Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Лагутин, Одна модель проникновения газа в пористую среду, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 2, 377–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:21:55

8. Vervaat W. A relation between Brownian bridge and Brownian excursion. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 1, p. 143–149.
9. Biane Ph. Relations entre pont et excursion du mouvement brownien réel. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1986, v. 22, № 1, p. 1–7.

Поступила в редакцию
29.IX.2011

© 2012 г.

ЛАГУТИН М. Б.*

ОДНА МОДЕЛЬ ПРОНИКНОВЕНИЯ ГАЗА В ПОРИСТУЮ СРЕДУ

В работе изучается одномерная модель проникновения газа в пористую среду. Размеры пор и прочности перегородок предполагаются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. В предположениях конечности дисперсии размера пор, ограниченности прочности перегородок и степенного поведения ее функции распределения доказана предельная теорема для числа пробитых перегородок.

Ключевые слова и фразы: процесс восстановления, момент выхода случайного блуждания за случайную границу, закон Вейбулла, асимптотическая независимость.

Представим себе, что газ объема V , находящийся под начальным давлением P , распространяется в пористой среде, которую в простейшем случае будем считать одномерной последовательностью ячеек, имеющих объемы V_i и разделенных перегородками прочности X_i , $i = 1, 2, \dots$.

Положим $T = PV$. После проникновения газа в первую пору его давление падает до величины P_1 , которая находится из уравнения $P_1(V + V_1) = PV = T$, т.е. $P_1 = T/(V + V_1)$. Если давление P_1 превышает прочность X_1 перегородки, разделяющей первую и вторую ячейки, то она разрушается, и газ заполняет объем $V + V_1 + V_2$ (при $P_1 = X_1$ будем считать, что перегородка тоже разрушается). Этот процесс продолжается до момента N_T , когда впервые оказывается, что $P_k < X_k$, где $P_k = T/S_k$, $S_k = V + \sum_{i=1}^k V_i$, $S_0 = V$. Подобную модель для одинаковых неслучайных объемов V_i рассматривал Д. А. Онищенко [1]. Предполагается, что выполняются следующие условия.

A1. Величина V неслучайна, $V_1, V_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные положительные случайные величины с функцией распределения $G(x) = \mathbf{P}(V_1 \leq x)$, конечным математическим ожиданием $\mu = \mathbf{M}V_1$ и дисперсией $\sigma^2 = \mathbf{D}V_1 > 0$.

A2. $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные положительные случайные величины с функцией распределения $F(x) = \mathbf{P}(X_1 \leq x)$ такой, что $F(c) = 1$ при некотором $c > 0$, $1 - F(x) \sim b(c - x)^\alpha$ при $x \rightarrow c-$ и некоторых $b > 0$, $\alpha > 0$.

A3. Последовательности $\{V_i\}$ и $\{X_i\}$ независимы.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_T > m) &= \mathbf{P}(P_1 \geq X_1, \dots, P_m \geq X_m) = \mathbf{P}(X_1 S_1 \leq T, \dots, X_m S_m \leq T) \\ &= \mathbf{P}(\hat{X}_1 \hat{S}_1 \leq \hat{T}, \dots, \hat{X}_m \hat{S}_m \leq \hat{T}), \end{aligned}$$

где $\hat{V}_i = V_i/\mu$, $\hat{X}_i = X_i/c$, $\hat{T} = T/(\mu c)$. Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $\mu = c = 1$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: lagutinmb@mail.ru

Теорема 1. При сделанных предположениях и $T \rightarrow \infty$ справедливы следующие утверждения:

1) при $\alpha < 1$ распределения величин $(N_T - T)T^{-1/2}$ сходятся к нормальному закону $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$;

2) при $\alpha > 1$ распределения величин $(N_T - T)T^{-\alpha/(\alpha+1)}$ сходятся к закону Вейбулла с функцией распределения

$$W_\alpha(x) = 1 - e^{-bx^{\alpha+1}/(\alpha+1)}, \quad x \geq 0; \quad (1)$$

3) при $\alpha = 1$ распределения величин $(N_T - T)T^{-1/2}$ сходятся к свертке нормального закона $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и weibulloвого закона (1) с $\alpha = 1$, а предельная функция распределения принимает вид

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \gamma\Phi\left(\frac{\gamma x}{\sigma}\right)e^{-b\gamma^2 x^2/2}, \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения закона $\mathcal{N}(0, 1)$, $\gamma = \sigma^{-1}/\sqrt{b + \sigma^{-2}}$.

Доказательство. Случайный момент $N_T = \min\{i \geq 1: S_i > TX_i^{-1}\}$ представляет собой момент выхода случайного блуждания $\{S_i\}$ за случайную границу $\{TX_i^{-1}\}$. Учитывая, что $X_i^{-1} \geq 1$, т.е. $TX_i^{-1} \geq T$, введем момент

$$\tau_T = \min\{i \geq 1: S_i > T\}.$$

Если величина перескока $\Delta_T = S_{\tau_T} - T \geq 0$ уровня T превышает $TX_{\tau_T}^{-1} - T$, то $\tau_T = N_T$. В противном случае $N_T > \tau_T$. Обозначим ради краткости $V'_i = V_{\tau_T+i}$, $Y_i = X_{\tau_T+i}^{-1} - 1$. Положим

$$\nu_T = \min\left\{k \geq 0: \Delta_T + \sum_{i=1}^k V'_i > TY_k\right\} = N_T - \tau_T.$$

(Здесь и далее сумму $\sum_{i=1}^k$ полагаем равной 0 при $k = 0$.)

Хорошо известно (см. [2, глава 9, § 2]), что случайные величины $\tau_T, V_1, \dots, V_{\tau_T}$ и σ -алгебра, порожденная последовательностью $V'_1, V'_2, \dots$, независимы, причем $V'_1, V'_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(x)$. Таким образом, переносим начало координат в точку (τ_T, T) , получим случайное блуждание, выходящее из точки с координатами $(0, \Delta_T)$.

С учетом введенных обозначений имеем представление

$$\frac{N_T - T}{\sqrt{T}} = \frac{\tau_T - T}{\sqrt{T}} + \frac{\nu_T}{\sqrt{T}}. \quad (3)$$

В силу центральной предельной теоремы для процесса восстановления распределение первого слагаемого в правой части (3) сходится к закону $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (см. [2, глава 9, § 2, лемма 1]).

Ниже мы докажем (см. лемму 2), что распределения величин $\nu_T T^{-\alpha/(\alpha+1)}$ сходятся к закону Вейбулла с функцией распределения $W_\alpha(x)$ из (1).

Если $\alpha < 1$, то $\alpha/(\alpha+1) < 1/2$. Поэтому $\nu_T/\sqrt{T} \xrightarrow{P} 0$. Отсюда и из представления (3) вытекает (лемма Слуцкого) утверждение 1) теоремы.

Если $\alpha > 1$, то $\alpha/(\alpha+1) > 1/2$. Поэтому из асимптотической нормальности τ_T следует, что $(\tau_T - T)/T^{\alpha/(\alpha+1)} \xrightarrow{P} 0$. Отсюда, заменяя знаменатель в (3) на $T^{\alpha/(\alpha+1)}$, получаем утверждение 2) теоремы.

Наконец, в случае $\alpha = 1$ воспользуемся тем, что слагаемые в правой части (3) асимптотически независимы (см. лемму 3). Тогда из асимптотической нормальности τ_T и асимптотической weibulloвости ν_T следует, что предельный закон для $(N_T - T)/\sqrt{T}$ является сверткой этих распределений (см., например, лемму 2.9.1 из [3]). Нетрудно убедиться, что функция распределения свертки выражается формулой (2).

Перейдем к доказательству асимптотической вейбулловости ν_T .

Известно, что при выполнении условия A1 распределение перескока Δ_T сходится к невырожденному закону при $T \rightarrow \infty$ (см. [2, глава 9, § 2]). Поэтому перескок оказывается пренебрежимо малым относительно масштабного множителя $T^{\alpha/(\alpha+1)}$. Покажем, что он не влияет на асимптотику момента ν_T . Для этого заменим случайную величину Δ_T на число $c_T \geq 0$, где $c_T \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, так что $\mathbf{P}(\Delta_T \leq c_T) \rightarrow 1$, и введем $\tilde{S}_k = c_T + \sum_{i=1}^k V'_i$, $\tilde{\nu}_T = \min\{i \geq 0: \tilde{S}_i > TY_i\}$.

Лемма 1. Если $c_T = o(T^{\alpha/(\alpha+1)})$, то $\mathbf{P}(\tilde{\nu}_T T^{-\alpha/(\alpha+1)} \leq x) \rightarrow W_\alpha(x)$ при $T \rightarrow \infty$.

Доказательство. Для $x > 0$ положим $m = [xT^{\alpha/(\alpha+1)}]$ (где $[\cdot]$ — целая часть числа) и $H(x) = \mathbf{P}(Y_i < x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{\nu}_T > m) &= \mathbf{P}(\tilde{S}_i \leq TY_i, i = 0, \dots, m) \\ &= \int \cdots \int \prod_{i=0}^m I_{\{\tilde{S}_i \leq TY_i\}} dH(y_0) \cdots dH(y_m) dG(v_1) \cdots dG(v_m) \\ &= \int \cdots \int \prod_{i=0}^m \mathbf{P}\left(Y_i \geq \frac{\tilde{S}_i}{T}\right) dG(v_1) \cdots dG(v_m) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=0}^m \left(1 - H\left(\frac{\tilde{S}_i}{T}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Далее мы покажем, что при $T \rightarrow \infty$

$$\prod_{i=0}^m \left(1 - H\left(\frac{\tilde{S}_i}{T}\right)\right) \rightarrow e^{-bx^{\alpha+1}/(\alpha+1)} \quad (\text{п.н.}). \quad (4)$$

Поскольку сомножители в произведении не превосходят 1, применяя теорему Лебега, получаем утверждение леммы. Итак, осталось установить сходимость (4).

Легко проверить, что условие A2 влечет асимптотику $H(x) \sim bx^\alpha$ при $x \rightarrow 0+$. Отсюда имеем $-\ln(1 - H(x)) \sim bx^\alpha$ при $x \rightarrow 0+$. Теперь покажем, что $\tilde{S}_i/T \leq \tilde{S}_m/T \rightarrow 0$ (п.н.). Действительно,

$$\frac{\tilde{S}_m}{T} = \frac{c_T}{T} + \frac{m}{T} \frac{V'_1 + \cdots + V'_m}{m}.$$

Ввиду условия леммы имеем $c_T/T \rightarrow 0$. В свою очередь, $m/T \rightarrow 0$, $(V'_1 + \cdots + V'_m)/m \rightarrow 1$ (п.н.) в силу усиленного закона больших чисел (УЗБЧ). Следовательно,

$$-\ln\left(1 - H\left(\frac{\tilde{S}_i}{T}\right)\right) = \left(\frac{\tilde{S}_i}{T}\right)^\alpha (b + \xi_i),$$

где $\xi_i = o(\tilde{S}_i/T) \rightarrow 0$ (п.н.) при $T \rightarrow \infty$ равномерно по $0 \leq i \leq m$.

Суммируя, получаем

$$-\sum_{i=0}^m \ln\left(1 - H\left(\frac{\tilde{S}_i}{T}\right)\right) = \frac{b}{T^\alpha} \sum_{i=0}^m \tilde{S}_i^\alpha + \frac{1}{T^\alpha} \sum_{i=0}^m \tilde{S}_i^\alpha \xi_i = A_1 + A_2.$$

Докажем, что $A_1 \rightarrow bx^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ (п.н.) и $A_2 \rightarrow 0$ (п.н.) при $T \rightarrow \infty$.

Во-первых, имеем

$$\frac{1}{T^\alpha} \sum_{i=1}^m i^\alpha = \frac{m^{\alpha+1}}{T^\alpha} \sum_{i=1}^m \left(\frac{i}{m}\right)^\alpha \frac{1}{m} \sim \frac{m^{\alpha+1}}{T^\alpha} \int_0^1 y^\alpha dy = \frac{m^{\alpha+1}}{T^\alpha} \frac{1}{\alpha+1} \rightarrow \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Далее воспользуемся леммой Тёплица из [4, § 3, лемма 1]: если $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, $b_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $b_n \rightarrow \infty$ и $z_n \rightarrow z$ при $n \rightarrow \infty$, то $\sum_{i=1}^n a_i z_i \sim z b_n$.

Возьмем $a_m = m^\alpha$ и $z_m = (\tilde{S}_m/m)^\alpha$. Тогда $z_m \rightarrow 1$ (п.н.) при $T \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\frac{\tilde{S}_m}{m} = \frac{c_T}{m} + \frac{V'_1 + \cdots + V'_m}{m}.$$

Ввиду условия леммы имеем $c_T/m \rightarrow 0$, $(V'_1 + \dots + V'_m)/m \rightarrow 1$ (п.н.) в силу УЗБЧ. Следовательно,

$$\frac{1}{T^\alpha} \sum_{i=1}^m \tilde{S}_i^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \sum_{i=1}^m i^\alpha \left(\frac{\tilde{S}_i}{i} \right)^\alpha \rightarrow \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\text{п.н.}).$$

Слагаемое в A_1 при $i = 0$ можно не учитывать, так как $\tilde{S}_0 = c_T = o(T)$ и $c_T^\alpha/T^\alpha \rightarrow 0$.

Во-вторых, опираясь на полученный результат и равномерную малость ξ_i (п.н.), выводим, что $A_2 \rightarrow 0$ (п.н.) при $T \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. $\mathbf{P}(\nu_T T^{-\alpha/(\alpha+1)} \leq x) \rightarrow W_\alpha(x)$ при $T \rightarrow \infty$.

Доказательство. Заметим, что если $\mathbf{P}(A_T) \rightarrow p$, $\mathbf{P}(B_T) \rightarrow 1$, то $\mathbf{P}(A_T B_T) \rightarrow p$. Возьмем в качестве B_T события $\{\Delta_T \leq c_T\}$, где $c_T \geq 0$. Как и прежде, для $x > 0$ положим $m = \lfloor x T^{\alpha/(\alpha+1)} \rfloor$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\nu_T > m) &= \mathbf{P}(\Delta_T \leq TY_0, \dots, \Delta_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m) \\ &\geq \mathbf{P}(\Delta_T \leq TY_0, \dots, \Delta_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m, \Delta_T \leq c_T) \\ &\geq \mathbf{P}(c_T \leq TY_0, \dots, c_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m, \Delta_T \leq c_T). \end{aligned}$$

Пусть $c_T \rightarrow \infty$, $c_T = o(T^{\alpha/(\alpha+1)})$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда $\mathbf{P}(\Delta_T \leq c_T) \rightarrow 1$, и из леммы 1 и вышеприведенного замечания следует неравенство

$$\liminf \mathbf{P}(\nu_T > m) \geq e^{-bx^{\alpha+1}/(\alpha+1)}.$$

Для получения оценки сверху заменим перескок Δ_T на 0:

$$\mathbf{P}(\nu_T > m) \leq \mathbf{P}(V'_1 \leq TY_1, \dots, V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m).$$

Применяя лемму 1 с $c_T = 0$ к правой части, выводим неравенство

$$\limsup \mathbf{P}(\nu_T > m) \leq e^{-bx^{\alpha+1}/(\alpha+1)}.$$

Лемма 2 доказана.

Наконец, рассмотрим случай $\alpha = 1$.

Лемма 3. Для произвольных действительных $x \in \mathbf{R}$ и $y > 0$ при $T \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_T \leq T + x\sqrt{T}, \nu_T > y\sqrt{T}) \rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-by^2/2}. \quad (5)$$

Доказательство. Применим ту же схему рассуждения, что и в лемме 2. Положим $m = \lfloor y\sqrt{T} \rfloor$, $D_T = \{\tau_T \leq T + x\sqrt{T}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_T \leq T + x\sqrt{T}, \nu_T > y\sqrt{T}) &= \\ &= \mathbf{P}(D_T, \Delta_T \leq TY_0, \dots, \Delta_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m) \\ &\geq \mathbf{P}(D_T, \Delta_T \leq TY_0, \dots, \Delta_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m, \Delta_T \leq c_T) \\ &\geq \mathbf{P}(D_T, c_T \leq TY_0, \dots, c_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m, \Delta_T \leq c_T). \end{aligned}$$

Рассмотрим события

$$A_T = \{D_T, c_T \leq TY_0, \dots, c_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m\}, \quad B_T = \{\Delta_T \leq c_T\}.$$

Используя независимость τ_T от $\{V'_i\}$ и $\{Y_i\}$, получаем:

$$\mathbf{P}(A_T) = \mathbf{P}(D_T) \mathbf{P}(c_T \leq TY_0, \dots, c_T + V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m).$$

В силу центральной предельной теоремы $\mathbf{P}(D_T) \rightarrow \Phi(x/\sigma)$ при $T \rightarrow \infty$. Согласно лемме 1, второй сомножитель при $c_T \rightarrow \infty$, $c_T = o(T^{1/2})$ стремится к $e^{-by^2/2}$. Поэтому $\mathbf{P}(A_T) \rightarrow \Phi(x/\sigma) e^{-by^2/2}$. Таким образом,

$$\liminf \mathbf{P}(\tau_T \leq T + x\sqrt{T}, \nu_T > y\sqrt{T}) \geq \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-by^2/2}. \quad (6)$$

Для получения оценки сверху заменим Δ_T на 0:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_T \leq T + x\sqrt{T}, \nu_T > y\sqrt{T}) &\leq \mathbf{P}(D_T, V'_1 \leq TY_1, \dots, V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m) \\ &= \mathbf{P}(D_T) \mathbf{P}(V'_1 \leq TY_1, \dots, V'_1 + \dots + V'_m \leq TY_m). \end{aligned}$$

Применяя к сомножителям в правой части центральную предельную теорему и лемму 1 с $c_T = 0$, выводим неравенство

$$\lim \mathbf{P}(\tau_T \leq T + x\sqrt{T}, \nu_T > y\sqrt{T}) \leq \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-by^2/2}. \quad (7)$$

Объединяя (6) и (7), приходим к (5). Лемма 3, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Онищенко Д. А.* Вероятностная модель пробоя крупноячейистой пены в пористой среде. Препринт № 681. М.: Ин-т проблем механики РАН, 2001, 31 с.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 432 с.
3. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 304 с.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.

Поступила в редакцию
29.IX.2011

© 2012 г.

DINEV T.*, MATTNER L.*

THE ASYMPTOTIC BERRY–ESSEEN CONSTANT FOR INTERVALS¹⁾

Показано, что асимптотическая константа в неравенстве Берри–Эссена для интервальных вероятностей равна $\sqrt{2/\pi}$.

Ключевые слова и фразы: неравенство Берри–Эссена, интервальные вероятности, асимптотическая константа.

1. Introduction. Let $\mathbf{R}$ denote the real numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, and $\mathbf{N}$ the integers ≥ 1 . Let $\text{Prob}(\mathbf{R})$ be the set of all (probability) laws on $\mathbf{R}$, δ_x the unit mass at $x \in \mathbf{R}$, and $N_{0,1}$ the standard normal law with distribution function Φ and density $\varphi := \Phi'$.

For $P \in \text{Prob}(\mathbf{R})$ and $s \in [1, \infty]$, let $\mu(P) := \int x P(dx)$ and $\beta_s(P) := \int |x - \mu(P)|^s P(dx)$ if $\int |x| P(dx) < \infty$, $\beta_s(P) := \infty$ otherwise, $\sigma^2(P) := \beta_2(P)$, and $\alpha(P) := \int (x - \mu(P))^3 P(dx)$ if $\beta_3(P) < \infty$. If P is a lattice law, let $h(P) := \sup \bigcup_{a \in \mathbf{R}} \{\eta \in]0, \infty[: P(a + \eta\mathbf{Z}) = 1\}$, otherwise set $h(P) := 0$. Let us put

$$\mathcal{P}_s := \{P \in \text{Prob}(\mathbf{R}): 0 < \beta_s(P) < \infty\}.$$

In the following, we shall consider sequences $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ of independent and identically distributed real-valued random variables. P will then stand for the law of X_1 and shall, for the sake of brevity, usually be omitted in the quantities μ , σ^2 , α , β_s , and h just defined. Let $P_n \in \text{Prob}(\mathbf{R})$ be given by $P_n(A) := P^{*n}(\sigma\sqrt{n}A + n\mu)$ and set $F_n(x) := P_n([-\infty, x])$ for

* Universität Trier, Fachbereich IV — Mathematik, 54296 Trier, Germany; e-mail: dinev@uni-trier.de, mattner@uni-trier.de

¹⁾ This research was partially supported by DFG grant MA 1386/3-1.