Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, О теореме Скитовича–Дармуа–Рамачандрана, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 418–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:14:55

© 2012 г.

ИБРАГИМОВ И. А.*

О ТЕОРЕМЕ СКИТОВИЧА–ДАРМУА–РАМАЧАНДРАНА

Доказывается одно усиление теоремы Дармуа–Скитовича–Рамачандрана о характеристизации нормального распределения свойством независимости линейных статистик.

Ключевые слова и фразы: характеристизационные теоремы, теорема Дармуа–Скитовича, характеристические функции.

1. Постановка задачи и результаты. Если ξ и η — независимые случайные величины, то, как отметил С. Н. Бернштейн [1], из независимости величин $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ следует, что величины ξ и η имеют нормальное распределение.

Этот результат С. Н. Бернштейна нашел глубокое обобщение в работах В. П. Скитовича [2], [3] и Г. Дармуа [4]. Именно, пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, а вещественные числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ отличны от нуля. Рассмотрим две линейные формы

$$L_1 = \sum_1^n a_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^n b_j \xi_j.$$

Скитович и Дармуа доказали независимо, что если формы L_1 и L_2 суть независимые случайные величины, то величины ξ_j имеют нормальное распределение.

В монографии [6] Ю. В. Линник поставил задачу о распространении теоремы Скитовича–Дармуа на формы

$$L_1 = \sum_1^\infty a_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty b_j \xi_j$$

от счетного числа случайных величин ξ_i и наметил путь решения этой задачи. Заметим, что в силу независимости слагаемых сходимость рядов L_i с вероятностью 1, по вероятности или сходимость распределений

* Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, наб. Фонтанки, 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия; математико-механический факультет СПбГУ; e-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00577-а), программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-1216.2012.1) и программы фундаментальных исследований РАН «Современные проблемы теоретической математики».

их частных сумм эквивалентны (см., например, [9, гл. III, § 2]). Поэтому ниже мы всегда предполагаем, что ряды L_i сходятся с вероятностью 1. Намеченная Ю. В. Линником программа была осуществлена последовательно в работах Л. В. Мамай [7] и Б. Рамачандрана (см. [8]). В частности, Б. Рамачандран распространил результаты Скитовича и Дармуа на тот случай, когда число слагаемых в формах L_1, L_2 бесконечно и обе последовательности $\{a_j b_j^{-1}\}, \{a_j^{-1} b_j\}$ ограничены. Следующая теорема ослабляет последнее ограничение.

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин. Рассмотрим линейные формы

$$L_1 = \sum_1^{\infty} a_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^{\infty} b_j \xi_j, \quad (1)$$

где a_j, b_j — отличные от нуля вещественные числа, а ряды L_1, L_2 сходятся с вероятностью 1. Если

- а) случайные величины L_1, L_2 независимы;
- б) по крайней мере одна из последовательностей $\{a_j^{-1} b_j\}, \{a_j b_j^{-1}\}$ ограничена; то случайные величины ξ_j нормальны.

Относительно круга вопросов, связанных с теоремой Скитовича–Дармуа–Рамачандрана, см. монографии А. М. Кагана, Ю. В. Линника, С. Р. Рао [5], Ю. В. Линника [6], Б. Рамачандрана [8].

2. Вспомогательные результаты. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ ; мы будем говорить, что $f(t)$ аналитична в области G комплексной плоскости $\mathbf{C}$, если она допускает аналитическое продолжение в область G .

Лемма 1. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$. Тогда:

- 1) величина ξ имеет конечные моменты порядка $2k, k \geq 0$ — целое, в том и только том случае, если $f(t)$ непрерывно дифференцируема $2k$ раз;
- 2) величина ξ имеет степенные моменты всех порядков в том и только том случае, если $f(t)$ бесконечно дифференцируема;
- 3) величина ξ имеет экспоненциальные моменты $\mathbf{E} \exp\{r\xi\}$ порядка $r, |r| < \tau$, в том и только том случае, если характеристическая функция $f(t)$ аналитична в области $\{t: |\operatorname{Re} t| < \tau\}$;
- 4) величина ξ имеет экспоненциальные моменты всех порядков в том и только том случае, если $f(t)$ — целая аналитическая функция t .

Доказательство леммы 1 можно найти, например, в [6].

Лемма 2. Пусть ξ, η — симметричные независимые случайные величины. Тогда

$$\mathbf{E} |\xi|^p \leq 4 \mathbf{E} |\xi + \eta|^p, \quad \mathbf{E} |\eta|^p \leq 4 \mathbf{E} |\xi + \eta|^p, \quad p > 0; \quad (2)$$

$$\mathbf{E} e^{|\xi|} \leq 4 \mathbf{E} e^{|\xi+\eta|}, \quad \mathbf{E} e^{|\eta|} \leq 4 \mathbf{E} e^{|\xi+\eta|}. \quad (3)$$

Доказательство. Если ξ — случайная величина и A — случайное событие, то положим $\mathbf{E} \{\xi; A\} = \int_A \xi d\mathbf{P}$. Имеем

$$\mathbf{E} |\xi + \eta|^p \geq \mathbf{E} \{|\xi + \eta|^p; \{\xi \geq 0\}\{\eta \geq 0\}\} > \frac{1}{2} \mathbf{E} \{\xi^p; \{\xi \geq 0\}\} = \frac{1}{4} \mathbf{E} |\xi|^p.$$

Аналогично,

$$\mathbf{E} \{e^{|\xi+\eta|} \geq \mathbf{E} e^{|\xi+\eta|}; \{\xi \geq 0\}\{\eta \geq 0\}\} \geq \frac{1}{4} \mathbf{E} e^{\xi}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $f_1(t), f_2(t)$ — характеристические функции двух случайных величин. Пусть $f(t) = f_1(t)f_2(t)$. Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема $2k$ раз, то и функции $f_1(t), f_2(t)$ дифференцируемы $2k$ раз. Если $f(t)$ — целая аналитическая функция, то и $f_1(t), f_2(t)$ — целые функции.

Лемма 3 есть очевидное следствие лемм 1 и 2.

Лемма 4 (теорема Крамера). Пусть ξ, η — независимые случайные величины. Если их сумма $\xi + \eta$ имеет нормальное распределение, то оба слагаемых ξ, η тоже имеют нормальное распределение.

Лемма 5 (теорема Марцинкевича). Если характеристическая функция $f(t)$ некоторого вероятностного распределения в $\mathbf{R}^1$ имеет вид $f(t) = e^{P(t)}$, где $P(t)$ — полином, то необходимо $P(t)$ — полином не выше второй степени и, значит, $f(t)$ — характеристическая функция нормального распределения.

Доказательство лемм 4, 5 можно найти в [6].

В заключение отметим еще, что характеристические функции вероятностных распределений обладают свойством хребтовости. Именно, если $f(t) = f(\sigma + i\tau)$ — характеристическая функция, аналитическая в полосе $\{t: |\operatorname{Im} t| = \tau < r\}$, то в этой полосе

$$|f(t)| = |f(\sigma + i\tau)| \leq |f(i\tau)| = |f(i \operatorname{Im} t)|. \quad (4)$$

Относительно хребтовых функций см. [6].

3. Доказательство теоремы. Без потери общности можно считать, что

$$L_1 = \sum_1^\infty \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty c_j \xi_j$$

и что последовательность $\{c_j\}$ ограничена. Обозначим $f_j(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_j . Если $l_i(t)$ — характеристические функции случайных величин L_i , то

$$l_1(t) = \prod_1^\infty f_j(t), \quad l_2(s) = \prod_1^\infty f_j(c_j s).$$

В силу сходимости рядов, определяющих L_i , бесконечные произведения l_i сходятся равномерно на каждом конечном интервале t, s ; равномерно на таких множествах сходятся и ряды $\sum_1^\infty |f_j(t) - 1|$, $\sum_1^\infty |f_j(c_j s) - 1|$ (см., например, [9, гл. III, § 2]).

Независимость форм L_1, L_2 влечет равенство

$$\mathbf{E} e^{itL_1 + isL_2} = \mathbf{E} e^{itL_1} \mathbf{E} e^{isL_2},$$

откуда в свою очередь следует основное для дальнейшего уравнение

$$\prod_1^\infty f_j(t) \prod_1^\infty f_j(c_j s) = \prod_1^\infty f_j(t + c_j s). \quad (5)$$

Ясно, что если $f_j(t)$ удовлетворяют основному уравнению (5), то симметричные характеристические функции $g_j(t) = f_j(t)f_j(-t) = |f_j(t)|^2$ удовлетворяют такому же уравнению. Если удастся доказать, что все $g_j(t)$ суть характеристические функции нормального закона, то из теоремы Крамера (лемма 4) будет следовать, что все $f_j(t)$ тоже суть характеристические функции нормального закона. Поэтому мы можем и будем предполагать, что ξ_j — симметричные случайные величины, а функции $f_j(t)$ вещественны, $f_j(t) \geq 0$, $f_j(t) = f_j(-t)$.

Докажем, что все решения основного уравнения — гладкие строго положительные функции.

Лемма 6. *Все решения $f_j(t)$ основного уравнения (5) строго положительны: $f_j(t) > 0$.*

Доказательство. В окрестности нуля характеристическая функция $l_1(t) = \prod_1^\infty f_j(t)$ положительна. Пусть t_0 — минимальный положительный корень непрерывной функции $l_1(t)$. Поскольку произведение $\prod f_j(t)$ равномерно сходится, t_0 есть корень какой-нибудь из функций $f_k(t)$. Для всех $|t| < t_0$ выполнено неравенство $\prod_1^\infty f_j(t) > 0$. В силу ограниченности последовательности $\{c_j\}$ для всех малых s , скажем, $|s| < \varepsilon$, все $f_j(c_j s)$ строго положительны. Поэтому $\prod_1^\infty f_j(t) \prod_1^\infty f_j(c_j s) > 0$ для $|t| < t_0$, $|s| < \varepsilon$. В то же время найдутся такое $t_1 < t_0$ и такое s_1 , $|s_1| < \varepsilon$, для которых $t_1 + c_k s_1 = t_0$, так что в силу (5)

$$\prod_1^\infty f_j(t_1) \prod_1^\infty f_j(c_j s_1) = \prod_1^\infty f_j(t_1 + c_j s_1) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Положим $\psi_j(t) = \ln f_j(t)$. Это непрерывные отрицательные на всей вещественной оси, кроме нуля, функции (мы полагаем $\ln f_j(1) = 0$). Основное уравнение (5) можно теперь записать в форме

$$\sum_1^\infty \psi_j(t) + \sum_1^\infty \psi_j(c_j s) = \sum_1^\infty \psi_j(t + c_j s). \quad (6)$$

Лемма 7. Все решения $f_j(t)$ основного уравнения (5) дифференцируемы бесконечное число раз. Случайные величины ξ_j имеют моменты всех порядков. В частности,

$$\mathbf{E} L_2^2 = \sum_1^{\infty} c_j^2 \mathbf{E} \xi_j^2 = - \sum_j c_j^2 f_j''(0) < \infty. \quad (7)$$

Доказательство. Умножим обе части основного уравнения (6) на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $h(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 1$, и проинтегрируем по t . В силу равномерной сходимости рядов в (6) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_1^{\infty} \psi_j(t) h(t) dt + \sum_1^{\infty} \psi_j(c_j s) = \sum_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(t) h(t - c_j s) dt.$$

Слагаемые в правой части являются бесконечно дифференцируемыми функциями s , причем ввиду ограниченности последовательности $\{c_j\}$ продифференцированные ряды равномерно сходятся. Таким образом, ряд $\sum_1^{\infty} \psi(c_j s)$ представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию s . Но тогда все производные имеет и характеристическая функция $l_2(s) = \prod_1^{\infty} f_j(c_j s)$. В силу лемм 1–3 случайные величины L_2 и $\xi_j, j = 1, 2, \dots$, имеют моменты всех порядков и все характеристические функции $f_j(t)$ бесконечно дифференцируемы.

Очевидно, что при всех N

$$\mathbf{E} L_2^2 \geq \mathbf{E} \left| \sum_1^N c_j \xi_j \right|^2 = \sum_1^N c_j^2 \mathbf{E} \xi_j^2,$$

так что ряд из дисперсий $c_j \xi_j$ сходится и имеет место равенство (7). Лемма доказана.

В силу равномерной сходимости $f_j(t)$, $j \rightarrow \infty$, к 1 сходимость ряда $\sum_j c_j^2 \psi_j''(0)$ влечет равномерную на компактах сходимость ряда $\sum_j c_j^2 \psi_j''(t + c_j s)$. Дифференцируя равенство (6) по s , мы найдем, что

$$\sum_1^{\infty} c_j^2 \psi_j''(t + c_j s) = \sum_1^{\infty} c_j^2 \psi_j''(c_j s).$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\sum_1^{\infty} c_j^2 \psi_j(t + c_j s) = a(s)t^2 + b(s), \quad (8)$$

где

$$a(s) = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} c_j^2 \psi_j''(c_j s), \quad b(s) = \sum_1^{\infty} c_j^2 \psi_j(c_j s), \quad (9)$$

в частности,

$$\sum_1^{\infty} c_j^2 \psi_j(t) = a(0)t^2.$$

Лемма 8. *Характеристические функции $f_j(t)$ суть целые аналитические функции t . Случайные величины $L_2, \xi_1, \xi_2, \dots$ имеют экспоненциальные моменты всех порядков.*

Доказательство. Положим

$$h_\alpha(t) = h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2\alpha} \right\},$$

умножим обе части равенства (8) на $h(t)$ и проинтегрируем по t . Ряд в левой части имеет знакопостоянные члены и его можно интегрировать почленно. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(t) \exp \left\{ -\frac{(t - c_j s)^2}{2\alpha} \right\} dt = \alpha a(s) + b(s). \quad (10)$$

Слагаемые в левой части (10) определены для всех комплексных s и представляют собой целые аналитические функции s . Ряд в левой части (10) сходится равномерно по s на компактах комплексной плоскости s , и, следовательно, его сумма есть целая функция s . Целой функцией будет и производная левой части (10) по α . Следовательно, $a(s)$ и $b(s)$ суть целые функции s . Но тогда и

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(c_j s) = 2 \int_0^s du \int_0^u a(v) dv, \quad s \in \mathbf{R}^1,$$

аналитически продолжается во всю комплексную плоскость s . Следовательно, произведение $l_2(s) = \prod_{j=1}^{\infty} f_j(c_j s)$ есть целая функция s и в силу лемм 1–3 случайные величины $L_2, \xi_1, \xi_2, \dots$ имеют экспоненциальные моменты всех порядков, а функции $f_j(t)$ суть целые аналитические функции. Лемма доказана.

Легко видеть, что бесконечные произведения $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(ic_j \tau)$, где τ вещественно, ограничены равномерно на конечных интервалах. Отсюда и из сходимости рядов L_1, L_2 следует, что бесконечные произведения $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(t + c_j s)$ сходятся равномерно по t, s на ограниченных подмножествах вещественной прямой t и комплексной плоскости s соответственно. Действительно, для целых $M < N$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=M}^N f_j(t + c_j s) - 1 \right| &\leq \mathbf{E} \left| \exp \left\{ it \sum_M^N \xi_j + s \sum_M^N c_j \xi_j \right\} - 1 \right| \\ &\leq 2\varepsilon e^{2\varepsilon} + \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_M^N \xi_j \right| > \varepsilon \right\} + \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_M^N c_j \xi_j \right| > \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left(\mathbf{P}^{1/2} \left\{ \left| \sum_M^N \xi_j \right| > \varepsilon \right\} + \mathbf{P}^{1/2} \left\{ \left| \sum_M^N c_j \xi_j \right| > \varepsilon \right\} \right) \\ \times \mathbf{E}^{1/2} \left\{ \exp \left\{ 2|s| \left| \sum_M^N c_j \xi_j \right| \right\} \right\}.$$

Для фиксированных вещественных t произведение $\prod_1^\infty f_j(t + c_j s)$ — целая функция s . Равенство

$$\prod_1^\infty f_j(t) \prod_1^\infty f_j(c_j s) = \prod_1^\infty f_j(t + c_j s)$$

имеет место для всех вещественных t и всех комплексных s . Как и выше, из этого равенства легко выводится, что $f_j(s)$ не имеет нулей в комплексной плоскости. Поэтому функции $\psi_j(s) = \ln f_j(s)$ определены во всей комплексной плоскости и являются целыми аналитическими функциями s , а равенство

$$\sum_1^\infty \psi_j(t) + \sum_1^\infty \psi_j(c_j s) = \sum_1^\infty \psi_j(t + c_j s)$$

имеет место для всех вещественных t и всех комплексных s и все три ряда сходятся равномерно на компактах.

Введем функцию комплексной переменной z

$$h_\tau(z) = h(z) = \frac{2\tau^3}{\pi} \frac{1}{(z + i\tau)^2(z - i\tau)^2},$$

τ — вещественное положительное число. Имеем

$$\int_{-\infty}^\infty h(t) dt = \frac{2\tau^3}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(t^2 + \tau^2)^2} = 1.$$

Умножим обе части равенства (8) на $h(t)$ и проинтегрируем по t . Интегрируя почленно ряд со знакопостоянными слагаемыми, найдем, что

$$\begin{aligned} & \sum_1^\infty c_j^2 \int_{-\infty}^\infty \psi_j(t + c_j s) h_\tau(t) dt \\ &= \sum_1^\infty c_j^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{2\tau^3}{\pi} \frac{\psi_j(t) dt}{(t - c_j s + i\tau)^2(t - c_j s - i\tau)^2} \\ &= \frac{2\tau^3}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2 + \tau^2)^2} a(s) + b(s) = C_0 \tau^2 a(s) + b(s). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь и ниже C_i означают положительные константы.

Левая часть последнего равенства аналитически продолжима естественным образом в полосу $|\operatorname{Im} s| < \tau / \max_j |c_j|$. Будем считать для простоты, что $\max_j |c_j| = 1$. Положим в (11) $s = i\theta$, θ вещественно, $|\theta| < \tau$. Дифференцируя по τ равенство

$$\frac{2\tau^3}{\pi} \sum_j c_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(t) \frac{dt}{(t - ic_j t + i\tau)^2 (t - ic_j t - i\tau)^2} = C_0 \tau^2 a(i\theta) + b(i\theta),$$

для $\tau > 1$, $0 < |\theta| < \tau - 1$ получим

$$2C_0 \tau |a(i\theta)| \leq C_1 \tau^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_j c_j^2 |\psi_j(t)|}{(t^2 + 1)(t^2 + \tau^2)} dt \leq C_2 \tau^2.$$

Следовательно, для $|\theta| < |\tau| - 1$

$$|a(i\theta)| = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \psi_j''(ic_j \theta) \right| \leq C_3 |\tau|.$$

Таким образом,

$$-C_3 |\tau| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \psi_j''(ic_j \theta) \leq C_3 |\tau|.$$

Интегрируя последние неравенства, найдем, что для $0 < \theta < \tau - 1$, $\tau > 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \psi_j(ic_j \theta) \leq C_4 (|\tau|^3 + 1).$$

Отсюда следует, что для всех j и $\tau > 1$

$$\psi_j(ic_j \tau) \leq C_5 |\tau|^3.$$

В силу свойства хребтовости характеристических функций

$$\operatorname{Re} \ln f_j(z) = \ln |f_j(z)| \leq \ln |f_j(i \operatorname{Im} z)| \leq C_5 (|\operatorname{Im} z|^3 + 1).$$

По теореме Лиувилля (см., например, [10, п. 2.5.4]) $\ln f(z)$ есть полином степени не выше 3. В силу четности $f_j(t)$

$$f_j(t) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_j^2 t^2}{2} \right\}.$$

Теорема доказана.

4. Замечание. Предлагаемое доказательство весьма существенно использует ограниченность одной из последовательностей $\{a_j b_j^{-1}\}, \{b_j a_j^{-1}\}$. Было бы интересно выяснить, насколько это требование существенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С. Н.* Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса. — Тр. Ленингр. политех. ин-та, 1941, т. 3, с. 21–22.
2. *Скитович В. П.* Об одном свойстве нормального распределения. — Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 2, с. 217–219.
3. *Скитович В. П.* Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения. — Изв. АН СССР, 1954, т. 18, № 2, с. 185–200.
4. *Darmois G.* Analyse générale des liaisons stochastiques. Étude particulière de l'analyse factorielle linéaire. — Rev. Inst. Internat. Statist., 1953, v. 21, p. 2–8.
5. *Каган А. М., Линник Ю. В., РАО С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
6. *Линник Ю. В.* Разложения вероятностных законов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1960, 263 с.
7. *Мамай Л. В.* К теории характеристических функций. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, т. 1, с. 85–99.
8. *Рамачандран Б.* Теория характеристических функций. М.: Наука, 1975, 224 с.
9. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.
10. *Титчмарш Е. К.* Теория функций. М.: Наука, 1980, 463 с.

Поступила в редакцию
15.V.2012