечет (1.1) и следующую оценку на производные Φ третьего порядка:

$$\int |\nabla V|^2 d\mu \geq 2\sqrt{K} \int \left[\sum_{i=1}^d \|D^2\Phi_{x_i}\|_{\text{HS}}^2 \right]^{1/2} d\mu.$$

Настоящая работа также мотивирована другим известным результатом из теории вероятностей. А именно, оценка (1.1) весьма похожа на известное неравенство Талаграна (см. [21]), которое является классическим представителем так называемых транспортных неравенств (см. обзоры [16], [10]), близких к различным функциональным неравенствам (концентрации, Соболева, изопериметрическим и т.д.). Пусть γ — стандартная гауссовская мера. Рассмотрим оптимальную транспортировку $\nabla\Phi$ меры $g \cdot \gamma$ в γ . Тогда верна следующая оценка (транспортное неравенство, или неравенство Талаграна):

$$\text{Ent}_\gamma g \geq \frac{1}{2} W_2^2(\gamma, g \cdot \gamma), \quad (1.3)$$

где величины

$$\text{Ent}_\gamma g = \int g \ln g d\gamma \quad \text{и} \quad W_2(\gamma, g \cdot \gamma) = \left(\int |x - \nabla\Phi(x)|^2 g d\gamma \right)^{1/2}$$

называются энтропией и расстоянием Канторовича.

Напомним, что неравенство Талаграна следует из так называемого свойства переносной выпуклости («displacement convexity») для функционала энтропии (см. [1], [24]). Заметим, что функционалы энергии (информация Фишера и т.д.), в отличие от энтропийных функционалов, не являются переносно выпуклыми. Тем не менее в п. 4 мы показываем, что между (1.1) и (1.3) существует прямая связь. Сначала мы доказываем неравенство

$$\int (V(x+e) - V(x)) d\mu \geq \frac{K}{2} \int |\nabla\Phi(x+e) - \nabla\Phi(x)|^2 d\mu, \quad (1.4)$$

где $e \in \mathbf{R}^d$. Оказывается, (1.4) можно рассматривать как версию обобщенного неравенства типа Талаграна (см. [14]). Далее мы показываем, что (1.1) следует из (1.4) при подходящем предельном переходе.

В п. 5 мы доказываем не зависящие от размерности оценки типа (1.1). Например, если $\mu = g \cdot \gamma$ (с гладкой плотностью g) и $\nu = \gamma$, то

$$\begin{aligned} I_\gamma g &= 2 \operatorname{Ent}_\gamma g - 2 \int \ln[\det_2(D^2\Phi - I)] g d\gamma \\ &\quad + \int \|D^2\Phi - I\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma + \sum_{k=1}^d \int \operatorname{Tr}[(D^2\Phi)^{-1} D^2\Phi_{x_k}]^2 g d\gamma, \end{aligned}$$

где $I_\gamma g = \int (|\nabla g|^2/g) d\gamma$ (относительная информация), $\det_2(D^2\Phi - I) = \det D^2\Phi \cdot \exp(d - \Delta\Phi)$ (определитель Фредгольма–Карлемана матрицы $D^2\Phi - I$).

Заметим, что все слагаемые в правой части неотрицательны. В частности, это соотношение влечет за собой следующее усиление логарифмического неравенства Соболева:

$$I_\gamma g \geq 2 \operatorname{Ent}_\gamma g - \int \ln[\det_2((D^2\Phi)^2 - I)] g d\gamma$$

и следующий (существенно бесконечномерный) аналог оценки (1.1):

$$I_\gamma g \geq \int \|D^2\Phi - I\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma.$$

Заметим, что результат, сформулированный в такой форме, особенно похож на неравенство Талагранна; см. также замечание 5.3 ниже о единственности экстремалей для классического логарифмического неравенства Соболева. Далее мы доказываем несколько не зависящих от размерности результатов о логарифмически вогнутых мерах.

В п. 6 мы доказываем L^p -обобщения главного результата. В частности, доказано, что для любого единичного вектора e при $p \geq 1$ верны оценки

$$K \|\Phi_{ee}^2\|_{L^p(\mu)} \leq \|(V_{ee})_+\|_{L^p(\mu)}, \quad (1.5)$$

$$K \|\Phi_{ee}^2\|_{L^p(\mu)} \leq \frac{p+1}{2} \|V_e^2\|_{L^p(\mu)}. \quad (1.6)$$

Подчеркнем, что все упомянутые выше оценки можно получить без использования теории регулярности. Вместо нее мы применяем формулу замены переменных из [18] и касательный формализм. Заметим, что теорема о сжатии следует из оценки (1.5) (это в точности случай $p = \infty$). В п. 7 мы доказываем не зависящую от размерности оценку для операторной нормы $\|D^2\Phi\|$:

$$K \left(\int \|D^2\Phi\|^{2p} d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int \|(D^2V)_+\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Наконец, заметим, что некоторые из наших результатов выполнены не только для оптимальных транспортных отображений. Например, некоторые из этих оценок верны для так называемых треугольных отображений (см. [26], [27], [29], [32], а также п. 2).

Автор благодарит Л. Амброзио, М.-К. фон Ренессе, М. Леду, Э. Мильмана и Ф. Моргана за полезные дискуссии. Статья была частично написана в Берлинском техническом университете при поддержке Германской службы академических обменов (DAAD).

2. Идея доказательства. В этом пункте дано *формальное* вычисление основной формулы настоящей работы. Обоснование см. в пп. 3 и 4.

Всюду далее $\mathcal{J}_\mu$ обозначает информацию Фишера меры μ :

$$\mathcal{J}_\mu = \int |\nabla V|^2 d\mu,$$

а $\|A\|_{\text{HS}} = \sqrt{\text{Tr}(A \cdot A^T)}$ — норму Гильберта–Шмидта матрицы A . Для операторной нормы будем использовать стандартное обозначение $\|\cdot\|$. Произвольный симметричный оператор A может быть записан единственным образом в виде $A = A^+ - A^-$, где A^+ и A^- — симметричные неотрицательные линейные операторы, причем $A^+A^- = A^-A^+ = 0$; оператор A^+ называется неотрицательной частью оператора A .

В дальнейшем предполагается, что $\mathcal{J}_\mu < \infty$ и меры μ и ν обладают вторым моментом. Последнее условие автоматически выполнено для ν , если $D^2W \geq K \cdot \text{I}$, $K > 0$.

Пусть T — отображение и ν — образ относительно μ . Предположим, что потенциалы V, W гладкие, а $T: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ — гладкий диффеоморфизм, удовлетворяющий условию $\det DT > 0$. По формуле замены переменных имеем

$$e^{-V} = e^{-W(T)} \det DT.$$

Логарифмируя это соотношение, получаем

$$V = W(T) - \ln \det DT. \quad (2.1)$$

Выберем единичный вектор e и продифференцируем (2.1) дважды вдоль e . С этой целью применим фундаментальное соотношение

$$\partial_e \ln \det DT = \text{Tr} [DT_e \cdot (DT)^{-1}].$$

Продифференцируем его один раз и применим тождество

$$DT_e \cdot (DT)^{-1} + DT \cdot [(DT)^{-1}]_e = 0.$$

В итоге получим

$$\partial_{ee} \ln \det DT = \text{Tr} [DT_{ee} \cdot (DT)^{-1}] - \text{Tr} [DT_e \cdot (DT)^{-1}]^2.$$

Возвращаясь к (2.1), получаем

$$\begin{aligned} V_e &= \langle \nabla W(T), T_e \rangle - \text{Tr} [DT_e \cdot (DT)^{-1}], \\ V_{ee} &= \langle D^2 W(T) \cdot T_e, T_e \rangle + \langle \nabla W(T), T_{ee} \rangle - \text{Tr} [DT_{ee} \cdot (DT)^{-1}] \\ &\quad + \text{Tr} [DT_e \cdot (DT)^{-1}]^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Проинтегрируем (2.2) относительно μ . Очевидно, что $\int V_{ee} d\mu = \int V_e^2 d\mu$.

Покажем, что интеграл от двух средних слагаемых в правой части (2.2) равен нулю. Действительно, положим $S = T^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \langle \nabla W(T), T_{ee} \rangle d\mu &= \int \langle \nabla W, T_{ee}(S) \rangle d\nu = \int \text{Tr} D[T_{ee}(S)] d\nu \\ &= \int \text{Tr} [DT_{ee}(S) \cdot DS] d\nu \\ &= \int \text{Tr} [DT_{ee}(S) \cdot (DT)^{-1}(S)] d\nu \\ &= \int \text{Tr} [DT_{ee} \cdot (DT)^{-1}] d\mu. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, получаем

$$\int V_e^2 d\mu = \int \langle D^2 W(T) \cdot DT \cdot e, DT \cdot e \rangle d\mu + \int \text{Tr} [DT_e \cdot (DT)^{-1}]^2 d\mu.$$

Нас интересуют два частных случая.

1. *Оптимальные транспортные отображения.* Оптимальные транспортные отображения имеют вид $T = \nabla \Phi$, где Φ — выпуклая функция. В этом случае имеем

$$\int V_{x_i}^2 d\mu = \int \langle D^2 \Phi \cdot D^2 W(\nabla \Phi) \cdot D^2 \Phi \cdot e_i, e_i \rangle d\mu + \int \text{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} D^2 \Phi_{x_i}]^2 d\mu. \quad (2.4)$$

Заметим, что последняя подынтегральная функция неотрицательна и допускает представление

$$\text{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} D^2 \Phi_{x_i}]^2 = \|(D^2 \Phi)^{-1/2} D^2 \Phi_{x_i} (D^2 \Phi)^{-1/2}\|_{\text{HS}}^2.$$

Суммируя по индексу i , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu &= \int \text{Tr} [D^2 \Phi \cdot D^2 W(\nabla \Phi) \cdot D^2 \Phi] d\mu \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int \|(D^2 \Phi)^{-1/2} D^2 \Phi_{x_i} (D^2 \Phi)^{-1/2}\|_{\text{HS}}^2 d\mu. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2. *Треугольные отображения.* Отображения такого типа имеют вид

$$T = (T_1(x_1), T_2(x_1, x_2), \dots, T_d(x_1, \dots, x_d)),$$

где каждая функция T_i является возрастающей по x_i . Легко проверить, что в этом случае

$$\int V_{x_i}^2 d\mu = \int \langle D^2 W(T) \cdot \partial_{x_i} T, \partial_{x_i} T \rangle d\mu + \sum_{k=i}^d \int \left(\frac{\partial_{x_i x_k} T_k}{\partial_{x_k} T_k} \right)^2 d\mu, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{J}_\mu = \int \text{Tr}[DT \cdot D^2 W(T) \cdot (DT)^*] d\mu + \sum_{k=1}^d \int |\nabla \ln \partial_{x_k} T_k|^2 d\mu. \quad (2.7)$$

3. Основной результат. Напомним, что функция W называется K -выпуклой (равномерно K -выпуклой), если функция

$$x \mapsto W(x) - \frac{K}{2} x^2 \quad (3.1)$$

является выпуклой для некоторого $K \geq 0$. Для гладкой функции W это эквивалентно условию $D^2 W \geq K \cdot \mathbf{I}$. Везде в настоящей работе мы имеем дело только со случаем $K > 0$.

Стандартным образом вводятся весовые соболевские пространства $W^{1,p}(\mu)$ и $W^{2,p}(\mu)$ (см. [27]). Говорят, что функция $f \in L^2(\mu)$ обладает соболевской производной $f_{x_i} \in L^1(\mu)$, если

$$\int f_{x_i} \xi d\mu = - \int f \xi_{x_i} d\mu + \int f V_{x_i} \xi d\mu$$

для всякой гладкой финитной функции ξ . Класс $W^{1,p}(\mu)$ состоит из всех функций f из $L^2(\mu)$, при $i = 1, \dots, d$ имеющих соболевские производные f_{x_i} из $L^2(\mu)$. С помощью вторых производных вводится класс $W^{2,p}(\mu)$.

Пусть f^+ обозначает функцию $\max\{f, 0\}$, а A^+ — неотрицательную часть симметричной матрицы A .

Теорема 3.1. *Предположим, что $\mathcal{J}_\mu < \infty$, мера μ обладает конечным вторым моментом и функция W является K -выпуклой для некоторого $K > 0$. Тогда $\Phi \in W^{2,2}(\mu)$ и*

$$\mathcal{J}_\mu \geq K \int \|D^2 \Phi\|_{\text{HS}}^2 d\mu. \quad (3.2)$$

Доказательство. Шаг 1 (V и W — гладкие). Предположим, кроме того, что V и W удовлетворяют следующим условиям:

- 1) V, W принадлежат $C^\infty(\mathbf{R}^d)$ и ограничены снизу;
- 2) $D^2 V \leq c \cdot \mathbf{I}$ для некоторого $c \in \mathbf{R}$.

В силу результатов Каффарелли о регулярности (см., например, теорему 4.14 в [24] и обоснования в [31, п. 4]), Φ — гладкая функция. Более того, используя аргументы Каффарелли, из 2) и равномерной выпуклости W можно извлечь, что

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \|D^2 \Phi(x)\| < C$$

для некоторого C (см., например, теорему 2.2 в [31] и независимое доказательство в п. 6).

Покажем, что (2.4) выполнено. Возьмем гладкую финитную функцию ξ . Умножим (2.2) на ξ и проинтегрируем по мере μ . Применяя формулу интегрирования по частям (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \int V_{x_i}^2 \xi d\mu &= \int \langle D^2 \Phi \cdot D^2 W(\nabla \Phi) \cdot D^2 \Phi \cdot e_i, e_i \rangle \xi d\mu \\ &\quad + \int \|(D^2 \Phi)^{-1/2} D^2 \Phi_{x_i} (D^2 \Phi)^{-1/2}\|_{\text{HS}}^2 \xi d\mu \\ &\quad + \int \partial_{x_i} \xi \cdot V_{x_i} d\mu + \int \langle \nabla \xi, (D^2 \Phi)^{-1} D^2 \Phi_{x_i} \cdot e_i \rangle d\mu. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Предположим, что ξ имеет вид $\xi = \eta(\nabla \Phi)$, где η — финитная функция. Имеем $\nabla \xi = D^2 \Phi \cdot \nabla \eta(\Phi)$. Используя равномерную оценку для $\|D^2 \Phi\|$, получаем

$$\left| \int \partial_{x_i} \xi \cdot V_{x_i} d\mu \right| \leq C \int |\nabla \eta(\nabla \Phi)| |V_{x_i}| d\mu \leq C \mathcal{J}_\mu^{1/2} \left(\int |\nabla \eta|^2 d\nu \right)^{1/2}.$$

Чтобы оценить последнее слагаемое в правой части (3.3), интегрируем по частям, что дает

$$\begin{aligned} \int \langle \nabla \xi, (D^2 \Phi)^{-1} D^2 \Phi_{x_i} \cdot e_i \rangle d\mu &= \int \langle \nabla \eta(\nabla \Phi), D^2 \Phi_{x_i} \cdot e_i \rangle d\mu \\ &= - \int \langle D^2 \eta(\nabla \Phi) D^2 \Phi \cdot e_i, D^2 \Phi \cdot e_i \rangle d\mu + \int \langle \nabla \eta(\nabla \Phi), D^2 \Phi \cdot e_i \rangle V_{x_i} d\mu. \end{aligned}$$

Это величина не превосходит

$$\begin{aligned} &C^2 \int \|D^2 \eta(\nabla \Phi)\| d\mu + C \int |\nabla \eta(\nabla \Phi)| |V_{x_i}| d\mu \\ &\leq C^2 \int \|D^2 \eta\| d\nu + C \mathcal{J}_\mu^{1/2} \left(\int |\nabla \eta|^2 d\nu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Выбирая такую последовательность гладких функций $\{\eta_n\}$, что $0 \leq \eta_n \leq 1$, $\eta_n \rightarrow 1$ равномерно на каждом компактном множестве и $|\nabla \eta_n|^2 \rightarrow 0$, $\|D^2 \eta_n\| \rightarrow 0$ в $L^1(\nu)$, мы получаем (2.4) (и, следовательно, (3.2)) для V , W удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Шаг 2 (W — гладкая функция). Зафиксируем гладкую, равномерно K -выпуклую функцию W и приблизим μ гладкими мерами. Выберем такую последовательность функций $\{V_n\}$, что каждая V_n удовлетворяет условиям 1) и 2). Кроме того, предположим, что $\sqrt{\rho_n} \rightarrow \sqrt{\rho}$ в $W^{1,2}(\mathbf{R}^d)$, каждая $\mu_n = \rho_n dx = e^{-V_n} dx$ является вероятностной мерой и $\sup_n \int |x|^2 d\mu_n < \infty$.

Существует подпоследовательность последовательности $\{\nabla \Phi_n\}$ (обозначим ее опять через $\{\nabla \Phi_n\}$) такая, что $\nabla \Phi_n \rightarrow \nabla \Phi$ почти всюду.

Действительно, пусть Ψ_n — последовательность выпуклых функций, сопряженных с Φ_n . Напомним, что отображения $\nabla\Phi_n$ и $\nabla\Psi_n$ взаимно обратны. Мы имеем

$$\sup_n \int |\nabla\Psi_n|^2 d\nu = \sup_n \int |x|^2 d\mu_n < \infty.$$

Без ограничения общности можно также считать, что $\int \Psi_n d\nu = 0$; заметим, что $\Psi_n \in L^2(\nu)$ в силу неравенства Пуанкаре для равномерно логарифмически вогнутых мер:

$$K \int \left(f - \int f d\nu \right)^2 d\nu \leq \int |\nabla f|^2 d\nu.$$

Так как W является гладкой функцией, то $\sup_n \int_{B_r} |\nabla\Psi_n|^2 dx < \infty$ для любого шара B_r . Используя компактность соболевских вложений, легко показать, что существует почти всюду сходящаяся подпоследовательность (для которой мы используем те же индексы) $\Psi_n \rightarrow \Psi$. Так как функции Ψ_n выпуклы, то имеется сходимост $\nabla\Psi_n \rightarrow \nabla\Psi$ п.в. Это влечет сходимост п.в. потенциалов $\Phi_n \rightarrow \Phi$ и их градиентов $\nabla\Phi_n \rightarrow \nabla\Phi$. Более того, так как

$$\int \|\nabla\Phi_n\|^2 d\mu_n = \int \|x\|^2 d\nu = \int \|\nabla\Phi\|^2 d\mu,$$

то $\nabla\Phi_n \cdot \sqrt{\rho_n} \rightarrow \nabla\Phi \cdot \sqrt{\rho}$ по норме в $L^2(\mathbf{R}^d)$. Таким же образом можно проверить (опять с точностью до подпоследовательностей), что $\partial_{x_i x_j} \Phi_n \sqrt{\rho_n}$ сходится слабо в $L^2(\mathbf{R}^d)$ к некоторой функции F . Отсюда вытекает соотношение

$$\int \xi \cdot \partial_{x_i x_j} \Phi_n \sqrt{\rho_n} \sqrt{\rho_n} dx \rightarrow \int \xi \cdot F \sqrt{\rho} dx.$$

С другой стороны,

$$\int \xi \cdot \partial_{x_i x_j} \Phi_n \rho_n dx = - \int \xi_{x_j} \cdot \partial_{x_i} \Phi_n \rho_n dx - \int \xi \cdot \partial_{x_i} \Phi_n \frac{\partial_{x_j} \rho_n}{\sqrt{\rho_n}} \cdot \sqrt{\rho_n} dx.$$

В силу сильной сходимости $\nabla\Phi_n \sqrt{\rho_n} \rightarrow \nabla\Phi \sqrt{\rho}$ последнее выражение сходится к

$$- \int \xi_{x_j} \cdot \partial_{x_i} \Phi \rho dx - \int \xi \cdot \partial_{x_i} \Phi \partial_{x_j} \rho dx.$$

Из соотношения

$$\int \xi \cdot F \sqrt{\rho} dx = - \int \xi_{x_j} \cdot \partial_{x_i} \Phi \rho dx - \int \xi \cdot \partial_{x_i} \Phi \partial_{x_j} \rho dx$$

следует, что вторая соболевская производная $\partial_{x_i x_j} \Phi$ равна $F/\sqrt{\rho}$. Таким образом, $D^2\Phi_n \cdot \sqrt{\rho_n} \rightarrow D^2\Phi \cdot \sqrt{\rho}$ слабо в $L^2(\mathbf{R}^d)$. Так как утверждение

выполнено для приближающей последовательности (согласно шагу 1), то, в силу стандартных свойств слабой сходимости,

$$\mathcal{J}_\mu = \lim_n \mathcal{J}_{\mu_n} \geq \liminf_n \int \|D^2\Phi_n\|^2 d\mu_n \geq \int \|D^2\Phi\|^2 d\mu.$$

Шаг 3. На конечном шаге зафиксируем μ и аппроксимируем e^{-W} такой гладкой логарифмически вогнутой вероятностной плотностью e^{-W_n} , что $\int |x|^2 d\nu_n \rightarrow \int |x|^2 d\nu$ и оценка (3.1) выполнена для всех W_n . Доказательство повторяет аргументы шага 2. В данном случае оно даже проще, так как мы имеем дело с фиксированной мерой μ . В итоге мы получаем, что $\nabla\Phi_n \rightarrow \nabla\Phi$ сильно в $L^2(\mu)$ и $D^2\Phi_n \rightarrow D^2\Phi$ слабо в $L^2(\mu)$. Теперь результат следует из стандартных свойств слабой сходимости. Теорема 3.1 доказана.

З а м е ч а н и е 3.1 (производные третьего порядка). Заметим, что таким же способом можно доказать глобальные оценки для производных Φ третьего порядка. Действительно, так как Φ — достаточно гладкая функция и неравенство (2.4) выполнено, то

$$\begin{aligned} \int V_{x_i}^2 d\mu &\geq K \int \|D^2\Phi \cdot e_i\|^2 d\mu + \int \|(D^2\Phi)^{-1/2} D^2\Phi_{x_i} (D^2\Phi)^{-1/2}\|_{\text{HS}}^2 d\mu \\ &\geq K \int \|D^2\Phi \cdot e_i\|^2 d\mu + \int \frac{\|D^2\Phi_{x_i}\|_{\text{HS}}^2}{\|D^2\Phi\|^2} d\mu, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ — стандартная операторная норма. Суммируя по i , оценивая операторную норму нормой Гильберта–Шмидта и применяя неравенство Коши, получаем

$$\int |\nabla V|^2 d\mu \geq 2\sqrt{K} \int \left[\sum_{i=1}^d \|D^2\Phi_{x_i}\|_{\text{HS}}^2 \right]^{1/2} d\mu.$$

4. Транспортные неравенства. В этом пункте мы покажем, что неравенство (1.1) следует из (обобщенного) неравенства Талагранна.

Следующее обобщение неравенства Талагранна было доказано в [14]. Пусть $f \cdot \nu, g \cdot \nu$ — вероятностные меры, $\nu = e^{-W} dx$ удовлетворяет условию $D^2W \geq K \cdot \text{I}$, $K > 0$. Пусть T_f (соответственно T_g) — оптимальное транспортное отображение, отображающее $f \cdot \nu$ (соответственно $g \cdot \nu$) в ν . Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\int f \ln \frac{f}{g} d\nu \geq \frac{K}{2} \int |T_f - T_g|^2 f d\nu. \quad (4.1)$$

З а м е ч а н и е 4.1. Классическая форма неравенства Талагранна

$$\int \rho \ln \rho d\nu \geq \frac{K}{2} \int |T(x) - x|^2 \rho d\nu \quad (4.2)$$

верна для всех (гладких) транспортных отображений T , отображающих $\rho \cdot \nu$ в ν и удовлетворяющих условию

$$\operatorname{div}(T^{-1}) - d - \ln \det D(T^{-1}) \geq 0. \quad (4.3)$$

Это можно проверить с помощью стандартных аргументов, основанных на формуле замены переменных (см., например, [16]). Тогда (4.1) следует из (4.2), если мы положим

$$\rho = \frac{f}{g} \circ T_g^{-1}, \quad T = T_f \circ T_g^{-1}.$$

Заметим, что (4.3) выполнено для T , поскольку $D(T^{-1})$ является композицией двух неотрицательных матриц (см. рассуждения в доказательстве теоремы 4.1).

Применим (4.1) к $f(x) = \exp(-V(x) + W(x))$ и $g(x) = \exp(-V(x+e) + W(x))$ (e — фиксированный вектор). Очевидно, что если $T_f = \nabla \Phi$ — оптимальная транспортировка между μ и ν , то $T_g = \nabla \Phi(x+e)$. Мы получаем

$$\int (V(x+e) - V(x)) d\mu \geq \frac{K}{2} \int |\nabla \Phi(x+e) - \nabla \Phi(x)|^2 d\mu.$$

Для удобства читателя мы ниже приведем независимое доказательство этого результата (теорема 4.1). Затем мы выведем из него основной результат работы (неравенство (1.1)).

Напомним, что любая выпуклая функция φ обладает п.в. так называемой второй производной Александрова $D_a^2 \varphi$, которая является абсолютно непрерывной частью своей обобщенной производной $D^2 \varphi$.

Следующая лемма тривиальным образом выполнена для гладких отображений, общий случай легко доказывается с помощью приближений.

Лемма 4.1. Пусть $\varphi: A \rightarrow \mathbf{R}$, $\psi: B \rightarrow \mathbf{R}$ — выпуклые функции на выпуклых множествах A , B . Предположим, что $\nabla \psi(B) \subset A$ и образ меры Лебега на множестве B относительно $\nabla \psi$ абсолютно непрерывен. Тогда

$$\operatorname{div}(\nabla \varphi \circ \nabla \psi) \geq \operatorname{Tr}[D_a^2 \varphi(\nabla \psi) \cdot D_a^2 \psi] dx \geq 0,$$

где div — обобщенная дивергенция векторного поля.

Теорема 4.1. Предположим, что W — K -выпуклая функция. Тогда для любого вектора $e \in \mathbf{R}^d$

$$\int (V(x+e) - V(x)) d\mu \geq \frac{K}{2} \int |\nabla \Phi(x+e) - \nabla \Phi(x)|^2 d\mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу результата Маккэна о формуле замены переменных (см. [18] или [24])

$$e^{-V} = \det D_a^2 \Phi \cdot e^{-W(\nabla \Phi)}$$

μ -п.в. Следовательно, $V = W(\nabla \Phi) - \ln \det D_a^2 \Phi$ и

$$\begin{aligned} V(x+e) - V(x) &= W(\nabla \Phi(x+e)) - W(\nabla \Phi(x)) \\ &\quad - \ln \left[(\det D_a^2 \Phi(x))^{-1} \cdot \det D_a^2 \Phi(x+e) \right]. \end{aligned}$$

В силу K -выпуклости W имеем

$$\begin{aligned} W(\nabla \Phi(x+e)) - W(\nabla \Phi(x)) &\geq \left\langle \nabla \Phi(x+e) - \nabla \Phi(x), \nabla W(\nabla \Phi(x)) \right\rangle \\ &\quad + \frac{K}{2} |\nabla \Phi(x+e) - \nabla \Phi(x)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} \int (V(x+e) - V(x)) d\mu &\geq \int \frac{K}{2} |\nabla \Phi(x+e) - \nabla \Phi(x)|^2 d\mu \\ &\quad + \int \left\langle \nabla \Phi(x+e) - \nabla \Phi(x), \nabla W(\nabla \Phi(x)) \right\rangle d\mu \\ &\quad - \int \ln [(\det D_a^2 \Phi(x))^{-1} \cdot \det D_a^2 \Phi(x+e)] d\mu. \end{aligned}$$

Пусть $\Psi = \Phi^*$ обозначает сопряженную функцию к Φ . Используя тот факт, что $\nabla \Psi$ и $\nabla \Phi$ взаимно обратны, получаем, что

$$\begin{aligned} &\int \left\langle \nabla \Phi(x+e) - \nabla \Phi(x), \nabla W(\nabla \Phi(x)) \right\rangle d\mu \\ &= \int \left\langle \nabla \Phi(\nabla \Psi(x) + e) - x, \nabla W(x) \right\rangle d\nu \\ &= \int \operatorname{div}(\nabla \Phi(\nabla \Psi(x) + e) - x) e^{-W}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{div}(\nabla \Phi(\nabla \Psi(x) + e) - x)$ — обобщенная производная векторного поля $\nabla \Phi(\nabla \Psi(x) + e) - x$.

В силу леммы 4.1 и соотношения $(D_a^2 \Phi(\nabla \Psi))^{-1} = D_a^2 \Psi$, которое выполнено ν -п.в. (см. [18] или [24]), мы получаем

$$\begin{aligned} &\int \operatorname{div}(\nabla \Phi(\nabla \Psi(x) + e) - x) e^{-W} \\ &\geq \int (\operatorname{Tr} D_a^2 \Phi(\nabla \Psi(x) + e) \cdot D_a^2 \Psi(x) - d) d\nu \\ &= \int (\operatorname{Tr} D_a^2 \Phi(x+e) \cdot (D_a^2 \Phi(x))^{-1} - d) d\mu. \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\mathrm{Tr} D_a^2 \Phi(x+e) \cdot (D_a^2 \Phi(x))^{-1} - d - \ln \left[\det D_a^2 \Phi(x) \cdot (\det D_2^2 \Phi(x+e))^{-1} \right] \geq 0.$$

Действительно, если A и B симметричны и неотрицательны, то

$$\mathrm{Tr} AB - d - \ln \det AB = \mathrm{Tr} C - d - \ln \det C,$$

где $C = B^{1/2} A B^{1/2}$ — симметричная неотрицательная матрица. Хорошо известно, что $\mathrm{Tr} C - d - \ln \det C > 0$. Действительно, последняя величина равна $\sum_i (c_i - 1 - \ln c_i) \geq 0$, где c_i — собственные значения C . Теорема 4.1 доказана.

Предложение 4.1. *Неравенство (1.4) влечет (1.1).*

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 3.1, не сложно видеть, что достаточно установить импликацию (1.4) $\Rightarrow$ (1.1) для гладкого потенциала V . По теореме 4.1

$$\begin{aligned} & \int \frac{V(x+te) + V(x-te) - 2V(x)}{t^2} d\mu \\ & \geq \frac{K}{2t^2} \int \left(\|\nabla \Phi(x+te) - \nabla \Phi(x)\|^2 + \|\nabla \Phi(x-te) - \nabla \Phi(x)\|^2 \right) d\mu. \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно предположить, что V удовлетворяет условиям

$$\frac{\exp(V(x) - V(x+te)) - 1}{t} \rightarrow V_e \quad \text{в } L^2(\mu), \quad t \rightarrow 0,$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int (V(x+te) + V(x-te) - 2V(x)) d\mu = \int V_{ee} d\mu$$

для всех e . Извлечем $L^2(\mu)$ -слабо сходящуюся подпоследовательность $\{(\nabla \Phi(x \pm t_n e) - \nabla \Phi(x))/t_n\}$ (будем ее нумеровать тем же индексом n). Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int \frac{\nabla \Phi(x + t_n e) - \nabla \Phi(x)}{t_n} \xi d\mu = \int \nabla \Phi(x) \frac{\xi(x - t_n e) - \xi(x)}{t_n} d\mu \\ & + \int \nabla \Phi(x) \xi \frac{\exp(V(x) - V(x - t_n e)) - 1}{t_n} d\mu. \end{aligned}$$

Очевидно, что последняя величина стремится к

$$- \int \nabla \Phi(x) \xi_e d\mu + \int \nabla \Phi(x) \xi V_e d\mu.$$

Таким образом,

$$\frac{\nabla \Phi(x \pm t_n e) - \nabla \Phi(x)}{t_n} \rightarrow \nabla \Phi_e$$

слабо в $L^2(\mu)$. По свойству слабой сходимости

$$\int V_e^2 d\mu = \int V_{ee} d\mu \geq K \int \|\nabla \Phi_e\|^2 d\mu.$$

Применяя этот результат к каждому e_i и суммируя по i , завершаем доказательство.

5. Неравенства, не зависящие от размерности. В этом пункте мы доказываем некоторые существенно бесконечномерные оценки (не содержащие констант, зависящих от размерности), которые имеют смысл в бесконечномерном случае. Приведенные ниже результаты имеют аналоги для треугольных отображений.

А. Гауссовский случай. Пусть γ обозначает стандартную гауссовскую меру на $\mathbf{R}^d$. Положим $\mu = g \cdot \gamma$, $\nu = \gamma$ и обозначим через $\nabla \Phi$ соответствующую оптимальную транспортировку. Согласно результатам п. 3 имеем

$$\int \left| \frac{\nabla g}{g} - x \right|^2 g d\gamma = \int \|D^2 \Phi\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma + \sum_{k=1}^d \int \text{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} D^2 \Phi_{x_k}]^2 g d\gamma.$$

Заметим, что

$$\int \left| \frac{\nabla g}{g} - x \right|^2 g d\gamma = \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\gamma - 2 \int \langle \nabla g, x \rangle d\gamma + \int |x|^2 g d\gamma$$

и

$$\int \|D^2 \Phi\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma = \int \|D^2 \Phi - \mathbf{I}\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma + 2 \int \Delta \Phi g d\gamma - d.$$

Интегрирование по частям дает

$$-2 \int \langle \nabla g, x \rangle d\gamma + \int |x|^2 g d\gamma = 2d - \int |x|^2 g d\gamma.$$

В силу формулы замены переменной

$$2 \int \Delta \Phi g d\gamma - d = 2 \int \Delta \Phi g d\gamma - \int |\nabla \Phi|^2 g d\gamma.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\gamma &= \int \|D^2 \Phi - \mathbf{I}\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma + \int (|x|^2 - |\nabla \Phi|^2) g d\gamma \\ &\quad + 2 \int (\Delta \Phi - d) g d\gamma + \sum_{k=1}^d \int \text{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} D^2 \Phi_{x_k}]^2 g d\gamma. \end{aligned}$$

Логарифмируя формулу замены переменной, получаем

$$\ln g = \frac{|x|^2}{2} - \frac{|\nabla \Phi|^2}{2} + \ln \det D^2 \Phi.$$

Применяя эту формулу, получаем эвристическое доказательство следующего результата.

Каждая вероятностная мера $g \cdot \gamma$ с гладкой плотностью g и гладким отображением $\nabla \Phi$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{aligned} I_\gamma g &= 2 \operatorname{Ent}_\gamma g - 2 \int \ln \det_2(D^2 \Phi - I) g d\gamma \\ &+ \int \|D^2 \Phi - I\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma + \sum_{k=1}^d \int \operatorname{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} D^2 \Phi_{x_k}]^2 g d\gamma, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $I_\gamma g = \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\gamma$ (относительная информация), $\operatorname{Ent}_\gamma g = \int g \ln g d\gamma$ (относительная энтропия), $\det_2(D^2 \Phi - I) = \det D^2 \Phi \cdot \exp(d - \Delta \Phi)$ (определитель Фредгольма–Карлемана матрицы $D^2 \Phi - I$).

З а м е ч а н и е 5.1. Так как все слагаемые в правой части (5.1) неотрицательны, утверждение влечет за собой, в частности, классическое логарифмическое неравенство Соболева $I_\gamma g \geq 2 \operatorname{Ent}_\gamma g$ и следующий гауссовский аналог неравенства (1.1):

$$I_\gamma g \geq \int \|D^2 \Phi - I\|_{\text{HS}}^2 g d\gamma. \quad (5.2)$$

З а м е ч а н и е 5.2. Соотношение (5.1) выполнено, например, при следующих предположениях: функция g гладкая, ограниченная, строго положительная, $I_\gamma g < \infty$ и $-D^2 \ln g \leq c \cdot I$; см. шаг 1 в доказательстве теоремы 3.1.

Неравенство (5.2) немедленно следует из теоремы 3.1 при единственном предположении $I_\gamma g < \infty$.

З а м е ч а н и е 5.3. М. Леду обратил внимание автора на то обстоятельство, что (5.1) влечет описание экстремалей для классического логарифмического неравенства Соболева. Действительно, равенство в (5.1) возможно только в случае $D^2 \Phi = I$, тогда $\nabla \Phi$ линейно и g имеет вид $g = \exp(\langle h, x \rangle - \|h\|^2/2)$, $h \in \mathbf{R}^d$. Этот результат был доказан другим способом в [6].

В. Логарифмически вогнутая мера. Ниже мы имеем дело со случаем $\mu = g e^{-W} dx$, $\nu = e^{-W} dx$, где W — выпуклая функция. Из приведенных выше результатов следует неравенство

$$\int \left| \frac{\nabla g}{g} - \nabla W \right|^2 g d\mu \geq \int \operatorname{Tr} [D^2 \Phi \cdot D^2 W(S) \cdot D^2 \Phi] g d\mu.$$

Перепишем левую часть в виде

$$\int \left| \frac{\nabla g}{g} - \nabla W \right|^2 g d\mu = \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\mu - 2 \int \langle \nabla g, \nabla W \rangle d\mu + \int |\nabla W|^2 g d\mu.$$

Перепишем правую часть:

$$\begin{aligned}
& \int \operatorname{Tr} [D^2\Phi \cdot D^2W(\nabla\Phi) \cdot D^2\Phi] g \, d\mu \\
&= \int \operatorname{Tr} [(D^2\Phi - I) \cdot D^2W(\nabla\Phi) \cdot (D^2\Phi - I)] g \, d\mu \\
&\quad + 2 \int \operatorname{div} (\nabla W \circ \nabla\Phi) g \, d\mu - \int \Delta W(\nabla\Phi) g \, d\mu \\
&= \int \operatorname{Tr} [(D^2\Phi - I) \cdot D^2W(\nabla\Phi) \cdot (D^2\Phi - I)] g \, d\mu \\
&\quad - 2 \int \langle \nabla g, \nabla W \circ \nabla\Phi \rangle d\mu + 2 \int \langle \nabla W, \nabla W \circ \nabla\Phi \rangle g \, d\mu - \int \Delta W(\nabla\Phi) g \, d\mu.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\mu + \int |\nabla W|^2 g \, d\mu \\
&\geq 2 \int \langle \nabla g, \nabla W - \nabla W \circ \nabla\Phi \rangle d\mu + 2 \int \langle \nabla W, \nabla W \circ \nabla\Phi \rangle g \, d\mu \\
&\quad + \int \operatorname{Tr} [(D^2\Phi - I) \cdot D^2W(\nabla\Phi) \cdot (D^2\Phi - I)] g \, d\mu - \int \Delta W(\nabla\Phi) g \, d\mu.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
& \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\mu + \int |\nabla W|^2 g \, d\mu - 2 \int \langle \nabla W, \nabla W \circ \nabla\Phi \rangle g \, d\mu \\
&\quad + \int |\nabla W \circ \nabla\Phi|^2 g \, d\mu \\
&\geq 2 \int \langle \nabla g, \nabla W - \nabla W \circ \nabla\Phi \rangle d\mu \\
&\quad + \int \operatorname{Tr} [(D^2\Phi - I) \cdot D^2W(\nabla\Phi) \cdot (D^2\Phi - I)] g \, d\mu \\
&\quad + \int [|\nabla W \circ \nabla\Phi|^2 - \Delta W(\nabla\Phi)] g \, d\mu.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\int [|\nabla W \circ \nabla\Phi|^2 - \Delta W(\nabla\Phi)] g \, d\mu = \int [|\nabla W|^2 - \Delta W] d\mu = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned}
& \int \left| \frac{\nabla g}{g} - (\nabla W - \nabla W \circ \nabla\Phi) \right|^2 g \, d\mu \\
&\geq \int \operatorname{Tr} [(D^2\Phi - I) \cdot D^2W(\nabla\Phi) \cdot (D^2\Phi - I)] g \, d\mu. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

По неравенству Коши имеем

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\mu + 2 \int |\nabla W - \nabla W \circ \nabla \Phi|^2 g d\mu \\ \geq \int \operatorname{Tr} \left[(D^2 \Phi - I) \cdot D^2 W(\nabla \Phi) \cdot (D^2 \Phi - I) \right] g d\mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таким образом, чтобы оценить

$$\int \operatorname{Tr} \left[(D^2 \Phi - I) \cdot D^2 W(\nabla \Phi) \cdot (D^2 \Phi - I) \right] g d\mu$$

или $\int \|D^2 \Phi - I\|_{\text{HS}}^2 g d\mu$ для равномерно выпуклой W , достаточно оценить

$$\int |\nabla W - \nabla W \circ \nabla \Phi|^2 g d\mu.$$

Некоторые оценки величин такого типа были получены в [28]. Мы дадим ниже доказательство наиболее простого случая (потенциал имеет квадратичный рост).

Теорема 5.1. *Предположим, что для некоторого $K > 0$ выполнено неравенство*

$$W(x) - \langle \nabla W(y), x - y \rangle - W(y) \geq \frac{K}{2} |\nabla W(x) - \nabla W(y)|^2$$

и $D^2 W \geq K \cdot I$. Тогда

$$\frac{K}{2} \int \|D^2 \Phi - I\|_{\text{HS}}^2 g d\mu \leq \frac{2}{K} \int g \ln g d\mu + \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\mu.$$

В частности, оценка выполнена для $K > 0$, если $C_1 \cdot I \leq D^2 W \leq C_2 \cdot I$.

Доказательство. Результат следует из теоремы 3.1. Доказательство может быть легко сведено к случаю гладких g и T (см. доказательство теоремы 3.1). По формуле замены переменной для $T = (\nabla \Phi)^{-1} = \nabla \Phi^*$ имеем

$$\ln g(T) - W(T) + \ln \det DT = -W(x).$$

Перепишем это следующим образом:

$$\ln g(T) = W(T) - \langle \nabla W(x), T(x) - x \rangle - W(x) + [\langle \nabla W(x), T(x) - x \rangle - \ln \det DT].$$

Заметим, что

$$\int [\langle \nabla W(x), T(x) - x \rangle - \ln \det DT] d\mu = [\operatorname{Tr} DT - d - \ln \det DT] d\mu \geq 0.$$

Таким образом,

$$\int \ln g(T) d\mu \geq \int \left[W(T) - \langle \nabla W(x), T(x) - x \rangle - W(x) \right] d\mu.$$

По формуле замены переменной получаем

$$\int g \ln g d\mu \geq \int \left[W(x) - \langle \nabla W(\nabla \Phi(x)), x - \nabla \Phi \rangle - W(\nabla \Phi) \right] g(x) d\mu.$$

Наш результат следует из последнего неравенства, оценки (5.4) и предположений теоремы.

6. L^p -оценки и теорема Каффарелли. Ниже мы обобщаем результаты предыдущего пункта и доказываем соответствующие L^p -оценки. Как частный случай мы получим теорему Каффарелли о сжатии. Заметим, что некоторые не зависящие от размерности обобщения неравенства Талаграны были получены в [28]. В частности, в [28] было показано, что $\|\nabla \Phi\|_{L^{2p}(\mu)}$ оценивается величиной $\int g |\ln g|^p d\mu$, $p \geq 1$, для любой меры μ , удовлетворяющей логарифмическому неравенству Соболева.

Доказательство следующего результата основано на рассуждениях теоремы 4.1. Поэтому мы опустим детали и дадим краткий набросок доказательства.

Теорема 6.1. *Предположим, что $D^2W \geq K \cdot I$. Тогда для любого единичного вектора e , $p \geq 0$ и $r = (p+2)/2$ имеем*

$$K \|\Phi_{ee}^2\|_{L^r(\mu)} \leq \|(V_{ee})_+\|_{L^r(\mu)}, \quad K \|\Phi_{ee}^2\|_{L^r(\mu)} \leq \frac{p+4}{4} \|V_e^2\|_{L^r(\mu)}.$$

Доказательство. Зафиксируем единичный вектор e и применим формулу замены переменных. В силу равномерной выпуклости W верно соотношение

$$\begin{aligned} V(x+te) - V(x) &\geq \langle \nabla \Phi(x+te) - \nabla \Phi(x), \nabla W(\nabla \Phi(x)) \rangle \\ &\quad + \frac{K}{2} |\nabla \Phi(x+te) - \nabla \Phi(x)|^2 \\ &\quad - \ln \left[(\det D_a^2 \Phi(x))^{-1} \cdot \det D_a^2 \Phi(x+te) \right]. \end{aligned}$$

Умножим это соотношение на $(\delta_{te}\Phi)^p$, где $p \geq 0$ и $\delta_{te}\Phi = \Phi(x+te) + \Phi(x-te) - 2\Phi(x)$, и проинтегрируем по μ . Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} &\int \langle \nabla \Phi(x+te) - \nabla \Phi(x), \nabla W(\nabla \Phi(x)) \rangle (\delta_{te}\Phi)^p d\mu \\ &= \int \langle \nabla \Phi(x+te) \circ (\nabla \Psi) - x, \nabla W(x) \rangle (\delta_{te}\Phi)^p \circ (\nabla \Psi) d\nu \\ &\geq \int \left(\text{Tr} [D_a^2 \Phi(x+te) \cdot (D_a^2 \Phi)^{-1}] \circ (\nabla \Psi) - d \right) (\delta_{te}\Phi)^p \circ (\nabla \Psi) d\nu \\ &\quad + p \int \langle \nabla \Phi(x+te) \circ (\nabla \Psi) - x, (D^2 \Psi) \nabla \delta_{te}\Phi \circ (\nabla \Psi) \rangle (\delta_{te}\Phi)^{p-1} \circ (\nabla \Psi) d\nu. \end{aligned}$$

Применяя неравенство $\text{Tr } A - d - \ln \det A \geq 0$, выполненное для произведения симметричных неотрицательных матриц, мы получим

$$\begin{aligned} \int (V(x+te) - V(x))(\delta_{te}\Phi)^p d\mu &\geq \frac{K}{2} \int |\nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x)|^2 (\delta_{te}\Phi)^p d\mu \\ &+ p \int \langle \nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x), (D^2\Psi) \circ \nabla\Phi(x) \nabla\delta_{te}\Phi \rangle (\delta_{te}\Phi)^{p-1} d\mu. \end{aligned}$$

Напишем такое же неравенство с вектором $-e$ вместо e и возьмем сумму обоих неравенств:

$$\begin{aligned} \int (V(x+te) + V(x-te) - 2V(x))(\delta_{te}\Phi)^p d\mu \\ \geq \frac{K}{2} \int |\nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x)|^2 (\delta_{te}\Phi)^p d\mu \\ + \frac{K}{2} \int |\nabla\Phi(x-te) - \nabla\Phi(x)|^2 (\delta_{te}\Phi)^p d\mu \\ + p \int \langle \nabla\delta_{te}\Phi, (D_a^2\Phi)^{-1} \nabla\delta_{te}\Phi \rangle (\delta_{te}\Phi)^{p-1} d\mu. \end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое неотрицательно. Разделим последнее неравенство на t^{2p} и перейдем к пределу при $t \rightarrow 0$:

$$\int V_{ee} \Phi_{ee}^p d\mu \geq K \int \|D^2\Phi \cdot e\|^2 \Phi_{ee}^p d\mu + p \int \langle (D^2\Phi)^{-1} \nabla\Phi_{ee}, \nabla\Phi_{ee} \rangle \Phi_{ee}^{p-1} d\mu. \quad (6.1)$$

Для доказательства первого утверждения теоремы заметим, что

$$\int V_{ee} \Phi_{ee}^p d\mu \geq K \int \Phi_{ee}^{p+2} d\mu.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\|(V_{ee})_+\|_{L^{(p+2)/2}(\mu)} \|\Phi_{ee}^p\|_{L^{(p+2)/p}(\mu)} \geq \int V_{ee} \Phi_{ee}^p d\mu.$$

Отсюда легко вытекает нужный результат.

Для проверки второго утверждения проинтегрируем по частям левую часть неравенства (6.1)

$$\begin{aligned} \int V_{ee} \Phi_{ee}^p d\mu &= -p \int V_e \Phi_{eee} \Phi_{ee}^{p-1} d\mu + \int V_e^2 \Phi_{ee}^p d\mu \\ &= -p \int \langle \nabla\Phi_{ee}, V_e \cdot e \rangle \Phi_{ee}^{p-1} d\mu + \int V_e^2 \Phi_{ee}^p d\mu. \end{aligned}$$

По неравенству Коши, последняя величина не превосходит

$$p \int \langle (D^2\Phi)^{-1} \nabla\Phi_{ee}, \nabla\Phi_{ee} \rangle \Phi_{ee}^{p-1} d\mu + \frac{p}{4} \int V_e^2 \langle (D^2\Phi \cdot e), e \rangle \Phi_{ee}^{p-1} d\mu + \int V_e^2 \Phi_{ee}^p d\mu.$$

Неравенство (6.1) влечет оценку

$$\frac{p+4}{4} \int V_e^2 \Phi_{ee}^p d\mu \geq K \int |\nabla \Phi_e|^2 \Phi_{ee}^p d\mu \geq K \int \Phi_{ee}^{p+2} d\mu.$$

Окончание доказательства такое же, как и в первой части. Теорема 6.1 доказана.

Следствие 6.1. В пределе $p \rightarrow \infty$ мы получим теорему Каффарелли о сжатии $K \|\Phi_{ee}\|_{L^\infty(\mu)}^2 \leq \|(V_{ee})_+\|_{L^\infty(\mu)}$.

7. Оценки операторной нормы. Этот пункт дает частичный ответ на вопрос, заданный автору Э.Мильманом. Существуют ли эффективные (например, не зависящие от размерности) оценки для операторной нормы $D^2\Phi$? Оценки такого рода могли бы иметь полезные следствия для неравенств изопериметрического типа для логарифмически вогнутых мер.

Так как операторная норма оценивается нормой Гильберта–Шмидта, то из предыдущих результатов тривиальным образом вытекает следующая оценка:

$$\mathcal{J}_\mu \geq K \int \|D^2\Phi\|_{\text{HS}}^2 d\mu \geq K \int \|D^2\Phi\|^2 d\mu.$$

Отметим, однако, что для многих задач предположение $\mathcal{J}_\mu < \infty$ является слишком сильным и ведет к зависящим от размерности оценкам.

Цель настоящего пункта — показать, что для равномерно логарифмически вогнутой меры ν выполнена оценка

$$\int \|(D^2V)^+\| d\mu \geq K \int \|D^2\Phi\|^2 d\mu.$$

Лемма 7.1. Предположим, что Φ — гладкая функция. Тогда для всяких гладкого векторного поля v и неотрицательной гладкой финитной функции η выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int \langle D^2Vv, v \rangle \eta d\mu &\geq K \int \|D^2\Phi \cdot v\|^2 \eta d\mu + \int \langle (D^2\Phi)_v \cdot v, (D^2\Phi)^{-1} \nabla \eta \rangle d\mu \\ &+ 2 \int \text{Tr}((D^2\Phi)_v \cdot Dv \cdot (D^2\Phi)^{-1}) \eta d\mu + \int \text{Tr}[(D^2\Phi)^{-1} (D^2\Phi)_v]^2 \eta d\mu. \end{aligned}$$

Доказательство. Из формулы замены переменных вытекает, что $V = W(\nabla\Phi) - \ln \det D^2\Phi$ и

$$\begin{aligned} V(x+tv) - V(x) &= W(\nabla\Phi(x+tv)) - W(\nabla\Phi(x)) \\ &\quad - \ln [(\det D^2\Phi(x))^{-1} \cdot \det D^2\Phi(x+tv)]. \end{aligned}$$

В силу K -равномерной выпуклости W имеем

$$\begin{aligned} W(\nabla\Phi(x+tv)) - W(\nabla\Phi(x)) &\geq \left\langle \nabla\Phi(x+tv) - \nabla\Phi(x), \nabla W(\nabla\Phi(x)) \right\rangle \\ &\quad + \frac{K}{2} |\nabla\Phi(x+tv) - \nabla\Phi(x)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} \int (V(x+tv) - V(x))\eta d\mu &\geq \int \frac{K}{2} |\nabla\Phi(x+tv) - \nabla\Phi(x)|^2 \eta d\mu \\ &\quad + \int \langle \nabla\Phi(x+tv) - \nabla\Phi(x), \nabla W(\nabla\Phi(x)) \rangle \eta d\mu \\ &\quad - \int \ln \left[(\det D^2\Phi(x))^{-1} \cdot \det D^2\Phi(x+tv) \right] \eta d\mu. \end{aligned}$$

Пусть $\Psi = \Phi^*$ обозначает сопряженную функцию к Φ . Используя тот факт, что $\nabla\Psi$ и $\nabla\Phi$ взаимно обратны, мы получаем

$$\begin{aligned} &\int \left\langle \nabla\Phi(x+tv) - \nabla\Phi(x), \nabla W(\nabla\Phi(x)) \right\rangle \eta d\mu \\ &= \int \langle \nabla\Phi(x+tv) \circ (\nabla\Psi) - x, \nabla W(x) \rangle \eta(\nabla\Psi) d\nu \\ &= \int \operatorname{div} (\nabla\Phi(x+tv) \circ (\nabla\Psi) - x) \eta(\nabla\Psi) e^{-W} dx \\ &\quad + \int \langle \nabla\Phi(x+tv) \circ (\nabla\Psi) - x, D^2\Psi \cdot \nabla\eta(\nabla\Psi) \rangle d\nu. \end{aligned}$$

Из соотношения $(D^2\Phi(\nabla\Psi))^{-1} = D^2\Psi$ следует равенство

$$\begin{aligned} &\int \operatorname{div} (\nabla\Phi(\nabla\Psi(x) + tv) - x) \eta(\nabla\Psi) e^{-W} \\ &= \int (\operatorname{Tr} D^2\Phi(x+tv) \circ (\nabla\Psi) \cdot (\operatorname{I} + tDv) \circ (\nabla\Psi) \cdot D^2\Psi - d) \eta(\nabla\Psi) d\nu \\ &= \int (\operatorname{Tr} D^2\Phi(x+tv) \cdot (\operatorname{I} + tDv) \cdot (D^2\Phi(x))^{-1} - d) \eta d\mu. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x, tv) &= \operatorname{Tr} D^2\Phi(x+tv) \cdot (D^2\Phi(x))^{-1} - d \\ &\quad - \ln \left[\det D^2\Phi(x) \cdot (\det D^2\Phi(x+tv))^{-1} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int (V(x+tv) - V(x))\eta d\mu &\geq \frac{K}{2} \int |\nabla\Phi(x+tv) - \nabla\Phi(x)|^2 \eta d\mu \\ &\quad + t \int \operatorname{Tr} (D^2\Phi(x+tv) \cdot Dv(x) \cdot (D^2\Phi(x))^{-1}) \eta d\mu \\ &\quad + \int \left\langle \nabla\Phi(x+tv) - \nabla\Phi(x), (D^2\Psi) \nabla\eta(\nabla\Psi(x)) \right\rangle d\nu + \int \mathcal{T}(x, tv) \eta d\mu. \end{aligned}$$

Напишем такое же неравенство с $-v$ вместо v , возьмем сумму обоих неравенств и разделим на t^2 . Легко убедиться с помощью формулы Тейлора, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(x, tv) + \mathcal{I}(x, -tv)}{t^2} = \text{Tr} [(D^2\Phi)^{-1}(D^2\Phi)_v]^2 \geq 0.$$

В пределе $t \rightarrow 0$ получаем искомое неравенство.

Доказательство леммы 7.2 может быть получено с помощью стандартных рассуждений теории меры. Оно основано на том факте, что множество симметричных матриц с кратными собственными значениями имеет меньшую размерность, чем объемлющее пространство всех симметричных матриц.

Лемма 7.2. *Предположим, что Φ — гладкая выпуклая функция. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая матрица $Q_\varepsilon \geq 0$, что $\|Q_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ и матрица $D^2\Phi(x) + Q_\varepsilon$ не имеет кратных собственных значений за исключением точек множества меры нуль.*

Теорема 7.1. *Предположим, что $D^2W \geq K \cdot \text{I}$ и $(D^2V)_+ \in L^1(\mu)$. Тогда выполнено неравенство*

$$\int \|(D^2V)^+\| d\mu \geq K \int \|D^2\Phi\|^2 d\mu.$$

Доказательство. Шаг 1. Предположим, что Φ — гладкая функция. Зафиксируем точку x_0 . Предположим, что $D^2\Phi(x_0)$ не имеет собственных значений. Пусть v — гладкое векторное поле, совпадающее с единичным собственным вектором матрицы $D^2\Phi$, отвечающим наибольшему собственному значению λ , в окрестности U_{x_0} точки x_0 . Покажем, что $\text{Tr}(\partial_v D^2\Phi \cdot Dv \cdot (D^2\Phi)^{-1}) \geq 0$ в U_{x_0} . Действительно, имеем $D^2\Phi \cdot v = \lambda \cdot v$, $|v| = 1$. Продифференцировав оба тождества, получим

$$(Dv)^T v = 0, \quad \partial_v D^2\Phi + D^2\Phi \cdot Dv = \lambda \cdot Dv + v \oplus \nabla \lambda.$$

Умножим слева второе неравенство на $(D^2\Phi)^{-1} \cdot (Dv)^T$ и вычислим след. Принимая во внимание, что

$$\text{Tr} (D^2\Phi)^{-1} (Dv)^T \cdot v \oplus \nabla \lambda = \langle (D^2\Phi)^{-1} (Dv)^T v, \nabla \lambda \rangle = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \text{Tr} (D^2\Phi)^{-1} (Dv)^T \cdot \partial_v D^2\Phi + \text{Tr} (D^2\Phi)^{-1} (Dv)^T D^2\Phi \cdot Dv \\ & = \lambda \cdot \text{Tr} (D^2\Phi)^{-1} (Dv)^T \cdot Dv. \end{aligned}$$

В итоге получаем равенства

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\partial_v D^2\Phi \cdot Dv \cdot (D^2\Phi)^{-1}) &= \text{Tr} (D^2\Phi)^{-1} (Dv)^T \cdot \partial_v D^2\Phi \\ &= \text{Tr} (D^2\Phi)^{-1} (Dv)^T (\lambda \text{I} - D^2\Phi) \cdot Dv \\ &= \text{Tr} (D^2\Phi)^{-1/2} (Dv)^T (\lambda \text{I} - D^2\Phi) \cdot Dv \cdot (D^2\Phi)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение равно

$$\mathrm{Tr}(ABA^T), \quad \text{где } A = (D^2\Phi)^{-1/2}(Dv)^T(D^2\Phi)^{-1/2}, \quad B = \lambda D^2\Phi - (D^2\Phi)^2.$$

Так как λ является наибольшим собственным значением, то матрица B симметрична и неотрицательна. Следовательно $\mathrm{Tr}(\partial_v D^2\Phi \cdot Dv \cdot (D^2\Phi)^{-1}) \geq 0$. В частности, если $\mathrm{supp} \eta \subset U_{x_0}$, то из леммы 7.2 следует

$$\begin{aligned} \int \|(D^2V)^+\|^2 \eta d\mu &\geq K \int \lambda^2 \cdot \eta d\mu + \int \langle (D^2\Phi)_v \cdot v, (D^2\Phi)^{-1} \nabla \eta \rangle d\mu \\ &\quad + \int \mathrm{Tr}[(D^2\Phi)^{-1}(D^2\Phi)_v]^2 \eta d\mu. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Шаг 2. Предположим, что Φ — выпуклый многочлен, причем $D^2\Phi$ не имеет кратных собственных значений μ -п.в. Множество точек S , где $D^2\Phi$ не имеет кратных собственных значений, является множеством нулей дискриминанта $D^2\Phi$ и, значит, алгебраическим многообразием. В частности, для $\mathcal{H}^{d-1}$ -почти всех точек $x \in \partial S$ множество $S \cap B_r(x)$ диффеоморфно $\mathbf{R}^{d-1}$ для достаточно малых r (см. [2, предложение 3.3.14]). Пусть $\mathbf{R}^d \setminus S = \bigcup D_i$, где каждая область D_i является связной компонентой $\mathbf{R}^d \setminus S$. Очевидно, что можно выбрать такое единичное векторное поле v собственных векторов, соответствующих наибольшему собственному значению $D^2\Phi$, что $v|_{D_i}$ гладко для любого D_i .

По классическому результату из [8], функция $A \mapsto \Lambda(A)$, где $\Lambda(A)$ — наибольшее собственное значение, является выпуклой функцией на пространстве симметричных матриц. Отсюда следует, в частности, что функция $\lambda(x): x \mapsto \Lambda(D^2\Phi(x))$ имеет производную по направлению

$$\partial_e \lambda(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(x + te) - \lambda(x)}{t}$$

для любого x и любого направления e . Для любой регулярной точки $x \in \partial D_i$ положим $\nabla_{D_i} \lambda = \sum_{i=1}^d \partial_{e_i} \lambda \cdot e_i$, где базис $\{e_i\}$ выбран таким образом, что $x + te_i \in D_i$ для малых значений t и любого i .

Заметим, что $\partial_e \langle D^2\Phi \cdot v, v \rangle = \langle D^2\Phi_e \cdot v, v \rangle + 2\langle D^2\Phi \partial_e v, v \rangle$ внутри D_i . Так как v является единичным собственным значением $D^2\Phi$, то вектор $\partial_e v$ ортогонален $D^2\Phi \cdot v$ и, следовательно, $\partial_e \lambda(x) = \langle D^2\Phi_e \cdot v, v \rangle$. Зафиксируем компактную область B с гладкой границей и применим (7.1) к $\nu = I_{D_i \cap B}$. Более точно, выберем такую последовательность гладких финитных функций $\{\eta_n\}$ с носителями в $D_i \cap B_R$, что $\eta_i \rightarrow I_{D_i \cap B}$. В пределе получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{D_i \cap B} \|(D^2V)^+\|^2 d\mu &\geq K \int_{D_i \cap B} \lambda^2 d\mu + \int_{D_i \cap B} \mathrm{Tr}[(D^2\Phi)^{-1}(D^2\Phi)_v]^2 d\mu \\ &\quad + \int_{\partial D_i \cap B} \langle \nabla_{D_i} \lambda, (D^2\Phi)^{-1} n_{D_i} \rangle d\mu + \int_{D_i \cap \partial B} \langle \nabla_{D_i} \lambda, (D^2\Phi)^{-1} n_B \rangle d\mu, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где n_B — внутренняя нормаль к ∂B .

Возьмем регулярную точку $x \in \partial D_i$. Ясно, что x принадлежит границе между множествами D_i и D_j , где $j \neq i$, и внутренняя нормаль к ∂D_i может быть вычислена следующим образом:

$$n_{ij} = \frac{\nabla_{D_i} \lambda - \nabla_{D_j} \lambda}{\|\nabla_{D_i} \lambda - \nabla_{D_j} \lambda\|}.$$

Взяв сумму неравенств (7.2) по i , мы получим, что интеграл по границе $\bigcup_i \partial D_i \cap B$ принимает вид

$$\sum_{i,j} \int_{\partial D_i \cap \partial D_j \cap B} \langle \nabla_{D_i} \lambda - \nabla_{D_j} \lambda, (D^2 \Phi)^{-1} n_{ij} \rangle d\mu$$

и, очевидно, неотрицателен. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_B \|(D^2 V)^+\|^2 d\mu &\geq K \int_B \lambda^2 d\mu + \int_B \text{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} (D^2 \Phi)_v]^2 d\mu \\ &\quad + \sum_i \int_{D_i \cap \partial B} \langle \nabla_{D_i} \lambda, (D^2 \Phi)^{-1} n_B \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Зафиксируем гладкую финитную неотрицательную функцию ξ . Применяв формулу коплоади и полученные выше оценки к множествам уровня ξ , легко доказать, что

$$\begin{aligned} \int \|(D^2 V)^+\|^2 \xi d\mu &\geq K \int \lambda^2 \xi d\mu + \int \text{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} (D^2 \Phi)_v]^2 \xi d\mu \\ &\quad + \sum_i \int_{D_i} \langle (D^2 \Phi)_v \cdot v, (D^2 \Phi)^{-1} \nabla \xi \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Применяя стандартные соотношения между операторной нормой и нормой Гильберта–Шмидта

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(D^2 \Phi)^{-1} (D^2 \Phi)_v]^2 &= \|(D^2 \Phi)^{-1/2} (D^2 \Phi)_v (D^2 \Phi)^{-1/2}\|_{\text{HS}}^2 \\ &\geq \frac{\|(D^2 \Phi)_v\|_{\text{HS}}^2}{\|D^2 \Phi\|^2} \geq \frac{\|(D^2 \Phi)_v\|^2}{\|D^2 \Phi\|^2} \end{aligned}$$

и неравенство Коши, получаем оценку

$$\int \|(D^2 V)^+\|^2 \xi d\mu + 4 \int \frac{|\nabla \xi|^2}{\xi} d\mu \geq K \int \lambda^2 \xi d\mu. \quad (7.3)$$

Выбирая такую последовательности финитных функций $\{\xi_n\}$, что выполнены соотношения $\lim_n \xi_n = 1$ и $\lim_n \int (|\nabla \xi_n|^2 d\mu) / \xi_n = 0$, получаем искомое утверждение.

Шаг 3. На этом шаге мы докажем общий случай. Так же как и в теореме 3.1, приблизим V и W гладкими функциями с не более чем квадратичным ростом. Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что Φ — гладкая функция. Чтобы применить предыдущий шаг, зафиксируем компактное множество B и выберем такую последовательность многочленов $\{\Phi_n\}$, что $\Phi_n \rightarrow \Phi$ на B равномерно со всеми производными до четвертого порядка включительно (это можно сделать согласно многомерной версии теоремы Вейерштрасса о приближении многочленами).

Так как мы имеем сходимости производных второго порядка, то функции Φ_n выпуклы для достаточно больших n . Применяя лемму 7.2, можно предположить, что $S(\Phi_n)$ имеет меру нуль. Заметим, что $\nabla \Phi_n$ отображает $e^{-V_n} dx$ в μ , где $V_n = W(\nabla \Phi_n) - \ln \det D^2 \Phi_n$. Из сходимости $\Phi_n \rightarrow \Phi$ следует, что $V_n \rightarrow V$ равномерно на B и то же самое выполнено для производных второго порядка. Переходя к пределу, получим (7.3) для V и достаточно гладкой функции ξ . Выбирая подходящую последовательность $\{\xi_n\}$, удовлетворяющую условию $\xi_n \rightarrow 1$, завершаем доказательство.

Следующий результат обобщает лемму 7.1 таким же образом, как теорема 6.1 обобщает теорему 3.1. Доказательство может быть получено путем модификации доказательства теоремы 7.1, и мы его опустим.

Теорема 7.2. *Предположим, что $D^2 W \geq K \cdot I$. Тогда для любого $r \geq 1$ имеем*

$$K \left(\int \|D^2 \Phi\|^{2r} d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int \|(D^2 V)_+\|^r d\mu \right)^{1/r}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. Basel: Birkhäuser, 2005, 333 p.
2. Bochnak J., Coste M., Roy M.-F. Real Algebraic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1998, 430 p.
3. Caffarelli L. A. Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge–Ampère equation. — Ann. Math., 1990, v. 131, № 1, p. 135–150.
4. Caffarelli L. A. Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities. — Comm. Math. Phys., 2000, v. 214, № 3, p. 547–563.
5. Caffarelli L. A., Cabré X. Fully Nonlinear Elliptic Equations. Providence: Amer. Math. Soc., 1995, 104 p.
6. Carlen E. A. Superadditivity of Fisher’s information and logarithmic Sobolev inequalities. — J. Funct. Anal., 1991, v. 101, № 1, p. 194–211.
7. Delanoë P., Loeper G. Gradient estimates for potentials of invertible gradient mappings on the sphere. — Calc. Var. Partial Diff. Equations, 2006, v. 26, № 3, p. 297–311.
8. Fan K. On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations. I. — Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 1949, v. 35, p. 652–655.

9. Гилбарт Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989, 403 с.
10. Gozlan N., Léonard Ch. Transport inequalities. A survey. — Markov Process. Related Fields, 2010, v. 16, № 4, p. 635–736.
11. Gutiérrez C. E. The Monge–Ampère Equation. Boston: Birkhäuser, 2011, 127 p.
12. Kim Y.-H., Milman E. A Generalization of Caffarelli’s contraction theorem via (reverse) heat flow. — Math. Ann. (to appear).
13. Kim Y.-H., McCann R. J. Continuity, curvature, and the general covariance of optimal transportation. — J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 2010, v. 12, № 4, p. 1009–1040.
14. Kolesnikov A. V. Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures. — J. Math. Pures Appl., 2004, v. 83, № 11, p. 1373–1404.
15. Krylov N. V. Fully nonlinear second order elliptic equations: recent developments. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 1997, v. 25, № 3–4, p. 569–595.
16. Ledoux M. The Concentration of Measure Phenomenon. Providence: Amer. Math. Soc., 2001, 181 p.
17. Loeper G. On the regularity of solutions of optimal transportation problems. — Acta Math., 2009, v. 202, № 2, p. 241–283.
18. McCann R. J. A convexity principle for interacting gases. — Adv. Math., 1997, v. 128, № 1, p. 153–179.
19. Milman E. On the role of convexity in functional and isoperimetric inequalities. — Proc. London Math. Soc., 2009, v. 99, № 1, p. 32–66.
20. Milman E. On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration. — Invent. Math., 2009, v. 177, № 1, p. 1–43.
21. Talagrand M. Transportation cost for Gaussian and other product measures. — Geom. Funct. Anal., 1996, v. 6, № 3, p. 587–600.
22. Trudinger N. S., Wang X.-J. On the second boundary value problem for Monge–Ampère type equations and optimal transportation. — Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 2009, v. 8, № 1, p. 143–174.
23. Valdimarsson S. I. On the Hessian of optimal transport potential. — Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5), 2007, v. 6, № 3, p. 441–456.
24. Villani C. Topics in Optimal Transportation. Providence: Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2003, 370 p.
25. Бакельман И. Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М.: Наука, 1965, 340 с.
26. Богачев В. И. Основы теории меры, т. 1, 2. М.–Ижевск: РХД, 2006, 583 с., 679 с.
27. Богачев В. И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. М.–Ижевск: РХД, 2008, 543 с.
28. Богачев В. И., Колесников А. В. Интегрируемость абсолютно непрерывных преобразований мер и применения к оптимальному переносу. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 3, с. 433–456.
29. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. Треугольные преобразования мер. — Матем. сб., 2005, т. 196, № 3, с. 3–30.
30. Ивочкина Н. М. Построение априорных оценок для выпуклых решений уравнения Монжа–Ампера интегральным методом. — Укр. матем. журн., 1978, т. 30, № 1, с. 45–53.
31. Колесников А. В. Глобальные гёльдеровы оценки для оптимальной транспортировки. — Матем. заметки, 2010, т. 88, № 5, с. 708–728.
32. Овсиенко Ю. В., Жданов Р. И. Оценки для соболевских норм треугольных отображений. — Вестн. Моск. ун-та, 2007, т. 62, № 1, с. 1–4.
33. Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера. М.: Наука, 1988, 93 с.

Поступила в редакцию
1.IX.2011