Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Афанасьева, И. В. Руденко, Системы обслуживания $GI|G|\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 427–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:38:51

© 2012 г. АФАНАСЬЕВА Л. Г.*, РУДЕНКО И. В.*

**СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI|G|\infty$ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
К АНАЛИЗУ ТРАНСПОРТНЫХ МОДЕЛЕЙ¹⁾**

Рассматриваются системы обслуживания с бесконечным числом каналов и идентичным временем обслуживания на периоде занятости. Для процесса, определяющего число требований в системе, найдены предельное распределение и условие эргодичности. Также получена функция распределения периода занятости системы. Результаты применяются к анализу процесса образования очередей на неуправляемых перекрестках автомобильных дорог. Для предложенных моделей найдены предельные характеристики, изучено функционирование в условиях высокой загрузки.

Ключевые слова и фразы: системы $GI|G|\infty$, условие эргодичности, транспортные задачи, условия высокой загрузки.

1. Введение. Первые результаты для систем обслуживания с бесконечным числом приборов были получены еще в середине прошлого века в работах [1], [2], [3], [4]. Дальнейшие исследования касались систем более общего вида, не изученных ранее характеристик, статистического анализа, а также предельных теорем в условиях высокой загрузки (см., например, [5], [6], [7]). Интерес к бесконечноканальным системам сохраняется до сих пор. Это связано как с нетривиальностью и многообразием возникающих здесь математических проблем, так и с широким кругом приложений в самых различных областях. Например, при анализе коммуникационных, компьютерных [3], [8] и транспортных систем [9], [10], ветвящихся процессов с иммиграцией [11], некоторых биологических систем [2], финансовых моделей [12], надежности больших систем [13] и др.

В последнее время получен ряд результатов, касающихся распределения вероятностей периода занятости. Для системы $M|GI|\infty$ это распределение найдено в [6], где также приводится распределение вероятностей числа периодов занятости, в которых обслуживается заданное число требований. Анализ времени пребывания выше заданного уровня

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: afanas@mech.math.msu.su, irudenkomr@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 10-01-00266а.

процесса, определяющего число требований в $M|M|\infty$, проведен в работах [14], [15]. В [8] изучается система $M|M|\infty$, в которой скорость обслуживания зависит от состояния системы. Находится распределение вероятностей периода занятости порядка N (число требований, находящихся в системе, не меньше N). Модель возникла при анализе систем со множеством каналов связи, имеющих различные скорости передач. Идеи и подходы, развитые в данной работе, могут оказаться полезными при решении ряда прикладных задач, например, при исследовании транспортных систем.

В предлагаемой статье рассматривается система $GI|G|\infty$, в которой требования, поступившие на одном периоде занятости, имеют одинаковое время обслуживания. Времена обслуживания на различных периодах занятости — независимые одинаково распределенные случайные величины. Назовем эту модель модифицированной. Она возникла при описании транспортных систем, в которых автомобили, следующие по трассе, из-за высокой интенсивности движения приобретают одинаковую скорость (так называемое «синхронное» движение). Для рассматриваемой модели установлено условие эргодичности, найдено преобразование Лапласа–Стилтьеса распределения вероятностей периода занятости, вычислены два первых момента, когда они существуют, и получено выражение для стационарного распределения числа требований в системе.

В качестве примера применения полученных результатов рассматривается транспортная система, состоящая из двух пересекающихся автомобильных трасс — основной и второстепенной — без светофора. Модель предложена в [16], а ее обобщение на случай двустороннего движения по основной трассе рассматривалось в [9]. В [16] найдено распределение времени ожидания автомобиля на второстепенной дороге, если в момент его появления на перекрестке нет других автомобилей. В [9] получен ряд результатов для описывающего функционирование системы марковского процесса восстановления.

В представленной работе основное внимание уделяется количеству автомобилей перед перекрестком на второстепенной дороге. Оно определяется процессом, задающим число требований в одноканальной системе обслуживания $M|GI|1|\infty$ с ненадежным прибором. Интервалы восстановления прибора (пересечение перекрестка автомобилями с второстепенной дороги невозможно) представляют собой периоды занятости, а интервалы рабочего состояния (движение возможно) — свободные периоды для модифицированной бесконечноканальной системы. Система $M|GI|1|\infty$ с выходами прибора из строя и последующими восстановлениями исследована в [17]. Рассмотрены различные ситуации: продолжение прерванного обслуживания, обслуживание сначала и др. Для каждого требования вводится так называемое время завершения (completion time), представляющее собой сумму собственно времени об-

служивания и длительностей восстановлений после поломок, произошедших за это время. Использование времени завершения в качестве времени обслуживания в системе с надежным прибором сводит проблему к анализу хорошо изученной системы $M|GI|1|\infty$. В системе $M|GI|1|\infty$, рассматриваемой в данной статье, есть две особенности. Во-первых, требование, пришедшее в свободную систему, когда прибор работает, имеет нулевое время обслуживания (так называемый эффект «проскакивания», вызванный тем, что автомобиль на свободной дороге мгновенно проезжает перекресток). Учет этого обстоятельства приводит к зависимости времени обслуживания требования от состояния системы. Кроме того, предполагается, что обслуживание, прерванное поломкой прибора, не продолжается, и автомобиль мгновенно пересекает трассу после завершения периода занятости. Для описанной модели устанавливается необходимое и достаточное условие эргодичности, находится предельное распределение вероятностей для числа требований в системе в момент t при $t \rightarrow \infty$, вычисляется первый момент этого распределения, исследуются условия высокой загрузки.

2. Описание бесконечноканальной модели. В системе — бесконечное число каналов обслуживания. В качестве входящего потока рассматривается общий процесс восстановления $N(t)$, т.е. интервалы между поступлениями требований — независимые одинаково распределенные случайные величины (сл.в.) с функцией распределения (ф.р.) $A(x)$ и конечным средним $a = \int_0^\infty x dA(x)$. Время до поступления первого требования имеет ф.р. $A_1(x)$. Если требование поступает в свободную систему, его время обслуживания — сл.в. с ф.р. $B(x)$ и оно начинает период занятости. Все другие требования, приходящие на данном периоде занятости, имеют то же время обслуживания, что и первое, так что на каждом периоде занятости время обслуживания постоянно. На разных периодах занятости времена обслуживания — независимые сл.в. с ф.р. $B(x)$.

Пусть $\{\tau_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность периодов занятости, и $\{\tau_j^{(0)}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность свободных периодов. Сумму $\tau_j = \tau_j^{(1)} + \tau_j^{(0)}$ будем называть j -м циклом, при этом цикл начинается в момент поступления требования в свободную систему, т.е. вместе с очередным периодом занятости. Заметим, что при каждом j цикл является суммой, вообще говоря, зависимых случайных величин, а последовательность циклов образует последовательность независимых случайных величин.

3. Основные характеристики системы $GI|G|\infty$.

3.1. Система $GI|D|\infty$. Пусть $Q(t)$ — число требований в системе в момент t . Если время обслуживания постоянно и равно b , мы имеем дело с обычной бесконечноканальной системой обслуживания. В даль-

нейшем будем предполагать, что распределение $A(x)$ содержит абсолютно непрерывную компоненту. Заметим, что рассмотрение решетчатых распределений не вносит никаких существенных трудностей. Следует только использовать дискретный вариант основной теоремы теории восстановления. Для общего процесса восстановления $N(t)$ положим $p_k(t, \tau) = \mathbf{P}\{N(t + \tau) - N(t) = k\}$. Если $A_1(x) = a^{-1} \int_0^x \bar{A}(y) dy$, где $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, то $N(t)$ — стационарный процесс восстановления и в таком случае $p_k(\tau) = \mathbf{P}\{N(t + \tau) - N(t) = k\}$.

Теорема 1. *Существуют*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q(t) = k\} = p_k(b). \quad (1)$$

Кроме того,

$$\mathbf{E} \tau_j = a(\bar{A}(b))^{-1}, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} \tau_j^{(1)} = (\bar{A}(b))^{-1} \int_0^b \bar{A}(x) dx, \quad (3)$$

$$g_b(s) = \mathbf{E} e^{-s\tau_j^{(1)}} = \left(1 - \int_0^b e^{-sx} dA(x)\right)^{-1} e^{-sb} \bar{A}(b), \quad (4)$$

$$u_b(s) = \mathbf{E} e^{-s\tau_j} = \left(1 - \int_0^b e^{-sx} dA(x)\right)^{-1} \int_b^\infty e^{-sx} dA(x), \quad (5)$$

$$v_b(s) = \mathbf{E} e^{-s\tau_j^{(0)}} = (as)^{-1} \left(1 - \int_0^\infty e^{-sx} dA(x)\right). \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $t > b$ событие, состоящее в том, что в системе k требований, означает, что в интервале $(t - b, t)$ пришло k требований, то есть

$$\mathbf{P}\{Q(t) = k\} = \mathbf{P}\{N(t) - N(t - b) = k\}.$$

Теперь существование предельного распределения у процесса $Q(t)$ и формула (1) следуют из теоремы Блекуэлла [19].

Рассмотрим j -й цикл и пусть ξ_j — время до поступления следующего требования после его начала. Справедливы стохастические соотношения

$$\tau_j^{(1)} = (\xi_j + \tilde{\tau}^{(1)})\chi_{\{\xi_j \leq b\}} + b\chi_{\{\xi_j > b\}}, \quad (7)$$

$$\tau_j = (\xi_j + \tilde{\tau})\chi_{\{\xi_j \leq b\}} + \xi_j\chi_{\{\xi_j > b\}}. \quad (8)$$

Здесь $\tilde{\tau}^{(1)} \stackrel{d}{=} \tau_j^{(1)}$, $\tilde{\tau} \stackrel{d}{=} \tau_j$ и $\tilde{\tau}^{(1)}$ и $\tilde{\tau}$ не зависят от ξ_j , χ_A — индикатор события A , а символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению. Из (7) находим

$$g_b(s) = e^{-sb} \bar{A}(b) + g_b(s) \mathbf{E} e^{-s\xi_j} \chi_{\{\xi_j \leq b\}},$$

откуда следует (4). Аналогичным образом (5) получается из (8). Соотношения (2) и (3) могут быть выведены из (8) и (7) или получены дифференцированием (5) и (4). Теорема 1 доказана.

3.2. Система $GI|G|\infty$.

Теорема 2. Для $GI|G|\infty$ с идентичным временем обслуживания на периоде занятости справедливы соотношения

$$g(s) = \mathbf{E} e^{-s\tau_j^{(1)}} = \int_0^\infty \frac{e^{-sx} \bar{A}(x)}{1 - \int_0^x e^{-sy} dA(y)} dB(x), \quad (9)$$

$$u(s) = \mathbf{E} e^{-s\tau_j} = \int_0^\infty \frac{\int_x^\infty e^{-sy} dA(y)}{1 - \int_0^x e^{-sy} dA(y)} dB(x). \quad (10)$$

Математические ожидания $\mathbf{E} \tau_j^{(1)}$ и $\mathbf{E} \tau_j$ существуют тогда и только тогда, когда

$$\rho = \int_0^\infty (\bar{A}(x))^{-1} dB(x) < \infty. \quad (11)$$

Если (11) выполняется, то

$$g = \mathbf{E} \tau_j^{(1)} = \int_0^\infty (\bar{A}(x))^{-1} \int_0^x \bar{A}(y) dy dB(x), \quad (12)$$

$$d = \mathbf{E} \tau_j = a \int_0^\infty (\bar{A}(x))^{-1} dB(x). \quad (13)$$

Доказательство. Пусть η_j — сл.в. с ф.р. $B(x)$ и η_j — время обслуживания требований, поступивших на j -м периоде занятости. Из (4) находим

$$\begin{aligned} g(s) &= \mathbf{E} e^{-s\tau_j^{(1)}} = \mathbf{E} \mathbf{E} (e^{-s\tau_j^{(1)}} | \eta_j) \\ &= \mathbf{E} g_{\eta_j}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-sx} \bar{A}(x)}{1 - \int_0^x e^{-sy} dA(y)} dB(x). \end{aligned}$$

Мы замечаем, что $g(0) = 1$, так что период занятости конечен с вероятностью единица. Поскольку $\tau_j^{(1)}$ — неотрицательная случайная величина, ее математическое ожидание конечно тогда и только тогда, когда ее производящая функция дифференцируема в нуле. Проверка этого условия приводит к условию (11) и формуле (12).

Аналогично устанавливается справедливость формул (10) и (13). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Для производящей функции $\Pi(z)$ числа требований κ_j , обслуженных на j -м цикле, нетрудно получить соотношение

$$\Pi(z) = \mathbf{E} z^{\kappa_j} = z \int_0^\infty \bar{A}(x) (1 - zA(x))^{-1} dB(x).$$

Если выполняется (11), то существуют

$$\mathbf{E} \kappa_j = \int_0^\infty (\bar{A}(x))^{-1} dB(x) = \rho,$$

что объясняет смысл параметра ρ . Заметим также, что $\mathbf{E} \tau_j = a\rho$.

Пример 1. Для системы $M|D|\infty$ ($\bar{A}(x) = e^{-\lambda x}$) с постоянным временем обслуживания b имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q(t) = k\} &= \frac{(\lambda b)^k}{k!} e^{-\lambda b}, \\ g &= \mathbf{E} \tau_j^{(1)} = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda b} - 1), \quad r = \mathbf{E} \tau_j^{(0)} = \frac{1}{\lambda}, \\ g_b(s) &= \frac{s + \lambda}{s e^{(s+\lambda)b} + \lambda}, \quad u_b(s) = \frac{\lambda}{s e^{(s+\lambda)b} + \lambda}. \end{aligned}$$

Для системы $M|G|\infty$ имеем

$$g(s) = \int_0^\infty \frac{s + \lambda}{s e^{(s+\lambda)x} + \lambda} dB(x), \quad u(s) = \int_0^\infty \frac{\lambda}{s e^{(s+\lambda)x} + \lambda} dB(x).$$

Мы видим, что $u(s) = g(s) \cdot (\lambda/(s + \lambda))$, а значит, при пуассоновском входящем потоке период занятости и свободный период независимы.

3.3. Предельное распределение числа требований в системе.

Теорема 3. Если $\rho = \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q(t) = k\} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Если $\rho < \infty$ и выполняется одно из условий

- (а) $B(x)$ — ф.р. решетчатого распределения,
- (б) $B(x)$ абсолютно непрерывна и функция $(A(x))^{-1} B'(x)$ непосредственно интегрируема по Риману на $[0, \infty)$ (см., например, [18, гл. XI, § 1]), то существуют положительные пределы

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q(t) = k\} = \rho^{-1} \int_0^\infty (\bar{A}(x))^{-1} p_k(x) dB(x). \quad (15)$$

Доказательство. Мы замечаем, что $Q(t)$ — регенерирующий процесс и его точки регенерации — моменты прихода требований в свободную систему, т.е. моменты начал циклов. Поскольку период регенерации содержит абсолютно непрерывную компоненту, применима теорема Смита [19], из которой следует существование пределов $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q(t) = k\}$. Если $\rho = \infty$, то математическое ожидание периода регенерации бесконечно и поэтому справедливо (14). Пусть $\rho < \infty$. Начнем с решетчатых распределений.

Лемма 1. Если $B(x)$ — ф.р. решетчатого распределения с шагом h и $\rho < \infty$, то для предельного распределения выполнено (15).

Доказательство. Мы скажем, что цикл имеет тип i , если на его периоде занятости время обслуживания равно ih . Положим $\alpha_i(h) = B(ih) - B(ih-0)$. Параметры и функции, относящиеся к данному распределению, пометим буквой h . Тогда

$$\rho_h = \sum_{i=0}^{\infty} (\bar{A}(ih))^{-1} \alpha_i(h).$$

Из равенства $\bar{A}(ih) = 0$ и условия $\rho_h < \infty$, следует, что $\alpha_m(h) = 0$ при всех $m \geq i$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\bar{A}(ih) > 0$ для всех i . Пусть $C_i^{(t)}$ — событие, состоящее в том, что момент t попадает на цикл i -го типа. Тогда

$$\mathbf{P}\{Q_h(t) = m\} = \sum_{i=0}^{\infty} p_m(t, ih) \mathbf{P}\{C_i^{(t)}\}. \quad (16)$$

В силу соотношений (2) и (3) для цикла i -го типа средние значения периода занятости $g_i(h)$, свободного периода $r_i(h)$, длительности цикла $\theta_i(h)$ даются соответственно равенствами

$$g_i(h) = (\bar{A}(ih))^{-1} \int_0^{ih} \bar{A}(x) dx, \quad r_i(h) = (\bar{A}(ih))^{-1} \int_{ih}^{\infty} \bar{A}(x) dx, \\ \theta_i(h) = a(\bar{A}(ih))^{-1}, \quad (17)$$

а математическое ожидание длительности произвольного цикла

$$\mathbf{E} \tau(h) = \theta_h = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i(h) \alpha_i(h) = a \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(h) (\bar{A}(ih))^{-1} = a \rho_h < \infty.$$

Следовательно, существует предел при $t \rightarrow \infty$ в (15), задающий предельное распределение (см. [19]).

Пусть t_{Λ} — случайная величина, равномерно распределенная в $[0, \Lambda]$, $\beta_i(\Lambda) = \mathbf{P}\{C_i^{(t_{\Lambda})}\}$ — вероятность того, что t_{Λ} попадает в цикл i -го типа. Тогда

$$\pi_m(h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q_h(t) = m\} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q_h(t_{\Lambda}) = m\}. \quad (18)$$

Поскольку

$$\beta_i(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i(h) \theta_i(h)}{\theta_h} = \frac{\alpha_i(h)}{\bar{A}(ih) \rho_h} \quad \text{и} \quad p_m(t, ih) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} p_m(ih),$$

с помощью несложных оценок из (16) и (18) находим

$$\pi_m = \rho_h^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_m(ih)}{\bar{A}(ih)} \alpha_i(h),$$

что совпадает с (15) в случае дискретного распределения. Лемма 1 доказана.

Пусть теперь $B(x)$ — удовлетворяет условию (b) и $B(0) = 0$. Возьмем $h > 0$ и построим два дискретных распределения со скачками в точках ih ($i = 0, 1, 2, \dots$). При этом для ф.р. $B_1^h(x)$ первого распределения скачки $\alpha_i^{(1)}(h) = B((i+1)h) - B(ih)$, а для ф.р. $B_2^h(x)$ второго распределения — $\alpha_{i+1}^{(2)}(h) = \alpha_i^{(1)}(h)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), $\alpha_0^{(2)}(h) = 0$. Тогда

$$B_1^h(x) \geq B(x) \geq B_2^h(x).$$

Пусть η_1^h, η, η_2^h — случайные величины соответственно с ф.р. $B_1^h(x), B(x), B_2^h(x)$, так что выполнены стохастические неравенства

$$\eta_1^h \leq \eta \leq \eta_2^h. \quad (19)$$

Введем монотонно возрастающие по x функции $\varphi(x) = (\bar{A}(x))^{-1}$, $\psi_k(x) = \sum_{j=k}^{\infty} p_j(x)$.

Обозначим $\underline{m}_i(h)$ и $\bar{m}_i(h)$ соответственно минимум и максимум функции $\varphi(x)B'(x)$ на отрезке $[ih, (i+1)h]$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Непосредственная интегрируемость означает, что ряды $\underline{S}_h = h \sum_i \underline{m}_i(h)$ и $\bar{S}_h = h \sum_i \bar{m}_i(h)$ сходятся и $\bar{S}_h - \underline{S}_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Поскольку

$$\underline{S}_h \leq \mathbf{E} \varphi(\eta_1^h) = \rho_1^h \leq \rho = \mathbf{E} \varphi(\eta) \leq \rho_2^h = \mathbf{E} \varphi(\eta_2^h) \leq \bar{S}_h, \quad (20)$$

то $\rho_2^h < \infty$ для достаточно малых h . Кроме того, $\rho_i^h \rightarrow \rho$ при $h \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$).

При нулевых начальных условиях ($Q(0) = Q_1^h(0) = Q_2^h(0) = 0$) из (19) находим, что при всех $t \geq 0$ и $k \geq 0$

$$\mathbf{P}\{Q_1^h(t) > k\} \leq \mathbf{P}\{Q(t) > k\} \leq \mathbf{P}\{Q_2^h(t) > k\}. \quad (21)$$

В силу леммы 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q_i^h(t) > k\} = (\rho_i^h)^{-1} \mathbf{E} \varphi(\eta_i^h) \psi_k(\eta_i^h) \quad (i = 1, 2).$$

Как и выше, используя условие (b), отсюда и из неравенств (21) получаем (15). Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Как следует из доказательства теоремы 3, соотношение (15) верно, если $B(x) = \alpha B_1(x) + (1 - \alpha) B_2(x)$, $\alpha \in (0, 1)$, где $B_1(x)$ решетчатая, а $B_2(x)$ удовлетворяет условию (b). Кроме того, теорема 3 справедлива для распределений, сосредоточенных на конечном промежутке.

Если $\int_0^{\infty} x (\bar{A}(x))^{-1} dB(x) < \infty$, то у предельного распределения существует математическое ожидание и оно равно

$$\mathbf{E} Q = (\rho a)^{-1} \int_0^{\infty} x (\bar{A}(x))^{-1} dB(x).$$

Это следует из (15) и того, что $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(x) = x a^{-1}$.

Пример 2. Пусть $\bar{A}(x) = e^{-\lambda x}$ и $B(x) = 1 - e^{-\nu x}$. Из (11) находим, что $\rho < \infty$, если $\nu > \lambda$, и в этом случае $\rho = \nu(\nu - \lambda)^{-1}$. Поскольку для пуассоновского потока $p_k(x) = e^{-\lambda x}(\lambda x)^k/k!$ предельное распределение, определяемое формулой (14), имеет вид

$$\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Преобразование Лапласа–Стилтьеса для распределения периода занятости

$$g(s) = \nu(s + \lambda) \int_0^\infty e^{-\nu x} (se^{(s+\lambda)x} + \lambda)^{-1} dx.$$

Мы замечаем, что предельное распределение $\{\pi_k\}$ совпадает со стационарным распределением процесса $Q(t)$ для системы $M|M|1$. Напомним (см., например, [20]), что в этой системе преобразование Лапласа–Стилтьеса для функции распределения дается формулой

$$\pi(s) = (2\lambda)^{-1} \left(s + \lambda + \nu - \sqrt{(s + \lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu} \right).$$

Средние значения периодов занятости в обеих системах совпадают и равны $\mathbf{E} \tau_j^{(1)} = (\nu - \lambda)^{-1}$. Заметим также, что процесс $Q(t)$ — марковский в $M|M|1$ и не является таковым в модифицированной системе $M|M|\infty$.

4. Стохастический анализ неуправляемого перекрестка (движение по основной трассе в одном направлении). В качестве приложения рассмотрим процесс образования очереди из автомобилей на второстепенной дороге при ее пересечении с основной трассой, когда отсутствует светофор. Такой перекресток естественно называть неуправляемым.

Модель предложена в работе [16], а ее обобщение на случай двустороннего движения по основной трассе рассматривалось в [9]. Потoki автомобилей по трассам считались пуассоновскими. В этом пункте будет рассмотрена ситуация, когда движение по основной трассе происходит в одном направлении. Мы получим необходимое и достаточное условие эргодичности процесса, определяющего число автомобилей перед перекрестком на второстепенной дороге, приведем выражения для стационарного распределения и его первого момента, исследуем условия высокой загрузки. Отметим, что в рассматриваемой модели поток автомобилей, движущихся по основной трассе, не предполагается пуассоновским.

4.1. Описание модели. По главной трассе S_1 в одном направлении перемещаются автомобили, образующие рекуррентный поток. Временные интервалы между автомобилями $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ независимы и одинаково распределены. Предполагаются заданными последовательность

$\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром λ_1 и константы $d > 0$, $p \in [0, 1]$. Случайные величины ζ_n задаются соотношением

$$\zeta_n = \begin{cases} \xi_n & \text{с вероятностью } 1 - p, \\ d & \text{с вероятностью } p. \end{cases}$$

Таким образом, по трассе движутся группы автомобилей с расстоянием d между двумя соседними автомобилями. Количество автомобилей в группе случайно и имеет геометрическое распределение с параметром p . Есть еще «свободные» автомобили; расстояние от такого автомобиля до предшествующего имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_1 . Число «свободных» автомобилей между группами также геометрически распределено с параметром $1 - p$. Рассмотрение такого потока связано с желанием учесть то обстоятельство, что при движении по трассе автомобили образуют группы, возникающие как следствие различия в скоростях («быстрый» автомобиль догоняет «медленный» и некоторое время движется за ним; см., например, [21]), так и наличия светофоров. Если перед светофором есть очередь, а движение по трассе достаточно интенсивно, то после прохождения светофора некоторое время автомобили движутся группой. Функция распределения $A(x)$ рассматриваемого рекуррентного потока имеет скачок в точке d , равный p , и обладает производной при $x \neq d$

$$A'(x) = (1 - p)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}. \quad (22)$$

Средний интервал между автомобилями $a = pd + (1 - p)\lambda_1^{-1}$, а интенсивность потока $a^{-1} = (pd + (1 - p)\lambda_1^{-1})^{-1}$.

Основная трасса пересекается второстепенной дорогой S_2 , по которой движутся автомобили, образующие пуассоновский поток интенсивности λ_2 . Эти автомобили могут пересечь главную трассу, если на расстоянии J от точки пересечения дорог в направлении, противоположном направлению движения по трассе, нет автомобилей. Если интервал J занят, автомобили на S_2 останавливаются и ждут его освобождения, после чего происходит пересечение перекрестка. Если автомобиль на S_2 подходит к перекрестку, когда интервал J свободен и на S_2 нет других автомобилей, время прохождения перекрестка полагается равным нулю (эффект «проскакивания»). В остальных ситуациях время прохождения перекрестка — случайная величина, с ф.р. $F(x)$. Считается, что времена прохождения автомобилей независимы и не зависят от входящего потока. Можно сделать различные предположения о том, что происходит, если в момент, когда автомобиль на S_2 проходит перекресток, в интервале J на S_1 появляется автомобиль. Мы будем считать, что автомобиль на S_2 останавливается и после освобождения интервала J

мгновенно пересекает перекресток. Таким образом, функционирование перекрестка описывается в терминах системы обслуживания $M|GI|1$ с ненадежным прибором: прибор работает, когда интервал J свободен, прибор не работает, когда интервал J занят.

Относительно прохождения интервала J автомобилями на основной трассе также могут быть сделаны различные предположения. Автомобили могут двигаться независимо с собственными скоростями, или, напротив, с одинаковыми скоростями, так что время прохождения интервала J постоянно. Именно такая ситуация рассматривалась в работах [16] и [9]. Мы будем считать, что автомобиль, входящий в интервал J , когда на нем нет других автомобилей, имеет собственную скорость, так что время прохождения интервала J — сл.в. с ф.р. $B(x)$. В противном случае он приобретает скорость, общую для всех автомобилей, находящихся в интервале J . Это означает, что количество автомобилей $Q(t)$ в интервале J в момент t представляет собой количество требований в системе $GI|G|\infty$ с идентичным временем обслуживания на периоде занятости, рассмотренной в разд. 3. Время, в течение которого невозможно пересечение трассы автомобилями, следующими по S_2 (прибор не работает), является периодом занятости для этой бесконечноканальной системы. Ее свободный период представляет собой время, в течение которого прохождение перекрестка возможно (прибор работает).

Естественно предположить, что $B(d) = 0$. Тогда свободный период имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_1 и не зависит от периода занятости. Из (9), (12) и (22) для периода занятости $\tau^{(1)}$ получаем

$$\begin{aligned} g(s) &= \mathbf{E} e^{-s\tau^{(1)}} \\ &= (1-p) \int_d^\infty \frac{e^{-(s+\lambda_1)x}}{1 - pe^{-sd} - (1-p)\lambda_1(1 - e^{-(s+\lambda_1)x})/(s+\lambda_1)} dB(x); \quad (23) \\ g &= \mathbf{E} \tau^{(1)} = (1-p)^{-1} \int_d^\infty e^{\lambda_1 x} \left(pd + \frac{1-p}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x}) \right) dB(x). \quad (24) \end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие конечности математического ожидания периода занятости состоит в выполнении неравенства

$$b(-\lambda_1) = \int_0^\infty e^{\lambda_1 x} dB(x) < \infty. \quad (25)$$

Далее это условие предполагается выполненным.

Теперь исследование процесса очереди перед перекрестком сводится к изучению числа требований в системе $M|GI|1$ с ненадежным прибором. Прибор выходит из строя за время Δt (при условии, что он работает) с вероятностью $\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$. Функция распределения времени восстано-

вления имеет преобразование Лапласа–Стилтьеса, определяемое формулой (23), а среднее время восстановления задается соотношением (24).

4.2. Эргодическая теорема. Рассмотрим одноканальную систему с пуассоновским входящим потоком $X(t)$ интенсивности λ_2 и ненадежным прибором. Время работы прибора до выхода из строя экспоненциально распределено с параметром λ_1 , а время восстановления имеет ф.р. $G(x)$. Случайные величины, определяющие состояние прибора (работает или нет), взаимно независимы и не зависят от $X(t)$. Обозначим $0 = T_0 < T_1 < \dots$ последовательные моменты включения прибора после восстановления. Тогда $\tau_j = T_j - T_{j-1}$ представляет собой j -й цикл. Последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин и $\tau_j = \tau_j^{(0)} + \tau_j^{(1)}$, где $\tau_j^{(0)}$ и $\tau_j^{(1)}$ независимы и имеют ф.р. $(1 - e^{-\lambda_1 x})$ и $G(x)$ соответственно. Чтобы описать процесс обслуживания, введем последовательность $\{Y_j(t), t \geq 0\}_{j=1}^\infty$, состоящую из независимых одинаково распределенных случайных процессов, имеющих неубывающие непрерывные слева траектории с целочисленными значениями и единичными скачками. Процесс $\{Y_j(t), t \leq \tau_j^{(0)}\}$ определяет правило обслуживания при условии, что в течение всего периода $[0, \tau_j^{(0)}]$ в системе были требования. Таким образом, моменты окончаний обслуживания на j -м цикле — это моменты скачков процесса $Y_j(t)$. Введем случайный процесс $\tilde{Y}_j(t) = Y_j(t) \cdot \chi_{(t \leq \tau_j^{(0)})}$ и положим

$$\tilde{Y}(t) = \sum_{j=1}^{n(t)} \tilde{Y}_j(\tau_j) + \tilde{Y}_{n(t)+1}(t - T_{n(t)}),$$

$n(t)$ — число полных циклов до момента t , т.е. $n(t) = \max\{k \geq 0: T_k \leq t\}$.

Сначала мы рассмотрим систему без эффекта «проскакивания», т.е. уход требований определяется процессом $\tilde{Y}(t)$, который считается независимым от $X(t)$. Можно показать, что в такой ситуации для числа требований $q(t)$ в системе в момент t справедливо стохастическое равенство (см., например, [22])

$$q(t) = \sup_{u \leq t} (Z(t) - Z(u)), \quad (26)$$

где $Z(t) = X(t) - \tilde{Y}(t)$ и предполагается, что $q(0) = 0$.

Теорема 4. *Процесс $q(t)$ эргодичен тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_2 \mathbf{E} \tau_j < \mathbf{E} Y_j(\tau_j^{(0)}). \quad (27)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Процесс $q(t)$ — регенерирующий, и его точки регенерации — моменты T_j , для которых система свободна. Из теории восстановления (см., [19]) вытекает существование $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{q(t) =$

$k\} = p_k$. Независимость предельного распределения от начального состояния очевидна. Мы замечаем, что $\{X(t), \tilde{Y}(t)\}$ — циклический процесс в смысле определения, данного в [23]. Применяя доказанную там теорему к процессу $q(t)$, задаваемому соотношением (26), находим, что $q(t)$ стохастически ограничен тогда и только тогда, когда коэффициент загрузки $\rho = \mathbf{E} X(\tau_1) / \mathbf{E} \tilde{Y}(\tau_1) < 1$. Теорема 4 доказана.

Вернемся к модели, описанной в предыдущем пункте, считая, что нет эффекта «проскакивания» (модель M_1). Тогда $Y_j(t)$ представляет собой простой процесс восстановления, причем $Y_j(0) = 1$, поскольку мгновенное завершение обслуживания, прерванного из-за поломки прибора, добавляет скачок в нуле процессу $Y_j(t)$. Стоит еще напомнить, что $\tilde{Y}(t)$ задает процесс обслуживания в предположении, что в системе все время есть требования. Пусть $q_1(t)$ — число требований в момент t для модели M_1 .

Введем $f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$, где $F(x)$ — ф.р. времени обслуживания, т.е. интервалов между скачками $\tilde{Y}(t)$.

Следствие 1. Если $Y_j(t)$ — простой процесс восстановления и $Y_j(0) = 1$, то $q_1(t)$ эргодичен тогда и только тогда, когда

$$\lambda_2(1 + \lambda_1 g) < \frac{\lambda_1}{1 - f(\lambda_1)}. \quad (28)$$

Доказательство. Математическое ожидание длительности цикла $\mathbf{E} \tau_j = \lambda_1^{-1} + g$. Найдем $\mathbf{E} Y_j(\tau_j^{(0)})$. Пусть $H(t)$ — функция восстановления для простого процесса восстановления $Y_j(t)$ и $H(0) = 1$. Поскольку $\tau_j^{(0)}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_1 и не зависит от $Y_j(t)$, получаем

$$\mathbf{E} Y_j(\tau_j^{(0)}) = \lambda_1 \int_0^\infty H(t) e^{-\lambda_1 t} dt = H(0) + \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} dH(t).$$

Отсюда и из известного соотношения (см., например, [24])

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dH(t) = \frac{f(\lambda)}{1 - f(\lambda)}$$

в силу теоремы 4 устанавливаем справедливость условия (28). Следствие 1 доказано.

Для учета эффекта «проскакивания» рассмотрим модель M_2 , в которой требования, приходящие в свободную систему при работающем приборе, имеют нулевое время обслуживания. Пусть $q_2(t)$ — число требований в M_2 в момент t . Из очевидного стохастического неравенства $q_2(t) \leq q_1(t)$ получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Достаточным условием эргодичности $q_2(t)$ является выполнение неравенства (28).

Рассмотрим также модель M_3 , которая отличается от модели M_2 тем, что в случае, когда во время проезда перекрестка автомобилем с дороги S_2 в интервале J на основной трассе появляется автомобиль, автомобиль на S_2 успевает завершить проезд перекрестка мгновенно и покидает систему. Пусть $q_3(t)$ — число требований в модели M_3 в момент t . Поскольку $q_3(t) \leq q_2(t)$, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Достаточным условием эргодичности $q_3(t)$ является выполнение неравенства (28).*

Коэффициент загрузки для процессов $q_1(t)$, $q_2(t)$ и $q_3(t)$ определяется соотношением

$$\rho = \lambda_2(\lambda_1^{-1} + g)(1 - f(\lambda_1)). \quad (29)$$

Таким образом, для числа автомобилей на S_2 перед пересечением основной трассы условие эргодичности состоит в выполнении неравенства $\rho < 1$. При этом среднее значение времени восстановления прибора g (или периода занятости в $GI|G|\infty$) дается формулой (24).

Следствие 4. *Если время прохождения участка J на основной трассе постоянно и равно b , то коэффициент загрузки*

$$\rho = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{\lambda_1 b} \left(1 + \frac{\lambda_1 p d}{1 - p}\right) (1 - f(\lambda_1)). \quad (30)$$

При пуассоновском потоке движения на основной трассе ($p = 0$) из (30) находим $\rho = \lambda_2 \lambda_1^{-1} e^{\lambda_1 b} (1 - f(\lambda_1))$ и условие эргодичности $\lambda_2 < \lambda_1 / (e^{\lambda_1 b} (1 - f(\lambda_1)))$. Если время прохождения перекрестка автомобилем на S_2 постоянно и равно c , получаем условие $\lambda_2 < \lambda_1 / (e^{\lambda_1 b} (1 - e^{-\lambda_1 c}))$.

4.3. Предельное распределение числа автомобилей на трассе S_2 перед перекрестком ($t \rightarrow \infty$). Пусть $q(t)$ — число требований в момент t в системе с пуассоновским входящим потоком интенсивности λ_2 и ненадежным прибором, описанной в п. 4.1. Время восстановления прибора имеет ф.р. $G(x)$ и ее преобразование Лапласа–Стилтьеса $g(s)$ задается равенством (23). Сначала рассмотрим модель M_2 , учитывающую эффект «проскакивания». Введем производящую функцию $P(z, t) = \mathbf{E} z^{q(t)}$, $|z| < 1$.

Теорема 5. *Если выполнено условие эргодичности (28), то*

$$P(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(z, t) = P_0 \frac{zK_0(z) - K(z)}{z - K(z)}, \quad (31)$$

где

$$P_0 = (1 - K'(1))(1 - K'(1) + K'_0(1))^{-1}, \quad (32)$$

а функции $K(z)$ и $K_0(z)$ определяются соотношениями

$$K(z) = \beta(\lambda_2(1 - z)), \quad K_0(z) = \beta_0(\lambda_2(1 - z)), \quad (33)$$

$$\beta(s) = f(\lambda_1 + s) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} (1 - f(\lambda_1 + s))g(s), \quad (34)$$

$$\beta_0(s) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha g(\lambda_2)} + \frac{\alpha \lambda_2}{1 - \alpha g(\lambda_2)} \cdot \frac{g(\lambda_2) - g(s)}{s - \lambda_2} \cdot \beta(s), \quad (35)$$

и $\alpha = \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Систему $M|GI|1|\infty$ с ненадежным прибором будем называть основной. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\tau_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ — независимые последовательности независимых одинаково распределенных в каждой последовательности случайных величин. При этом ξ_n имеет ф.р. $F(x)$, $\tau_n^{(1)}$ — ф.р. $G(x)$, а η_n и γ_n распределены экспоненциально с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

Для удобства введем вспомогательную систему $M|GI|1|\infty$ с надежным прибором. Времена обслуживания в этой системе будут определяться таким образом, что число требований в ней $\tilde{q}(t)$ по распределению будет совпадать с $q(t)$. Кроме того, моменты ухода требований из основной и вспомогательной систем будут также совпадать. Пусть $\tilde{q}_{n-1}$ — число требований во вспомогательной системе в момент t_{n-1} окончания $(n-1)$ -го обслуживания ($n = 1, 2, \dots$).

Если $\tilde{q}_{n-1} > 0$, то время обслуживания n -го требования v_n — это интервал от момента t_{n-1} до момента ухода n -го требования из основной системы. Последовательность $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин и

$$v_n \stackrel{d}{=} \xi \chi_{\{\xi \leq \eta\}} + (\eta + \tau^{(1)}) \chi_{\{\xi > \eta\}}, \quad (36)$$

где $\xi \stackrel{d}{=} \xi_n$, $\eta \stackrel{d}{=} \eta_n$, $\tau^{(1)} \stackrel{d}{=} \tau_n^{(1)}$ и эти случайные величины независимы. Первое слагаемое в (36) соответствует случаю, когда обслуживание завершается до поломки прибора, а второе — противоположному случаю, так что уход требования из системы произойдет в момент восстановления прибора. Несложные выкладки показывают, что $\beta(s) = \mathbf{E}(e^{-sv_n} | \tilde{q}_{n-1} > 0)$ удовлетворяет (34).

Пусть $\tilde{q}_{n-1} = 0$. Время обслуживания n -го требования v_n^0 равно нулю, если момент его поступления попадает в интервал, когда в основной системе прибор работает. В противном случае время обслуживания v_n^0 состоит из остаточного (после прихода требования) времени восстановления прибора и случайной величины $\tilde{v}$, по распределению совпадающей с v_n . Последовательность времен обслуживания $\{v_n^0\}_{n=1}^\infty$ (при условии $\tilde{q}_{n-1} = 0$) состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин. Чтобы найти распределение v_n^0 , введем последовательность $\{T_j\}_{j=1}^\infty$ моментов поломок прибора, предположив $T_1 = 0$. Определим событие

$$C_j = \left\{ \gamma \in [T_j + \eta, T_j + \eta + \tau^{(1)}) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

где $\gamma \stackrel{d}{=} \gamma_n$, $\eta \stackrel{d}{=} \eta_n$, $\tau^{(1)} \stackrel{d}{=} \tau_n^{(1)}$ и все случайные величины в (37) взаимно независимы. Тогда

$$v_n^0 \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (T_j + \tau^{(1)} - \gamma + \eta + \tilde{v}) \chi_{\{C_j\}}, \quad (38)$$

где $\tilde{v} \stackrel{d}{=} v_n$ и не зависит от события C_j ($j = 1, 2, \dots$) и случайных величин $\tau^{(1)}$, T_j , γ , η . Получаем

$$\begin{aligned} \beta_0(s) &= \mathbf{E} e^{-s v_n^0} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E} e^{-s(T_j + \tau^{(1)} - \gamma + \eta + \tilde{v})} \chi_{\{C_j\}} + 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E} \chi_{\{C_j\}} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (g(\lambda_2) - g(s))}{(\lambda_1 + \lambda_2)(s - \lambda_2)} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^*(\lambda_2) + 1 - \frac{\lambda_1 (1 - g(\lambda_2))}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^*(\lambda_2), \end{aligned} \quad (39)$$

где $\varphi_j^*(s) = \mathbf{E} e^{-s T_j} = (g(s) \lambda_1 / (\lambda_1 + s))^{j-1}$. Соотношение (35) теперь незамедлительно следует из (39) и (34).

Рассмотрим процесс $\{\tilde{q}_n\}$ для вспомогательной системы. Это вложенная цепь Маркова для $\tilde{q}(t)$, поскольку справедливы равенства

$$\tilde{q}_n = \begin{cases} \tilde{q}_{n-1} - 1 + X(v_n), & \text{если } \tilde{q}_{n-1} > 0, \\ X(v_n^0), & \text{если } \tilde{q}_{n-1} = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Здесь $\{v_n\}$ и $\{v_n^0\}$ — последовательности независимых случайных величин соответственно с распределениями, задаваемыми их преобразованиями Лапласа–Стилтьеса $\beta(s)$ и $\beta_0(s)$.

Лемма 2. Если выполняются условия эргодичности (28), то функция $\tilde{P}(z)$ стационарного распределения цепи Маркова $\{\tilde{q}_n\}$ задается соотношениями (31)–(33).

Доказательство. Введем производящие функции $K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j = \beta(\lambda_2(1 - z))$ и $K_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j^0 z^j = \beta_0(\lambda_2(1 - z))$. Из (40) находим переходные вероятности для цепи Маркова $\{\tilde{q}_n\}$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ij} &= \mathbf{P}\{\tilde{q}_n = j \mid \tilde{q}_{n-1} = i\} = k_{j-i+1} \quad \text{при } i > 0, j \geq i - 1, \\ \tilde{P}_{0j} &= \mathbf{P}\{\tilde{q}_n = j \mid \tilde{q}_{n-1} = 0\} = k_j^0 \quad \text{при } j \geq 0. \end{aligned}$$

Выписав уравнения для стационарного распределения $\{\tilde{P}_j\}$ и решив их, получаем, что производящая функция $\tilde{P}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_j z^j$ определяется правой частью соотношения (31), где $\tilde{P}_0$ находится из условия нормировки, что приводит к (32). Поскольку

$$K'(1) = \lambda_2(1 - f(\lambda_1))(\lambda_1^{-1} + g) = \rho, \quad (41)$$

необходимое и достаточное условие эргодичности $\rho < 1$ совпадает с (28). Лемма 2 доказана.

Обозначим $\{t'_n\}$ последовательные моменты поступления требований в систему и положим $\tilde{q}'_n = \tilde{q}(t'_n - 0)$.

Лемма 3. Если выполнено неравенство (28), то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} z^{\tilde{q}'_n} = P(z),$$

где $P(z)$ определяется соотношениями (31)–(35).

Доказательство. Последовательность $\{\tilde{q}'_n\}$, вообще говоря, не является цепью Маркова. Но это — регенерирующий процесс. Его точки регенерации — моменты поступлений требований в свободную систему при работающем приборе. Поскольку этот процесс — апериодический, существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tilde{q}'_n = k\} = \pi'_k$ и при выполнении (28) последовательность $\{\pi'_k\}_{k=0}^\infty$ является распределением вероятностей.

Положим

$$N'_k(n) = \sum_{j=1}^n \chi_{\{\tilde{q}'_j=k\}}, \quad N_k(n) = \sum_{j=1}^n \chi_{\{\tilde{q}_j=k\}}.$$

Тогда по закону больших чисел

$$\frac{N'_k(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \pi'_k, \quad \frac{N_k(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \tilde{P}_k. \quad (42)$$

Пусть $\{\theta_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательные интервалы между регенерациями процесса $\tilde{q}'_n$. Не ограничивая общности, будем считать, что первое требование приходит в свободную систему и в этот момент прибор работает.

Обозначим $\kappa'_j(k)(\kappa_j(k))$ число переходов из состояния k в $k+1$ (из $k+1$ в k) для процесса $\tilde{q}'_n$ ($\tilde{q}_n$) на j -м периоде регенерации процесса $\tilde{q}'_n$. Очевидно, что

$$\kappa'_j(k) = \kappa_j(k) \text{ при всех } j = 1, 2, \dots \text{ и } k = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

Если $\nu(n)$ — число полных периодов регенерации за n поступлений требований и $\gamma_n = n - \sum_{i=1}^{\nu(n)} \theta_i$, то из неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu(n)} \kappa'_j(k) &\leq N'_k(n) \leq \sum_{j=1}^{\nu(n)} \kappa'_j(k) + \gamma_n, \\ \sum_{j=1}^{\nu(n)} \kappa_j(k) &\leq N_k(n) \leq \sum_{j=1}^{\nu(n)} \kappa_j(k) + \gamma_n \end{aligned} \quad (44)$$

и соотношений (42), (43) следует утверждение леммы, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \gamma_n = 0$. Таким образом, $P(z)$, задаваемая соотношениями (31)–(35), является производящей функцией предельного распределения процесса $q(t'_n - 0)$. Лемма 3 доказана.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что $\{t'_n\}$ — последовательность моментов скачков входящего пуассоновского

потока и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} z^{\tilde{q}'_n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} z^{\tilde{q}(t)}$ (см., например, [25]). Теорема 5 доказана.

Несложные вычисления показывают, что

$$K'_0(1) = C(\lambda_2 g - (1 - \rho)(1 - g(\lambda_2))),$$

где $C = \alpha(1 - \alpha g(\lambda_2))^{-1}$. Это приводит к следующему выражению для P_0 :

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho + C(\lambda_2 g - (1 - \rho)(1 - g(\lambda_2)))}. \quad (45)$$

З а м е ч а н и е 3. Для модели M_1 , не учитывающей эффект «проскакивания» при приходе автомобиля на свободный перекресток, но учитывающей мгновенное пересечение перекрестка (после окончания периода занятости) автомобилем, движение которого прервано, справедлива теорема 5 с заменой $K_0(z)$ на $K(z)$.

Если в этой модели предположить, что автомобиль, начавший движение, но вынужденный остановиться из-за появления автомобиля на основной трассе, повторяет попытку пересечь трассу, причем время пересечения случайно и не зависит от времени пересечения в прошлой попытке, мы получим модель, изученную в [17].

Для модели M_3 (с мгновенным пересечением перекрестка автомобилем на второстепенной дороге при появлении автомобиля на опасном расстоянии на главной трассе) процесс $\tilde{q}_n$ не является цепью Маркова. Однако справедливы стохастические неравенства $q_2(t) - 1 \leq q_3(t) \leq q_2(t)$, которые позволяют оценить среднюю очередь.

З а м е ч а н и е 4. Поскольку $P(z)$, определяемая соотношением (31), является производящей функцией вероятностного распределения тогда и только тогда, когда $K'(1) < 1$, условие (28) является необходимым и достаточным для эргодичности модели M_2 . В силу стохастических неравенств $q_2(t) - 1 \leq q_3(t) \leq q_2(t)$, это утверждение справедливо и для модели M_3 . Таким образом, для всех моделей M_1 , M_2 и M_3 необходимое и достаточное условие эргодичности одно и то же.

Если рассмотреть модель без «проскакивания» и с повторением обслуживания после прерывания, для процесса $Y_j(t)$ (см. п. 4.2) имеем $Y_j(0) = 0$. Необходимое и достаточное условие эргодичности имеет вид

$$\lambda_2(1 + \lambda_1 g) < \frac{\lambda_1 f(\lambda_1)}{1 - f(\lambda_1)}.$$

Это согласуется с результатами, полученными в [17].

Следствие 5. Если выполнено условие эргодичности (28) и $b(-2\lambda_1) < \infty$, то для модели M_2 существует $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \mathbf{E} q(t) = m < \infty$ и

$$m = P_0 \left(\frac{2K'_0(1) + K''_0(1)}{2(1 - K'(1))} + \frac{K''(1)K'_0(1)}{2(1 - K'(1))^2} \right), \quad (46)$$

где

$$K''(1) = \lambda_2^2(1 - f(\lambda_1))g''(0) + 2\lambda_2\rho \frac{1 - f(\lambda_1) + \lambda_1 f'(\lambda_1)}{\lambda_1(1 - f(\lambda_1))}, \quad (47)$$

$$K_0''(1) = C(\lambda_2^2 g''(0) - 2\lambda_2 g + 2(1 - g(\lambda_2))) + 2C(\lambda_2 g - (1 - g(\lambda_2)))K'(1) + C(1 - g(\lambda_2))K''(1), \quad (48)$$

$$g''(0) = 2(1 - p)^{-2} \int_d^\infty (ae^{2\lambda_1 x} + b(x)e^{\lambda_1 x})dB(x), \quad (49)$$

$$a = \left(p^2 d^2 + 2pd \frac{1-p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)^2}{\lambda_1^2} \right),$$

$$b(x) = \left(pd^2 \frac{1-p}{2} - 2pd \frac{1-p}{\lambda_1} - \frac{(1-p)^2}{\lambda_1^2} - pd(1-p)x - \frac{(1-p)^2}{\lambda_1} x \right),$$

Доказательство. В условиях следствия функции $K_0(z)$ и $K(z)$ дважды дифференцируемы в точке $z = 1$. Дифференцирование (31) и применение правила Лопиталя приводит к (46). Следствие 5 доказано.

4.4. Высокая загрузка. Полученные выражения для предельного распределения позволяют найти основные характеристики функционирования неуправляемого перекрестка. Однако расчеты достаточно сложны и представляет интерес описание поведения предельного распределения процесса $q(t)$ в условиях высокой загрузки, когда коэффициент загрузки ρ близок к единице. Этот вопрос для систем обслуживания $G|G|1|\infty$ и $G|G|r|\infty$ изучался многими авторами (см., например, работы [26], [27], [28], [29], [30]. В [29], [30] установлены общие теоремы, касающиеся асимптотического поведения характеристик различных систем в условиях высокой загрузки. Эти теоремы (например, [29, § 20, гл. 4]) могут быть использованы для асимптотического анализа изучаемого здесь процесса $q(t)$ в системе с ненадежным прибором, что требует доказательства ряда нетривиальных оценок. Поскольку в рассматриваемой ситуации имеется явное выражение для производящей функции $P(z)$, доказательство предельной теоремы сводится к разложению этой функции в окрестности единицы.

Коэффициент загрузки для $q(t)$ определяется соотношением (41). Мы будем предполагать, что интенсивность λ_2 пуассоновского потока автомобилей на второстепенной дороге зависит от параметра ε таким образом, что $\lambda_2^\varepsilon = (1 - \varepsilon)\delta\lambda_1$, где $\delta = ((1 + \lambda_1 g)(1 + f(\lambda_1)))^{-1}$. Тогда коэффициент загрузки системы $\rho_\varepsilon = 1 - \varepsilon$ и $\rho_\varepsilon \uparrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Процессы и их характеристики в системе с таким входящим потоком будем помечать буквой ε , при этом q_ε — сл.в. с производящей функцией $P_\varepsilon(z)$, определенной в теореме 5.

В силу замечания 4 следующая теорема верна для моделей M_2 и M_3 .

Теорема 6. Если $b(-3\lambda_1) < \infty$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\varepsilon q_\varepsilon > x\} \rightarrow \exp\{-2x\sigma^{-2}\} \quad (50)$$

и

$$\varepsilon m_\varepsilon \rightarrow \frac{\sigma^2}{2}, \quad (51)$$

где

$$\sigma^2 = \delta^2(2\lambda_1 f'(\lambda_1)(1 + \lambda_1 g) + (1 - f(\lambda_1))(g''(0)\lambda_1^2 + 2\lambda_1 g + 2)). \quad (52)$$

Доказательство. Используя (32), имеем

$$P_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + K'_{0\varepsilon}(1)} = \frac{\varepsilon(1 + \delta - g(\lambda_1\delta))}{\lambda_1\delta g} (1 + o(1)), \quad (53)$$

так как $K'_{0\varepsilon}(1) \rightarrow \lambda_1\delta g/(1 + \delta - g(\lambda_1\delta))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для математического ожидания из (46) и (53) получаем

$$\varepsilon m_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{K'_{0\varepsilon}(1)} \frac{K''_\varepsilon(1)K'_{0\varepsilon}(1)}{2\varepsilon} (1 + o(1)) = \frac{K''_\varepsilon(1)}{2} (1 + o(1)).$$

Поскольку $K''_\varepsilon(1) \rightarrow \delta^2\lambda_1^2\beta''(0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, устанавливаем (51), а после несложных выкладок — выражение (52) для σ^2 .

Соотношение (50) доказывается с помощью (32). Имеем

$$P_\varepsilon(e^{-s\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{K'_{0\varepsilon}(1)} \frac{e^{-s\varepsilon}K_{0\varepsilon}(e^{-s\varepsilon}) - K_\varepsilon(e^{-s\varepsilon})}{e^{-s\varepsilon} - K(e^{-s\varepsilon})} (1 + o(1)).$$

Разложение фигурирующих в данном выражении функций по степеням $s\varepsilon$ приводит к соотношению

$$P_\varepsilon(e^{-s\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 + s \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1},$$

где σ^2 задается равенством (53). Теорема 6 доказана.

З а м е ч а н и е 5. Поскольку теорема 5 верна для модели M_1 (без «проскакивания»), если $K_0(z) = K(z)$, из доказательства теоремы 6 следует ее справедливость и для процесса $q_1(t)$.

П р и м е р 3. Пусть по основной трассе движется пуассоновский поток автомобилей интенсивности λ_1 , т.е. $p = 0$ в (22). Время прохождения опасного участка постоянно и равно b . В соответствии с примером 1 имеем

$$g(s) = \frac{s + \lambda_1}{se^{(s+\lambda_1)b} + \lambda_1}, \quad g = \lambda_1^{-1}(e^{\lambda_1 b} - 1),$$

и в соответствии с (49)

$$g''(0) = \frac{2}{\lambda_1^2} (e^{2\lambda_1 b} - (1 + \lambda_1 b)e^{\lambda_1 b}).$$

Предположим, что время прохождения перекрестка автомобилем на второстепенной дороге экспоненциально распределено с параметром ν . Тогда $f(s) = \nu(\nu + s)^{-1}$. Для вероятности P_0 и среднего числа требований в системе m имеем

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho + C(\lambda_2 g - (1 - \rho)(1 - g(\lambda_2)))},$$

$$m = 2CP_0(1 - \rho)^{-2}(\lambda_2^2(1 - \rho)g''(0) + 2\lambda_2\rho(1 - \rho)g + \lambda_2 gK''(1)),$$

где

$$\rho = \frac{\lambda_2}{\nu + \lambda_1} e^{\lambda_1 b}, \quad C = \frac{\lambda_1(\lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)b} + \lambda_2)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)},$$

$$K''(1) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \nu} (\lambda_1 \lambda_2 g''(0) + 2\rho).$$

Для условий высокой загрузки из (52) находим

$$\sigma^2 = 2\lambda_1^{-1}(\lambda_1 + \nu - e^{-\lambda_1 b}(\lambda_1 \nu b + \lambda_1^2 b + 2\nu)),$$

и асимптотика математического ожидания числа автомобилей на второстепенной дороге определяется равенством

$$\varepsilon m_\varepsilon = \lambda_1^{-1}(\lambda_1 + \nu - e^{-\lambda_1 b}(\lambda_1 \nu b + \lambda_1^2 b + 2\nu))(1 + o(1)).$$

5. Стохастический анализ неуправляемого перекрестка (движение по основной трассе в двух направлениях).

5.1. Описание модели. В этом пункте рассмотрим обобщение модели, предложенной в [9]. Основная трасса имеет два противоположных направления движения S_1 и S_2 . Потоки автомобилей — рекуррентные с ф.р. между поступлениями $A_i(x)$, определенными соотношением (22) с параметрами p_i , d_i , λ_i для S_i и ф.р. времени прохождения опасного участка $B_i(x)$, $B_i(d_i) = 0$ ($i = 1, 2$). По второстепенной дороге S_3 движутся два независимых пуассоновских потока автомобилей $X_3(t)$, $X_4(t)$ с параметрами λ_3 и λ_4 . Автомобили потока $X_4(t)$ поворачивают направо, так что преодоление перекрестка осуществляется, когда свободен участок J_1 на S_1 . Автомобили потока $X_3(t)$ поворачивают налево и преодолевают перекресток, когда свободны оба участка J_1 и J_2 на S_1 и S_2 (см. рисунок).

Остальные предположения относительно пересечения перекрестка те же, что и в разд. 4 для модели M_2 . Тогда процесс образования очереди на S_3 из автомобилей потоков $X_3(t)$ и $X_4(t)$ описывается системой обслуживания с ненадежным прибором. Для числа автомобилей $q_4(t)$ потока $X_4(t)$ верны все утверждения разд. 4 с очевидной заменой $p, d, \lambda_1, \lambda_2$ на $p_1, d_1, \lambda_1, \lambda_4$ и функции $B(x)$ на $B_1(x)$ в соответствующих формулах.

Рассмотрим число автомобилей $q_3(t)$ на перекрестке в момент t , желающих повернуть налево. Чтобы воспользоваться результатами разд. 4, необходимо знать распределения интервалов времени, когда J_1 и J_2 свободны, а также интервалов, когда хотя бы один из этих участков занят (пересечение основной трассы невозможно).

Пусть $Q_i(t)$ — число требований в модифицированной системе $GI|G|\infty$ с ф.р. $A_i(x)$ интервалов между поступлениями требований и временем обслуживания с ф.р. $B_i(x)$ ($i = 1, 2$). Процессы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ независимы. Обозначим $\{\tau_{in}^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность периодов занятости для $Q_i(t)$ и

$$G_i(x) = \mathbf{P}\{\tau_{in}^{(1)} \leq x\}, \quad g_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG_i(x), \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Функции $g_i(s)$ определены соотношением (23) с заменой $d, p, \lambda_1, B(x)$ соответственно на $d_i, p_i, \lambda_i, B_i(x)$. Свободные периоды для $Q_i(t)$ (при условии $B_i(d_i) = 0$) имеют экспоненциальное распределение с параметром λ_i ($i = 1, 2$) и не зависят от периода занятости. Поскольку процессы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ независимы, интервалы, когда обе системы свободны, имеют экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

5.2. Условие эргодичности $q_3(t)$. Прежде всего установим условие существования собственного предельного распределения у процесса $q_3(t)$ (условие эргодичности).

Следствие 6. Если

$$\bar{g}_i = \int_0^{\infty} x dG_i(x) < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (54)$$

то процесс $q_3(t)$ эргодичен тогда и только тогда, когда

$$\lambda_3(1 + \lambda_1 \bar{g}_1 + \lambda_2 \bar{g}_2 + \lambda_1 \lambda_2 \bar{g}_1 \bar{g}_2) < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - f(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (55)$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 1 для одноканальной системы $M|GI|1$ с ненадежным прибором. Входящий поток имеет интенсивность λ_3 , а время безотказной работы прибора экспоненциально распределено с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, вместо λ_2 в (28) надо взять λ_3 , а вместо λ_1 взять λ . Остается вычислить математическое ожидание времени τ восстановления прибора.

Обозначим $P_0^{(i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q_i(t) = 0\}$, $i = 1, 2$, и $P_{00} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q_1(t) = 0, Q_2(t) = 0\}$. Тогда

$$P_{00} = P_0^{(1)} P_0^{(2)}. \quad (56)$$

Кроме того,

$$P_{00} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} + \mathbf{E} \tau} \quad \text{и} \quad P_0^{(i)} = \frac{\lambda_i^{-1}}{\lambda_i^{-1} + \mathbf{E} \tau_{in}^{(1)}} = \frac{\lambda_i^{-1}}{\lambda_i^{-1} + \bar{g}_i}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда и из (56) находим

$$\mathbf{E} \tau = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} (\lambda_1 \bar{g}_1 + \lambda_2 \bar{g}_2 + \lambda_1 \lambda_2 \bar{g}_1 \bar{g}_2),$$

что приводит к (55). Следствие 6 доказано.

5.3. Предельное распределение процесса $q_3(t)$. Чтобы найти на основе теоремы 5 предельное распределение при $t \rightarrow \infty$ процесса $q_3(t)$, надо установить распределение $G(x)$ периода, когда занят хотя бы один из участков J_1 или J_2 (поворот налево невозможен). С этой целью рассмотрим две независимые системы с отказами $M|GI|1|0$. Входящий поток пуассоновский с параметром λ_i и время обслуживания имеет ф.р. $G_i(x)$ для i -й системы ($i = 1, 2$). Циклом с номером n для i -й системы назовем сумму $\tau_{in} = \tau_{in}^{(0)} + \tau_{in}^{(1)}$, где $\tau_{in}^{(0)}$ — время, когда i -я система свободна, $\tau_{in}^{(1)}$ — время, когда i -я система занята. Пусть $P_{0i}(t)$ — вероятность того, что i -я система свободна в момент t и $P_{0i}(0) = 1$. Случайные величины $\tau_{in}^{(0)}$ и $\tau_{in}^{(1)}$ независимы, причем $\mathbf{E} e^{-s\tau_{in}^{(0)}} = \lambda_i / (\lambda_i + s)$. Обозначим также

$$\varphi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{01}(t) P_{02}(t) dt \quad \text{и} \quad g^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x). \quad (57)$$

Лемма 4. *Выполняется соотношение*

$$g^*(s) = 1 + \frac{s}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2) \varphi^*(s)}. \quad (58)$$

Доказательство. Пусть $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательные моменты времени, в которые обе системы становятся свободными, причем $T_0 = 0$. Тогда последовательность $\{\tau_n = T_n - T_{n-1}\}_{n=1}^\infty$ состоит из независимых одинаково распределенных величин, т.е. это последовательность циклов системы, состоящей из двух независимых систем с отказами. Кроме того, $\tau_n = \tau_n^{(0)} + \tau_n^{(1)}$, где $\tau_n^{(0)}$ и $\tau_n^{(1)}$ независимы и $\tau_n^{(0)}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$, а $\tau_n^{(1)}$ имеет ф.р. $G(x)$, так что

$$\psi^*(s) = \mathbf{E} e^{-s\tau_n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + s} g^*(s). \quad (59)$$

Пусть $H(t)$ — функция восстановления для последовательности $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ и $\psi(x) = \mathbf{P}\{\tau_n \leq x\}$.

В силу независимости рассматриваемых систем с отказами справедливо равенство

$$\begin{aligned} P_{01}(t)P_{02}(t) &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{T_n < t < T_n + \tau_n^{(0)}\} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-y)} d\psi^{n*}(y) \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + \int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-y)} dH(y). \end{aligned}$$

Переходя к преобразованию Лапласа и учитывая, что $\int_0^{\infty} e^{-sy} dH(y) = \psi^*(s)/(1 - \psi^*(s))$ из (59) находим (58). Лемма 4 доказана.

Таким образом, ф.р. $G(x)$ времени, когда занят хоть один из интервалов J_1 или J_2 , выражается через нестационарные вероятности $P_{01}(t)$ и $P_{02}(t)$. Если $H_i(y)$ функция восстановления для простого процесса восстановления, задаваемого последовательностью циклов i -й системы $\{\tau_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, то

$$P_{0i}(t) = e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-y)} dH_i(y),$$

и это позволяет найти функцию $\varphi^*(s)$ по формуле (57).

Теперь из теоремы 5 и леммы 4 получаем следующее утверждение.

Следствие 7. Если выполнено (55), то производящая функция предельного распределения $P_3(z)$ определяется соотношениями (31)–(33) с заменой функции $g(s)$ на функцию $g^*(s)$, вычисляемую по формуле (58).

Если наложить дополнительные условия на функции $B_1(x)$ и $B_2(x)$, можно получить утверждения, аналогичные следствию 5 и теореме 6 (о высокой загрузке). Здесь мы ограничимся примером, представляющим модель из [9], но учитывающую эффект «проскакивания».

Пример 4. Рассмотрим модель при простейших предпосылках, когда $A_i(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}$, а время прохождения участка J_i на S_i постоянно и равно b_i ($i = 1, 2$). Если $b_1 = b_2$, то мы получаем модель, описанную в примере 3. Следует только вместо λ_1 взять суммарную интенсивность движения по дорогам S_1 и S_2 , т.е. $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. При $b_1 \neq b_2$ вероятность того, что обе дороги свободны в момент t дается соотношением

$$P_{01}(t)P_{02}(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \chi_{\{t < b_1\}} + e^{-\lambda_1 b_1 - \lambda_2 t} \chi_{\{b_1 < t < b_2\}} + e^{-\lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2} \chi_{\{t > b_2\}}.$$

Используя это равенство, получаем

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} P_{01}(t)P_{02}(t) dt \\ &= (s + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1} + (s + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1} (s + \lambda_2)^{-1} \lambda_1 e^{-(s + \lambda_1 + \lambda_2) b_1} \\ &\quad + (s + \lambda_2)^{-1} s^{-1} \lambda_2 e^{-(s + \lambda_1 + \lambda_2) b_2}, \end{aligned}$$

а функция $g^*(s)$ находится с помощью (58).

Условие эргодичности определяется условием (55) и результатами примера 1

$$\lambda_3 < \lambda e^{-(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)} (1 - f(\lambda))^{-1}. \quad (60)$$

Это позволяет получить основные характеристики процесса $q_3(t)$ в предельном режиме. Выкладки и формулы достаточно громоздки и здесь не приводятся. Ограничимся более простым результатом.

Следствие 8. Если $b_1 = b_2 = b$ и выполнено (60), то существует $P_3(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} z^{q_3(t)}$, $|z| \leq 1$. Функция $P_3(z)$ определяется соотношениями (31)–(33), где

$$\begin{aligned} \beta(s) &= (se^{(s+\lambda)b} f(\lambda + s) + \lambda)(se^{(s+\lambda)b} + \lambda)^{-1}, \\ \beta_0(s) &= \lambda_3 \left((\lambda + \lambda_3(1 - g(\lambda_1))(s - \lambda_3)) \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(s - \lambda_3 + \frac{\lambda_3}{\lambda} (g(\lambda_3) - g(s))\beta(s) \right), \\ g(s) &= (s + \lambda)(se^{(s+\lambda)b} + \lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Доказательство состоит в вычислении $\beta(s)$ и $\beta_0(s)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bartlett M. S. Some evolutionary stochastic processes. — J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 1949, v. 11, p. 211–229.
2. Kendall D. G. Les processus stochastiques de croissance en biologie. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1952, v. 13, p. 43–108.
3. Benes V. E. Mathematical Theory of Connecting Networks and Telephone Traffic. New York: Academic Press, 1965, 319 p.
4. Cramer H., Leadbetter M. R. Stationary and Related Stochastic Processes. New York: Wiley, 1967, 348 p.
5. Brillinger D. R. Cross-spectral analysis of processes with stationary increments including the stationary $G|G|\infty$ queue. — Ann. Probab., 1974, v. 2, № 5, p. 815–827.
6. Stadje W. The busy period of the queueing system $M|G|\infty$. — J. Appl. Prob., 1985, v. 22, № 3, p. 697–704.
7. Brown M. An $M|G|\infty$ estimation problem. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 2, p. 651–654.
8. Цыбаков Б. С. Периоды занятости в системе с неоднородными обслуживающими приборами или каналами. — Проблемы передачи информации, 2005, т. 41, с. 105–122.
9. Gideon R., Pyke R. Markov renewal modelling of Poisson traffic at intersections having separate turn lanes. — Semi-Markov Models and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, p. 285–310.
10. Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей. — Труды МФТИ, 2010, т. 2, № 4, с. 6–21.
11. Pakes A. G., Kaplan N. L. On the subcritical Bellman–Harris process with immigration. — J. Appl. Prob., 1974, v. 11, № 4, p. 652–668.
12. Albrecher H., Borst S. C., Boxma O. J., Resing J. Ruin excursions, the $G|G|\infty$ queue and tax payments in renewal risk models. — J. Appl. Prob. Spec., 2011, v. 48A, p. 3–14.

13. Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В. Надежность систем с регенерирующим потоком отказов элементов. — Автомат. и телемех., 2010, в. 7, с. 15–28.
14. Guillemin F., Simonian A. Transient characteristics of an $M|M|\infty$ systems. — Advances Appl. Probab., 1995, v. 27, № 3, p. 862–888.
15. Preater J. $M|M|\infty$ transience revisited. — J. Appl. Probab., 1997, v. 34, № 4, p. 1061–1067.
16. Tanner J. C. The delay to pedestrians crossing a road. — Biometrika, 1951, v. 38, № 3/4, p. 383–392.
17. Gaver D. P., Jr. A waiting line with interrupted service, including priorities. — J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 1962, v. 24, № 1, p. 73–90.
18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984.
19. Smith W. L. Regenerative stochastic processes. — Proc. Roy. Soc., London Ser. A, 1955, v. 232, № 1188, p. 6–31.
20. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1965, 244 с.
21. Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В. Некоторые задачи для потоков взаимодействующих частиц. — Сборник, посвященный 70-летию ректора МГУ В. А. Садовниченко, «Современные проблемы математики и механики», 2009, т. IV, с. 55–67.
22. Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М.: изд-во МГУ, 1980, 110 с.
23. Афанасьева Л. Г. Системы массового обслуживания с циклическими управляющими последовательностями. — Кибернетика и системный анализ, 2005, т. 41, № 1, p. 54–68.
24. Karlin S., McGregor J. The classification of birth and death processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1957, v. 86, № 2, p. 366–400.
25. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: URSS, 2005, 400 с.
26. Whitt W. Heavy traffic limit theorems for queues: A survey. — Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. Berlin: Springer, 1974, v. 98, p. 307–350.
27. Iglehart D. L. Limiting diffusion approximation for the many server queue and the repairman problem. — J. Appl. Probab., 1965, v. 2, № 2, p. 429–441.
28. Iglehart D. L., Whitt W. Multiple channel queues in heavy traffic, I. — Advances Appl. Probab., 1970, v. 2, № 2, p. 150–177.
29. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
30. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 384 с.

Поступила в редакцию
6.III.2012