Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Надарая, П. Бабилуа, Г. А. Сохадзе, Об интегральной квадратической мере уклонения одной непараметрической оценки бернуллиевской регрессии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 2, 322–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:03:40

© 2012 г. НАДАРАЯ Э. А.*, БАБИЛУА П. К.*,
СОХАДЗЕ Г. А.*

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ МЕРЕ
УКЛОНЕНИЯ ОДНОЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ
БЕРНУЛЛИЕВСКОЙ РЕГРЕССИИ**

В работе устанавливается предельное распределение интегрального квадратического отклонения непараметрической оценки типа ядра бернуллиевской функции регрессии. Построен критерий проверки гипотезы о бернуллиевской функции регрессии. Изучен вопрос состоятельности, и для некоторых сближающихся альтернатив исследована асимптотика поведения мощности.

Ключевые слова и фразы: бернуллиевская функция регрессии, мощность критерия, состоятельность, предельное распределение, плотность распределения.

Введение. Пусть случайная величина Y принимает два значения 1 и 0 с вероятностями («успеха») p и («неуспеха») $1-p$. Предположим, что вероятность «успеха» p является функцией от независимой переменной $x \in [0, 1]$, т.е. $p = p(x) = \mathbf{P}\{Y = 1 | x\}$ (см. [1]–[3]). Пусть x_i , $i = 1, \dots, n$, — точки деления интервала $[0, 1]$:

$$x_i = \frac{2i-1}{2n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть, далее, Y_i , $i = 1, \dots, n$, — независимые бернуллиевские случайные величины с $\mathbf{P}\{Y_i = 1 | x_i\} = p(x_i)$, $\mathbf{P}\{Y_i = 0 | x_i\} = 1 - p(x_i)$. Задача заключается в оценивании функции $p(x)$, $x \in [0, 1]$, по выборке $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Такая задача возникает, например, в биологии [1], [3], в области коррозионных исследований [4] и т.д.

В качестве оценки для $p(x)$ рассмотрим следующую статистику (см. [5], [6]):

$$\begin{aligned} \hat{p}_n(x) &= p_{1n}(x)p_{2n}^{-1}(x), \\ p_{\nu n}(x) &= \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) Y_i^{2-\nu}, \quad \nu = 1, 2, \end{aligned}$$

*Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, факультет точных и естественных наук, ул. Университетская, 3, 0143 Тбилиси, Грузия; e-mail: elizbar.nadaraya@tsu.ge; petre.babilua@tsu.ge; grigol.sokhadze@tsu.ge

где $K(x)$ — некоторая плотность распределения, удовлетворяющая сформулированным ниже требованиям, и $b_n \rightarrow 0$ — последовательность положительных чисел.

1. Предположения и обозначения. Предположим, что ядро $K(x) \geq 0$ выбрано так, чтобы оно было функцией с ограниченным изменением и удовлетворяло условиям: $K(x) = K(-x)$, $K(x) = 0$ при $|x| \geq \tau > 0$, $\int K(x) dx = 1$. Класс таких функций обозначим через $H(\tau)$.

Пусть $C^{(i)}$ обозначает множество функций $p(x)$, $0 \leq p(x) \leq 1$, $x \in [0, 1]$, имеющих ограниченные производные до i -го порядка, $i = 1, 2$.

Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U_n &= nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} [p_{1n}(x) - \mathbf{E} p_{1n}(x)]^2 dx, & \Omega_n(\tau) &= [\tau b_n, 1 - \tau b_n], \\ T_n &= nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} [\hat{p}_n(x) - p(x)]^2 p_{2n}^2(x) dx, \\ Q_{ij} &= \psi_n(x_i, x_j), & \psi_n(u, v) &= \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x-u}{b_n}\right) K\left(\frac{x-v}{b_n}\right) dx, \\ \sigma_n^2 &= 4(nb_n)^{-2} \sum_{k=2}^n p_k(1-p_k) \sum_{i=1}^{k-1} p_i(1-p_i) Q_{ik}^2, & p_i &= p(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \eta_{ij}^{(n)} &= \frac{2\varepsilon_i \varepsilon_j Q_{ij}}{nb_n \sigma_n}, & \varepsilon_i &= Y_i - p(x_i), \\ \xi_k^{(n)} &= \sum_{i=1}^{k-1} \eta_{ik}^{(n)}, & k &= 2, \dots, n, & \xi_1^{(n)} &= 0, & \xi_k^{(n)} &= 0, \quad k > n, \\ \mathcal{F}_k^{(n)} &= \sigma(\omega: \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k), \end{aligned}$$

т.е. $\mathcal{F}_k^{(n)}$ есть σ -алгебра, порождённая случайными величинами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, и $\mathcal{F}_0^{(n)} = (\emptyset, \Omega)$ (в дальнейшем для простоты записи вместо $\xi_k^{(n)}$ и $\eta_{ij}^{(n)}$ используем обозначения ξ_k и η_{ij}).

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Стохастическая последовательность $(\xi_k, \mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ является мартингал-разностью.

Лемма 2. Пусть $K(x) \in H(\tau)$ и $p(x)$, $0 \leq x \leq 1$, является также функцией с ограниченным изменением. Если $nb_n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K^{\nu_1}\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) K^{\nu_2}\left(\frac{y-x_i}{b_n}\right) p^{\nu_3}(x_i) \\ &= \frac{1}{b_n} \int_0^1 K^{\nu_1}\left(\frac{x-u}{b_n}\right) K^{\nu_2}\left(\frac{y-u}{b_n}\right) p^{\nu_3}(u) du + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

равномерно по $x, y \in [0, 1]$, где $\nu_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство соотношения (1) аналогично доказательству утверждения леммы 1 из [7, п. 1, лемма 1, формула (2), с. 1643].

Лемма 3. Пусть $K(x) \in H(\tau)$ и $p(x) \in C^{(1)}$. Если $nb_n^2 \rightarrow \infty$, то

$$b_n^{-1} \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2(p) = 2 \int_0^1 p^2(x)(1-p(x))^2 dx \int_{|x| \leq 2\tau} K_0^2(x) dx \quad (2)$$

и

$$\Delta_n = \mathbf{E} U_n = \Delta(p) + O(b_n) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right), \quad (3)$$

где

$$\Delta(p) = \int_0^1 p(x)(1-p(x)) dx \int_{|x| \leq \tau} K^2(x) dx, \quad K_0 = K * K.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= 2(nb_n)^{-2} \left\{ \sum_{k,i=1}^n p_k(1-p_k)p_i(1-p_i)Q_{ik}^2 - \sum_{i=1}^n p_i^2(1-p_i)^2Q_{ii}^2 \right\} \\ &= d_1(n) + d_2(n), \quad p_i = p(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко видеть, что

$$b_n^{-1} |d_2(n)| = 2n^{-2}b_n^{-3} \sum_{i=1}^n p_i^2(1-p_i)^2 \left(\int_{\Omega_n(\tau)} K^2\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) dx \right)^2 \leq c_1 \frac{1}{nb_n}. \quad (5)$$

Далее, пользуясь определением Q_{ki} , получаем

$$\begin{aligned} d_1(n) &= \frac{2}{(nb_n)^2} \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} \left(\sum_{i=1}^n p(x_i)(1-p(x_i)) K\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) \right. \\ &\quad \left. \times K\left(\frac{y-x_i}{b_n}\right) \right)^2 dx dy. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2, отсюда имеем

$$\begin{aligned} d_1(n) &= 2 \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} \left\{ \frac{1}{b_n} \int_0^1 p(u)(1-p(u)) \right. \\ &\quad \left. \times K\left(\frac{x-u}{b_n}\right) K\left(\frac{y-u}{b_n}\right) du \right\}^2 dx dy + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \\ &= 2 \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} \left\{ \int_{(x-1)/b_n}^{x/b_n} p(x-ub_n)(1-p(x-ub_n)) \right. \\ &\quad \left. \times K(u) K\left(\frac{y-x}{b_n} - u\right) du \right\}^2 dx dy + O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что $p(x) \in C^{(1)}$ и $[(x-1)/b_n, x/b_n] \supset [-\tau, \tau]$ для всех $x \in \Omega_n(\tau)$, из (6) находим, что

$$d_1(n) = 2 \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} p^2(x)(1-p(x))^2 K_0^2\left(\frac{x-y}{b_n}\right) dx dy + O(b_n^2) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

Без особого труда можно установить, что

$$\begin{aligned} b_n^{-1} d_1(n) &= 2 \int_0^1 p^2(x)(1-p(x))^2 \left(\int_{(x-1)/b_n+\tau}^{x/b_n-\tau} K_0^2(u) du \right) dx \\ &\quad + O(b_n) + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$b_n^{-1} d_1(n) \longrightarrow 2 \int_0^1 p^2(x)(1-p(x))^2 dx \int_{|x| \leq 2\tau} K_0^2(x) dx. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует утверждение (2).

Теперь докажем (3). Имеем

$$\mathbf{D}p_{1n}(x) = \frac{1}{(nb_n)^2} \sum_{i=1}^n K^2\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) p(x_i)(1-p(x_i)).$$

В силу леммы 2, отсюда находим

$$\mathbf{D}p_{1n}(x) = \frac{1}{nb_n^2} \int_0^1 K^2\left(\frac{x-u}{n}\right) p(u)(1-p(u)) du + \frac{1}{(nb_n)^2}. \quad (8)$$

Далее, учитывая, что $[(x-1)/b_n, x/b_n] \supset [-\tau, \tau]$ для всех $x \in \Omega_n(\tau)$, из (8) получаем

$$\mathbf{D}p_{1n}(x) = \frac{1}{nb_n} p(x)(1-p(x)) \int_{|u| \leq \tau} K^2(u) du + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{(nb_n)^2}\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} U_n = \int_0^1 p(x)(1-p(x)) dx \int_{|u| \leq \tau} K^2(u) du + O(b_n) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

Лемма 3 доказана.

3. Асимптотическая нормальность статистик U_n и T_n . Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $K(x) \in H(\tau)$ и $p(x) \in C^{(1)}$. Если $nb_n^2 \rightarrow \infty$, то

$$\frac{b_n^{-1/2}(U_n - \Delta(p))}{\sigma(p)} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

где $\Delta(p)$ и $\sigma(p)$ определены в лемме 3 и $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению, а $N(0, 1)$ — случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение $\Phi(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\frac{U_n - \Delta_n}{\sigma_n} = H_n^{(1)} + H_n^{(2)},$$

где

$$H_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad H_n^{(2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^2 - \mathbf{E} \varepsilon_i^2) Q_{ii}}{nb_n \sigma_n}.$$

Покажем, что $H_n^{(2)}$ сходится к нулю по вероятности. В самом деле,

$$\mathbf{D}H_n^{(2)} \leq \frac{1}{(nb_n \sigma_n)^2} \left[3 \sum_{i=1}^n \left(p_i^2 (1 - p_i)^2 + p_i (1 - p_i) (1 - 6p_i (1 - p_i)) \right) \right] Q_{ii}^2,$$

где $p_i = p(x_i)$.

Так как $Q_{ij} \leq c_2 b_n$ и $b_n^{-1} \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2(p) > 0$ при $n \rightarrow \infty$, то отсюда следует, что

$$\mathbf{D}H_n^{(2)} \leq c_3 \frac{1}{nb_n} \rightarrow 0.$$

Стало быть, $H_n^{(2)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ (здесь и ниже $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ обозначает сходимость по вероятности).

Теперь покажем, что $H_n^{(1)} \xrightarrow{d} N(0, 1)$. С этой целью проверим, что применимы следствия 2 и 6 теоремы 2 из работы [8]. Нужно доказать выполнение имеющихся в этих утверждениях условий, гарантирующих асимптотическую нормальность квадратично интегрируемой мартингал-разности, чем, согласно лемме 1, является наша последовательность $(\xi_k, \mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \xi_k^2 = 1$. Асимптотическая нормальность будет иметь место, если при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left[\xi_k^2 I(|\xi_k| \geq \varepsilon) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad (9)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 1. \quad (10)$$

В [8] доказано, что при выполнении (10) и условия $\sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ имеет место и условие (9).

Поскольку при $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \geq \varepsilon \right\} \leq \varepsilon^{-4} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \xi_k^4,$$

то, согласно приводимому ниже соотношению (11), для доказательства

$$H_n^{(1)} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

нам остается проверить лишь (10). Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 - 1 \right)^2 \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

т.е., поскольку $\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \xi_k^2 = 1$, что

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right)^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \xi_k^4 + 2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \mathbf{E} \xi_{k_1}^2 \xi_{k_2}^2 \longrightarrow 1.$$

В первую очередь установим, что

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \xi_k^4 \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Принимая во внимание определения ξ_k и η_{ij} , напомним

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \xi_k^4 = I_n^{(1)} + I_n^{(2)},$$

где

$$I_n^{(1)} = \frac{16}{(nb_n)^4 \sigma_n^4} \sum_{k=2}^n \mathbf{E} \epsilon_k^4 \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{E} \epsilon_j^4 Q_{jk}^4,$$

$$I_n^{(2)} = \frac{48}{(nb_n)^4 \sigma_n^4} \sum_{k=2}^n \sum_{i \neq j} \mathbf{E} \epsilon_j^2 \mathbf{E} \epsilon_i^2 Q_{jk}^2 Q_{ik}^2.$$

Поскольку

$$Q_{ij} \leq c_3 b_n, \quad \mathbf{E} \epsilon_j^4 = (1 - p_i)^4 p_i + p_i^4 (1 - p_i) \leq c_4,$$

$$\mathbf{E} \epsilon_j^2 \leq \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad b_n^{-1} \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2(p),$$

то $I_n^{(1)} = O(1/(nb_n)^2)$, $I_n^{(2)} = O(1/(nb_n^2))$. Стало быть,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \xi_k^4 \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Покажем теперь, что

$$2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \mathbf{E} \xi_{k_1}^2 \xi_{k_2}^2 \longrightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из определения ξ_i следует, что

$$\xi_{k_1}^2 \xi_{k_2}^2 = B_{k_1 k_2}^{(1)} + B_{k_1 k_2}^{(2)} + B_{k_1 k_2}^{(3)} + B_{k_1 k_2}^{(4)},$$

где

$$\begin{aligned} B_{k_1 k_2}^{(1)} &= \sigma_2(k_1) \sigma_2(k_2), & B_{k_1 k_2}^{(2)} &= \sigma_2(k_1) \sigma_1(k_2), \\ B_{k_1 k_2}^{(3)} &= \sigma_1(k_1) \sigma_2(k_2), & B_{k_1 k_2}^{(4)} &= \sigma_1(k_1) \sigma_1(k_2), \\ \sigma_1(k) &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq k-1} \eta_{ik} \eta_{jk}, & \sigma_2(k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \eta_{ik}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \mathbf{E} \xi_{k_1}^2 \xi_{k_2}^2 = \sum_{i=1}^4 A_n^{(i)},$$

где

$$A_n^{(i)} = 2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \mathbf{E} B_{k_1 k_2}^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Рассмотрим $A_n^{(3)}$. Используя определение η_{ij} , легко показать, что $\mathbf{E} B_{k_1 k_2}^{(3)} = 0$ и, следовательно,

$$A_n^{(3)} = 0. \quad (12)$$

Оценим $A_n^{(2)}$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} B_{k_1 k_2}^{(2)}| &= \frac{16}{n^4 b_n^4 \sigma_n^4} \left| \sum_{i=1}^{k_1-1} \mathbf{E} \varepsilon_i^3 \mathbf{E} \varepsilon_{k_1}^3 \mathbf{E} \varepsilon_{k_2}^2 Q_{ik_1}^2 Q_{ik_2} Q_{k_1 k_2} \right| \\ &= \frac{16}{(n^4 b_n \sigma_n)^4} \left| \sum_{i=1}^{k_1-1} (1-p_i) p_i (1-2p_i) (1-p_{k_1}) p_{k_1} (1-2p_{k_1}) (1-p_{k_2}) \right. \\ &\quad \left. \times p_{k_2} (1-2p_{k_2}) Q_{ik_1}^2 Q_{ik_2} Q_{k_1 k_2} \right| \\ &\leq \frac{c_4 (k_1 - 1)}{(n \sigma_n)^4}. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} (k_1 - 1) = O(n^3)$ и $b_n^{-1} \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2(p) > 0$, то отсюда получим

$$|A_n^{(2)}| \leq \frac{c_5 n^3}{n^4 \sigma_n^4} = c_5 \frac{1}{n b_n^2 (b_n^{-1} \sigma_n^2)^2} = O\left(\frac{1}{n b_n^2}\right). \quad (13)$$

Теперь установим, что $A_n^{(1)} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, что

$$A_n^{(1)} = 2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \mathbf{E} B_{k_1 k_2}^{(1)} = D_n^{(1)} + D_n^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} D_n^{(1)} &= 2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \mathbf{E} \eta_{ik_1}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{k_2-1} \mathbf{E} \eta_{jk_2}^2 \right), \\ D_n^{(2)} &= 2 \left(\sum_{k_1 < k_2} \mathbf{E} B_{k_1 k_2}^{(1)} - \sum_{k_1 < k_2} \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \mathbf{E} \eta_{ik_1}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{k_2-1} \mathbf{E} \eta_{jk_2}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Из определения σ_n^2 следует, что

$$D_n^{(1)} = 1 - \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E} \eta_{ik}^2 \right)^2.$$

Но

$$\sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E} \eta_{ik}^2 \right)^2 \leq c_6 \frac{b_n^4 n^3}{(nb_n)^4 \sigma_n^4} = O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right).$$

Таким образом,

$$D_n^{(1)} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Далее, покажем, что $D_n^{(2)} \rightarrow 0$. Легко видеть, что

$$D_n^{(2)} = 2 \sum_{k_1 < k_2} \left[\sum_{i=1}^{k_1-1} \text{cov}(\eta_{ik_1}^2, \eta_{ik_2}^2) + \sum_{i=1}^{k_1-1} \text{cov}(\eta_{ik_1}^2, \eta_{k_1 k_2}^2) \right].$$

Но

$$\mathbf{E} \eta_{ik_1}^2 \eta_{ik_2}^2 \leq c_7 \frac{Q_{ik_1}^2 Q_{ik_2}^2}{(nb_n)^4 \sigma_n^4} \leq c_8 \frac{1}{n^4 \sigma_n^4}.$$

Точно так же

$$\mathbf{E} \eta_{ij}^2 = O\left(\frac{1}{n^2 \sigma_n^2}\right).$$

Значит,

$$\text{cov}(\eta_{ik_1}^2, \eta_{ik_2}^2) = O\left(\frac{1}{n^4 b_n^4}\right). \quad (15)$$

Далее, поскольку $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} (k_1 - 1) = O(n^3)$, из (15) следует

$$D_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{n \sigma_n^4}\right) = O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \quad (16)$$

Итак, согласно (14) и (16),

$$A_n^{(1)} = 1 + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \quad (17)$$

Наконец, докажем, что $A_n^{(4)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь определением η_{ij} и соотношениями $Q_{ij} \geq 0$ и $\mathbf{E}(Y_i - p(x_i))^2 = p(x_i)(1 - p(x_i)) \leq 1/4$, получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} B_{k_1, k_2}^{(4)}| &= 4 \left| \sum_{1 \leq t < s \leq k_1 - 1} \mathbf{E} \eta_{sk_1} \eta_{tk_1} \eta_{sk_2} \eta_{tk_2} \right| \\ &= 4 \frac{1}{n^4 b_n^4 \sigma_n^4} \left| \sum_{1 \leq t < s \leq k_1 - 1} \mathbf{E} \varepsilon_s^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{k_1}^2 \varepsilon_{k_2}^2 Q_{sk_1} Q_{tk_1} Q_{sk_2} Q_{tk_2} \right| \\ &\leq \frac{c_8}{n^4 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{1 \leq t < s \leq k_1 - 1} Q_{sk_1} Q_{tk_1} Q_{sk_2} Q_{tk_2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|A_n^{(4)}| \leq \frac{c_9}{n^2 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1 < k_2} A_{k_1 k_2},$$

где

$$A_{k_1 k_2} = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq t < s \leq k_1 - 1} Q_{s k_1} Q_{t k_1} Q_{s k_2} Q_{t k_2}.$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 < k_2} A_{k_1 k_2} &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k_1, k_2=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n Q_{s k_1} Q_{t k_1} Q_{s k_2} Q_{t k_2} \\ &= \sum_{k_1, k_2=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Q_{t k_1} Q_{t k_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |A_n^{(4)}| &\leq c_9 \frac{1}{n^2 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1, k_2=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Q_{t k_1} Q_{t k_2} \right)^2 \\ &= c_9 \frac{1}{n^2 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1, k_2=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) K\left(\frac{x-x_{k_1}}{b_n}\right) dx \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{y-x_i}{b_n}\right) K\left(\frac{y-x_{k_2}}{b_n}\right) dy \right)^2 \\ &= c_9 \frac{1}{n^2 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1, k_2=1}^n \left[\int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x-x_{k_1}}{b_n}\right) K\left(\frac{y-x_{k_2}}{b_n}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) K\left(\frac{y-x_i}{b_n}\right) dx dy \right]^2. \quad (18) \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись леммой 2, из (18) можно заключить, что

$$\begin{aligned} |A_n^{(4)}| &\leq c_9 \frac{1}{n^2 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1, k_2=1}^n \left\{ \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x-x_{k_1}}{b_n}\right) K\left(\frac{y-x_{k_2}}{b_n}\right) dx dy \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int_0^1 K\left(\frac{x-u}{b_n}\right) K\left(\frac{y-u}{b_n}\right) du + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\}^2 \\ &= c_{10} \frac{1}{b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1, k_2=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \int_0^1 \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x-x_{k_1}}{b_n}\right) K\left(\frac{y-x_{k_2}}{b_n}\right) \right. \\ &\quad \left. \times K\left(\frac{x-u}{b_n}\right) K\left(\frac{y-u}{b_n}\right) du dx dy \right\}^2 \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n b_n^2}\right). \quad (19) \end{aligned}$$

Аналогично, если в (19) снова применить лемму 2, то можно показать, что

$$\begin{aligned} |A_n^{(4)}| &\leq \frac{c_{10}}{b_n^4 \sigma_n^4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \psi_n(u_1, v_2) \psi_n(u_1, v_1) \\ &\quad \times \psi_n(u_2, v_1) \psi_n(u_2, v_2) du_1 du_2 dv_1 dv_2 \\ &\quad + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\psi_n(x, y) = \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{u-x}{b_n}\right) K\left(\frac{u-y}{b_n}\right) du.$$

Теперь оценим интеграл I_n , входящий в (20). Имеем

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \psi_n(u_2, v_1) \psi_n(u_2, v_2) dv_1 dv_2 du_2 \int_0^1 \psi_n(u_1, v_2) \psi_n(u_1, v_1) du_1.$$

Но поскольку $[(x-1)/b_n, x/b_n] \supseteq [-\tau, \tau]$ для всех $x \in \Omega_n(\tau)$, то

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \psi_n(u_1, v_2) \psi_n(u_1, v_1) du_1 \\ &= b_n \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{t-v_2}{b_n}\right) K\left(\frac{z-v_1}{b_n}\right) dt dz \int_{(t-1)/b_n}^{t/b_n} K(\xi) K\left(\frac{t-z}{b_n} - \xi\right) d\xi \\ &= b_n \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{t-v_2}{b_n}\right) K\left(\frac{z-v_1}{b_n}\right) K_0\left(\frac{z-t}{b_n}\right) dt dz \\ &\leq c_{11} b_n^3, \quad K_0 = K * K. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|A_n^{(4)}| \leq c_{12} \frac{1}{b_n \sigma_n^4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \psi_n(u_2, v_1) \psi_n(u_2, v_2) du_2 dv_1 dv_2 + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \quad (21)$$

Повторяя те же рассуждения для интеграла, входящего в (21), окончательно получим

$$\begin{aligned} |A_n^{(4)}| &\leq c_{13} \frac{b_n^4}{b_n \sigma_n^4} + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right) = O\left(\frac{b_n^4}{b_n^3 (b_n^{-1} \sigma_n^2)^2}\right) + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right) \\ &= O(b_n) + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Собрав вместе соотношения (12), (13), (17) и (22), заключаем, что

$$2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \mathbf{E} \xi_{k_1}^2 \xi_{k_2}^2 \longrightarrow 1.$$

Отсюда и из (11) вытекает, что

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 - 1 \right)^2 \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Стало быть,

$$\frac{U_n - \Delta_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0, 1). \quad (23)$$

Далее, используя лемму 3, из (23) находим

$$b_n^{-1/2} \frac{U_n - \Delta(p)}{\sigma(p)} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $K(x) \in H(\tau)$, $p(x) \in C^{(2)}$. Тогда, если $nb_n^2 \rightarrow \infty$ и $nb_n^4 \rightarrow 0$, то

$$b_n^{-1/2} \frac{T_n - \Delta(\rho)}{\sigma(p)} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $T_n = U_n + R_n^{(1)} + R_n^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} R_n^{(1)} &= 2nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} [p_{1n}(x) - \mathbf{E} p_{1n}(x)] [\mathbf{E} p_{1n}(x) - p_{2n}(x)p(x)] dx, \\ R_n^{(2)} &= nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} [\mathbf{E} p_{1n}(x) - p_{2n}(x)p(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{E} p_{1n}(x) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{b_n}\right) p(x_i).$$

Отсюда в силу леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} p_{1n}(x) &= \frac{1}{b_n} \int_0^1 K\left(\frac{x - u}{b_n}\right) p(u) du + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \\ &= \int_{(x-1)/b_n}^{x/b_n} K(t) p(x - b_n t) dt + O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку $p(x) \in C^{(2)}$ и $[(x-1)/b_n, x/b_n] \supset [-\tau, \tau]$ для всех $x \in \Omega_n(\tau)$, то из (24) находим

$$\mathbf{E} p_{1n}(x) = p(x) + O(b_n^2) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \quad (25)$$

Далее, согласно лемме 2,

$$\begin{aligned} p_{2n}(x) &= \frac{1}{b_n} \int_0^1 K\left(\frac{x - u}{b_n}\right) du + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} K(u) du + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24), (25) и (26) вытекает, что

$$b_n^{-1/2} R_n^{(2)} \leq c_{14} \left(n b_n^{9/2} + b_n^{3/2} + \frac{1}{n b_n^{3/2}} \right) \rightarrow 0. \quad (27)$$

Оценим теперь $b_n^{-1/2} \mathbf{E} |R_n^{(1)}|$. Из (25) и (26) следует неравенство

$$b_n^{-1/2} \mathbf{E} |R_n^{(1)}| \leq c_{15} n b_n^{1/2} \left[b_n^2 + \frac{1}{n b_n} \right] \int_{\Omega_n(\tau)} \left(\mathbf{E} [p_{1n}(x) - \mathbf{E} p_{1n}(x)]^2 \right)^{1/2} dx. \quad (28)$$

Но, согласно лемме 2, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [p_{1n}(x) - \mathbf{E} p_{1n}(x)]^2 &= \frac{1}{n b_n} p(x)(1-p(x)) \int_{|u| \leq \tau} K^2(u) du \\ &\quad + O\left(\frac{1}{(n b_n)^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (28) находим, что

$$b_n^{-1/2} \mathbf{E} |R_n^{(1)}| \leq c_{16} \left(\sqrt{n} b_n^2 + \frac{1}{\sqrt{n} b_n} \right) \rightarrow 0. \quad (29)$$

Утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из теоремы 1 и соотношений (27) и (29).

4. Применение статистики T_n для проверки гипотезы.

Утверждение теоремы 2 позволяет конструировать критерий асимптотического уровня α , $0 < \alpha < 1$, для проверки гипотезы H_0 , согласно которой $p(x) = p_0(x)$, $x \in \Omega_n(\tau)$. Критическая область устанавливается неравенством

$$T_n \geq q_n(\alpha), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} q_n(\alpha) &= \Delta(p_0) + \lambda_\alpha \sqrt{b_n} \sigma(p_0), \\ \Delta(p_0) &= \int_0^1 p_0(x)(1-p_0(x)) dx \int_{|u| \leq \tau} K^2(u) du, \\ \sigma^2(p_0) &= 2 \int_0^1 p_0^2(x)(1-p_0^2(x)) dx \int_{|u| \leq 2\tau} K_0^2(u) du, \end{aligned}$$

а λ_α определяется равенством $\Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$.

Теперь исследуем асимптотические свойства критерия (30) (т.е. поведение функции мощности при $n \rightarrow \infty$). Прежде всего рассмотрим вопрос, является ли критерий состоятельным. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда

$$\Pi_n(p) = \mathbf{P}_{H_1}\{T_n \geq q_n(\alpha)\} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

т.е. критерий, определенный в (30), состоятелен против любой альтернативы H_1 : $p(x) \neq p_0(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Доказательство. Обозначим

$$z_n(p) = b_n^{-1/2} \left(nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} [\hat{p}_n(x) - p(x)]^2 p_{2n}^2(x) dx - \Delta(p) \right) \sigma^{-1}(p).$$

Нетрудно показать, что

$$\Pi_n(p) = \mathbf{P}_{H_1} \left\{ z_n(p) \geq -nb_n^{1/2} \left(\int_0^1 (p(x) - p_0(x))^2 dx + o_{\mathbf{P}}(1) \right) \right\}.$$

Поскольку $z_n(p)$ распределена асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$ при гипотезе H_1 и $nb_n^{1/2} \rightarrow \infty$, то $\Pi_n(p) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема 3 доказана.

Таким образом, мощность критерия, основанного на T_n , при любой фиксированной альтернативе стремится к 1. Однако, если при изменении n альтернатива изменяется, приближаясь к основной гипотезе H_0 , то мощность критерия уже не обязательно будет сходиться к 1. Так, например, рассмотрим последовательность близких к гипотезе H_0 альтернатив типа Питмена:

$$H_1: \quad p_1^{(n)}(x) = p_0(x) + \gamma_n \varphi(x) + o(\gamma_n), \quad \gamma_n \rightarrow 0. \quad (31)$$

Теорема 4. Пусть $p_0(x)$, $\varphi(x) \in C^{(2)}$, а $K(x) \in H(\tau)$. Если $b_n = n^{-\delta}$, $\gamma_n = n^{-1/2+\delta/4}$, $1/4 < \delta < 1/2$, то статистика $b_n^{-1/2}(T_n - \Delta(p_0))\sigma^{-1}(p_0)$ при альтернативе H_1 распределена в пределе нормально с параметрами

$$\left(\frac{1}{\sigma(p_0)} \int_0^1 \varphi^2(x) dx, 1 \right),$$

т.е. предельная мощность критерия равна

$$1 - \Phi \left(\lambda_\alpha - \frac{1}{\sigma(p_0)} \int_0^1 \varphi^2(u) du \right).$$

Доказательство. Представим T_n в виде

$$\begin{aligned} T_n &= nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} (\hat{p}(x) - p_1^{(n)}(x))^2 p_{2n}^2(x) dx \\ &\quad + nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} (p_1^{(n)}(x) - p_0(x))^2 p_{2n}^2(x) dx \\ &\quad + 2nb_n \int_{\Omega_n(\tau)} (\hat{p}_n(x) - p_1^{(n)}(x))(p_1^{(n)}(x) - p_0(x))^2 p_{2n}^2(x) dx \\ &= T_n^* + A_1(n) + A_2(n). \end{aligned}$$

Поскольку $p_{2n}(x) = 1 + O(1/(nb_n))$ равномерно по $x \in \Omega_n(\tau)$, то

$$b_n^{-1/2} A_1(n) = \int_0^1 \varphi^2(u) du + o(1). \quad (32)$$

Обозначим

$$D_n = \int_{\Omega_n(\tau)} (p_{1n}(x) - \mathbf{E}_1 p_{1n}(x)) \varphi(x) p_{2n}(x) dx,$$

где $\mathbf{E}_1$ — математическое ожидание при гипотезе H_1 . Тогда

$$\begin{aligned} b_n^{-1/2} A_2(n) &= nb_n^{1/2} \gamma_n D_n + nb_n^{1/2} \gamma_n \left(b_n^2 + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \right) \\ &= nb_n^{1/2} \gamma_n D_n + O(nb_n^{5/2} \gamma_n) + O\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{b_n}}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь покажем, что $nb_n^{1/2} \gamma_n D_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |D_n| &\leq (\mathbf{E} D_n^2)^{1/2} = \left\{ \frac{1}{nb_n} \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} p_{2n}(x) p_{2n}(y) dx dy \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{b_n}\right) K\left(\frac{y-x_i}{b_n}\right) p_1^{(n)}(x_i) (1-p_1^{(n)}(x_i)) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Далее, используя лемму 2, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |D_n| &\leq \left\{ \frac{1}{nb_n} \int_{\Omega_n(\tau)} \int_{\Omega_n(\tau)} p_{2n}(x) p_{2n}(y) dx dy \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{b_n} \int_0^1 K\left(\frac{u}{b_n}\right) K\left(\frac{y-u}{b_n}\right) p_1^{(n)}(u) (1-p_1^{(n)}(u)) du \right. \\ &\quad \left. \left. + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \right] \right\}^{1/2} \leq c_{17} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{nb_n^2} \right). \end{aligned}$$

Стало быть, $nb_n^{1/2} \gamma_n \mathbf{E} |D_n| \leq c_{18} n^{-\delta/4}$. Значит,

$$nb_n^{1/2} \gamma_n D_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (34)$$

Далее, случайная величина $b_n^{-1/2} (T_n^* - \Delta(p_1^{(n)})) \sigma^{-1}(p_1^{(n)})$ асимптотически нормальна со средним 0 и дисперсией 1. Отсюда и из (32), (33) и (34) следует доказательство теоремы 4.

З а м е ч а н и е 1. Стоит подчеркнуть, что оценка $\hat{p}_n(x)$ около границы интервала $[0, 1]$ ведет себя хуже, чем во внутреннем интервале $[\tau b_n, 1 - \tau b_n]$ (см. [9]). Поэтому мы рассматриваем интегральное квадратическое уклонение на $\Omega_n(\tau)$ — для того чтобы избежать трудностей, связанных с указанным граничным эффектом; однако можно показать,

что при условиях теоремы 1 и 2 полученные выше результаты справедливы и для модифицированной оценки (см. [9], [10]) функции $p(x)$.

З а м е ч а н и е 2. Результаты, близкие к теоремам 1 и 2, приведены в работах [11] и [12]. К сожалению, в доказательстве основной теоремы 1 из [11] имеются некоторые неточности [11, с. 92]. Кроме того, в ней не установлена в явном виде асимптотика нормирующих величин, что затрудняет применение этой теоремы для задач статистики.

З а м е ч а н и е 3. Пусть x_i — точки деления интервала $[0, 1]$, выбранные так, что $H(x_j) = (2j - 1)/(2n)$, $j = 1, \dots, n$, где $H(x) = \int_0^x h(u) du$, $h(u)$ — какая-нибудь известная непрерывная плотность распределения на $[0, 1]$. В этом случае рассуждениями, аналогичными приводимым выше, можно получить обобщение результатов данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Efromovich S.* Nonparametric Curve Estimation. Methods, Theory, and Applications. New York: Springer-Verlag, 1999, 411 p.
2. *Copas J. B.* Plotting p against x . — Appl. Statist., 1983, v. 32, № 1, p. 25–31.
3. *Okumura H., Naito K.* Weighted kernel estimators in nonparametric binomial regression. — J. Nonparametr. Statist., 2004, v. 16, № 1–2, p. 39–62.
4. *Манджгаладзе К. В.* Об одной оценке функции распределения и ее моментов. — Сообщ. АН ГрССР, 1986, т. 124, № 2, с. 261–263.
5. *Надарая Э. А.* Об оценке регрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 1, с. 157–159.
6. *Watson G. S.* Smooth regression analysis. — Sankhyā Ser. A, 1964, v. 26, p. 359–372.
7. *Nadaraya E., Babilua P., Sokhadze G.* Estimation of a distribution function by an indirect sample. — Укр. матем. журн., 2010, т. 62, № 12, с. 1642–1658.
8. *Лунцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 4, с. 683–703.
9. *Hart J. D., Wehrly Th. E.* Kernel regression when the boundary region is large, with an application to testing the adequacy of polynomial models. — J. Amer. Statist. Assoc., 1992, v. 87, № 420, p. 1018–1024.
10. *Абсава Р. М., Надарая Э. А.* Некоторые задачи теории непараметрического оценивания функциональных характеристик закона распределения наблюдений. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 2005, 247 с.
11. *Ioannides D. A.* Integrated square error of nonparametric estimators of regression function: the fixed design case. — Statist. Probab. Lett., 1992, v. 15, № 2, p. 85–94.
12. *Absava R., Nadaraya E.* On quadratic measure of deviation of non-parametric estimation of the Gasser–Müller regression function. — Proc. A. Razmadze Math. Inst., 2000, v. 122, p. 1–14.

Поступила в редакцию
28.X.2011