Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, А. Н. Ширяев, Байесовские задачи о разладке на фильтрованных вероятностных пространствах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 453–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:25:23

© 2012 г. ЖИТЛУХИН М. В.*, ШИРЯЕВ А. Н.*

БАЙЕСОВСКИЕ ЗАДАЧИ О РАЗЛАДКЕ НА
ФИЛЬТРОВАННЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹⁾

В работе формулируется общая постановка байесовских задач о разладке, обобщающая модели, имеющиеся в литературе. Изучаются свойства основных статистик, позволяющие сводить задачи скорейшего обнаружения момента разладки к задачам об оптимальной остановке. При помощи полученных общих результатов детально рассматривается одна задача о разладке броуновского движения на отрезке.

Ключевые слова и фразы: разладка, байесовские G -модели, уравнения для достаточных статистик, задачи скорейшего обнаружения, задачи об оптимальной остановке, уравнения для оптимальных границ.

1. Стохастические системы с разладкой.

1.1. Исходным объектом в задачах о разладке является *фильтрованный вероятностно-статистический эксперимент* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^\infty)$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — некоторое измеримое пространство с заданными на нем фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ и двумя вероятностными мерами $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ такими, что $\mathbf{P}^0 \stackrel{\text{loc}}{\sim} \mathbf{P}^\infty$, т.е. для каждого $t \geq 0$ сужения мер $\mathbf{P}^0|_{\mathcal{F}_t}$ и $\mathbf{P}^\infty|_{\mathcal{F}_t}$ эквивалентны. Мера $\mathbf{P}^0$ интерпретируется как соответствующая поведению системы, когда разладка присутствует с самого начала, а мера $\mathbf{P}^\infty$ — когда разладка не происходит вовсе.

Далее всегда будет предполагаться, что фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ непрерывна справа, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty (= \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.

Пусть $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, доминирующая $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$, причем $\mathbf{P} \stackrel{\text{loc}}{\sim} \mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P} \stackrel{\text{loc}}{\sim} \mathbf{P}^\infty$ (например, $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^0 + \mathbf{P}^\infty)/2$). Будем использовать обозначения $\mathbf{P}_t$, $\mathbf{P}_t^0$, $\mathbf{P}_t^\infty$ для сужений мер $\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t}$, $\mathbf{P}^0|_{\mathcal{F}_t}$, $\mathbf{P}^\infty|_{\mathcal{F}_t}$ и положим

$$L_t^0 = \frac{d\mathbf{P}_t^0}{d\mathbf{P}_t}, \quad L_t^\infty = \frac{d\mathbf{P}_t^\infty}{d\mathbf{P}_t}$$

* Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: zhitlukhin@gmail.com; albertsh@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00949) и Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании МФТИ (грант Правительства РФ № 11.634.0073).

для соответствующих производных Радона–Никодима.

Процессы $L^i = (L_t^i)_{t \geq 0}$, $i = 0, \infty$, являются положительными $\mathbf{P}$ -равномерно интегрируемыми мартингалами (см., например, [2, утверждение III.3.5]). Пусть $M^i = (M_t^i)_{t \geq 0}$ обозначает стохастический логарифм L^i :

$$M_t^i = \int_0^t \frac{1}{L_{s-}^i} dL_s^i.$$

Процессы M^i являются локальными мартингалами, причем $L^i = \mathcal{E}(M^i)$, где $\mathcal{E}(M^i)$ — стохастическая экспонента M^i , т.е. процесс являющийся единственным (сильным) решением уравнения (см. [2, теорема II.8.3])

$$d\mathcal{E}(M^i)_t = \mathcal{E}(M^i)_{t-} dM_t^i, \quad \mathcal{E}(M^i)_0 = 1.$$

По процессам M^0 и M^∞ построим семейство локальных мартингалов $(M^\theta)_{\theta \geq 0}$, задаваемых равенством

$$M_t^\theta = \int_0^t \mathbf{I}(s < \theta) dM_s^\infty + \int_0^t \mathbf{I}(s \geq \theta) dM_s^0, \quad t \geq 0,$$

и обозначим

$$L^\theta = \mathcal{E}(M^\theta).$$

Ясно, что так определенные процессы L^θ при $\theta = 0$ и $\theta = \infty$ совпадают с введенными выше L^0 и L^∞ . Кроме того, для всех остальных θ справедлива формула

$$L_t^\theta = L_t^\infty \mathbf{I}(t < \theta) + L_t^0 \frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} \mathbf{I}(t \geq \theta), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

В справедливости данной формулы можно убедиться, непосредственно проверив, что L^θ удовлетворяет уравнению стохастической экспоненты M^θ .

Определим семейство вероятностных мер $(\mathbf{P}^\theta)_{\theta \geq 0}$ на $(\Omega, \mathcal{F})$, полагая для каждого $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}^\theta(A) = \mathbf{E}^\mathbf{P}[\mathbf{I}(A)L_\infty^\theta], \quad \text{где} \quad L_\infty^\theta = \lim_{s \rightarrow \infty} L_s^\theta \quad \left[= L_\infty^0 \frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} \right].$$

Ясно, что $L_\infty^\theta \geq 0$; покажем, что $\mathbf{E}^\mathbf{P} L_\infty^\theta = 1$ и, следовательно, $\mathbf{P}^\theta$ действительно является вероятностной мерой. В самом деле, используя равенство (1), находим

$$\mathbf{E}^\mathbf{P} L_\infty^\theta = \mathbf{E}^\mathbf{P} \left[L_\infty^0 \frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} \right] = \mathbf{E}^\mathbf{P} \left[\frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} \mathbf{E}^\mathbf{P}(L_\infty^0 | \mathcal{F}_{\theta-}) \right] = \mathbf{E}^\mathbf{P} L_{\theta-}^\infty = 1.$$

Каждая из построенных мер $\mathbf{P}^\theta$ интерпретируется как мера, соответствующая поведению системы, когда разладка происходит в момент θ . Заметим, что из (1) следует равенство (с $\mathbf{P}_t^\theta = \mathbf{P}^\theta | \mathcal{F}_t$)

$$\mathbf{P}_t^\theta = \mathbf{P}_t^\infty \quad \text{при } \theta > t, \quad (2)$$

означающее, что наличие разладки не влияет на поведение системы до момента разладки.

1.2. В байесовских задачах о разладке предполагается, что момент разладки является случайной величиной, обладающей некоторой известной функцией распределения G на $(\mathbf{R}_+, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+))$. В связи с этим введем фильтрованное вероятностное пространство $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \bar{\mathbf{P}}^G)$ с

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \mathbf{R}_+, \quad \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+), \quad \bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \{\emptyset, \mathbf{R}_+\}$$

и вероятностной мерой $\bar{\mathbf{P}}^G$ такой, что для любых $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$

$$\bar{\mathbf{P}}^G(A \times B) = \int_B \mathbf{P}^t(A) dG(t).$$

Пространство $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \bar{\mathbf{P}}^G)$ будем называть G -моделью, построенной по фильтрованному вероятностно-статистическому эксперименту $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^\infty)$ и функции распределения G . Символом $\mathbf{E}^G$ будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}^G$.

Фильтрация $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ интерпретируется как поток *наблюдаемых* событий. Отметим, что $\bigvee_{t \geq 0} \bar{\mathcal{F}}_t \subsetneq \bar{\mathcal{F}}$. Случайная величина θ , определенная на $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ равенством $\theta(\omega, t) = t$, интерпретируется как *случайный момент разладки*. Ясно, что $\bar{\mathbf{P}}^G(\theta \leq t) = G(t)$. При этом θ не измерим относительно σ -алгебры $\bigvee_t \bar{\mathcal{F}}_t$, т.е. момент разладки непосредственно не наблюдаем.

2. Основные статистики.

2.1. Основными статистиками для G -моделей, с которыми мы будем иметь дело, являются *обобщенная статистика Ширяева–Роберта* $\psi^{(b)} = (\psi_t^{(b)})_{t \geq 0}$, где $b \geq 0$ — константа²⁾, а также *процесс апостериорных вероятностей* — $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ и связанный с ним процесс $\varphi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$:

$$\psi_t^{(b)} = \int_0^t \frac{L_t^s}{L_t^\infty} e^{b(t-s)} dG(s), \quad \pi_t = \bar{\mathbf{P}}^G(\theta \leq t | \bar{\mathcal{F}}_t), \quad \varphi_t = \frac{\pi_t}{1 - \pi_t}.$$

Процесс $\psi^{(b)}$ определен на $(\Omega, \mathcal{F})$, а процессы π и φ , формально, определены на $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$. Однако, принимая во внимание их измеримость относительно $\bigvee_t \bar{\mathcal{F}}_t$, там, где это удобно, мы будем считать π и φ переопределенными на $(\Omega, \mathcal{F})$, не оговаривая этого отдельно.

²⁾ Значение $b = 0$ соответствует стандартному определению статистики Ширяева–Роберта.

В данном пункте мы получим стохастические уравнения для процессов $\psi^{(b)}$ и φ . Сначала укажем связь между ними. По обобщенной формуле Байеса (см., например, [7, § II.7]) имеем

$$\pi_t = \frac{\int_0^t L_t^s dG(s)}{\int_0^\infty L_t^s dG(s)}, \quad 1 - \pi_t = \frac{\int_{t+}^\infty L_t^s dG(s)}{\int_0^\infty L_t^s dG(s)} = \frac{(1 - G(t))L_t^\infty}{\int_0^\infty L_t^s dG(s)},$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $L_t^s = L_t^\infty$ для $s > t$ согласно (1). Отсюда следует, что

$$\pi_t = \frac{\psi_t^{(0)}}{1 - G(t) + \psi_t^{(0)}}, \quad \varphi_t = \frac{\psi_t^{(0)}}{1 - G(t)}. \quad (3)$$

Введем обозначение $L_t = L_t^0/L_t^\infty$ для производной Радона–Никодима меры $\mathbf{P}_t^0$ по мере $\mathbf{P}_t^\infty$. Тогда, используя (1), получаем

$$\psi_t^{(b)} = e^{bt} L_t \int_0^t \frac{1}{e^{bs} L_{s-}} dG(s).$$

По формуле Ито для семимартингалов (см., например, [2, теорема I.4.57]) находим, что процесс $\psi^{(b)}$ удовлетворяет уравнению

$$d\psi_t^{(b)} = b\psi_t^{(b)} dt + dG(t) + \frac{\psi_t^{(b)}}{L_t} dL_t, \quad \psi_0^{(b)} = G(0). \quad (4)$$

Применяя формулу Ито к $\varphi_t = \psi_t^{(0)}/(1 - G(t))$, получаем, что процесс φ удовлетворяет уравнению

$$d\varphi_t = \frac{1 + \varphi_{t-}}{1 - G(t)} dG(t) + \frac{\varphi_t}{L_t} dL_t, \quad \varphi_0 = \frac{G(0)}{1 - G(0)}. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е 1. Представляют интерес также величины

$$\psi_{t,r}^{(b)} = \int_0^r \frac{L_t^s}{L_t^\infty} e^{b(t-s)} dG(s), \quad \pi_{t,r} = \mathbf{P}^G(\theta \leq r \mid \mathcal{F}_t), \quad \varphi_{t,r} = \frac{\pi_{t,r}}{1 - \pi_t}.$$

(Ясно, что $\psi_{t,t}^{(b)} = \psi_t^{(b)}$, $\pi_{t,t} = \pi_t$, $\varphi_{t,t} = \varphi_t$.)

Используя (1), находим

$$\psi_{t,r}^{(b)} = \frac{L_t}{L_r} e^{b(t-r)} \psi_r^{(b)} \mathbf{I}(r \leq t) + \left(\psi_t^{(b)} + \int_{t+}^r e^{b(t-s)} dG(s) \right) \mathbf{I}(r > t).$$

Аналогично (3) устанавливается, что $\varphi_{t,r} = \psi_{t,r}^{(0)}/(1 - G(t))$, откуда следуют формулы

$$\begin{aligned} \varphi_{t,r} &= \left[\frac{(1 - G(r))L_t}{(1 - G(t))L_r} \varphi_r \right] \mathbf{I}(r \leq t) + \left[\varphi_t + \frac{G(r) - G(t)}{1 - G(t)} \right] \mathbf{I}(r > t), \\ \pi_{t,r} &= \left[\frac{(1 - \pi_t)(1 - G(r))L_t}{(1 - \pi_r)(1 - G(t))L_r} \pi_r \right] \mathbf{I}(r \leq t) \\ &\quad + \left[\pi_t + \frac{G(r) - G(t)}{1 - G(t)} (1 - \pi_t) \right] \mathbf{I}(r > t). \end{aligned}$$

2.2. Отметим некоторые частные G -модели, в которых имеются удобные представления для процессов $\psi^{(b)}$ и φ .

G -модели с дискретным временем. Предположим, что случайная величина θ принимает лишь целые неотрицательные значения и фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ имеет структуру $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[t]}$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть. Иными словами, «обновление информации» происходит дискретно в моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$.

Тогда $\psi_t^{(b)} = \psi_{[t]}^{(b)}$, $\varphi_t = \varphi_{[t]}$ и из (4) и (5) находим, что случайные последовательности $(\psi_n^{(b)})_{n \geq 0}$, $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (с обозначением $\Delta G(n) = G(n) - G(n-1)$)

$$\psi_n^{(b)} = \frac{L_n}{L_{n-1}}(\Delta G(n) + (1+b)\psi_{n-1}^{(b)}), \quad \psi_0^{(b)} = G(0), \quad (6)$$

$$\varphi_n = \frac{L_n}{L_{n-1}} \left(\frac{\Delta G(n)}{1 - G(n)} + \frac{1 - G(n-1)}{1 - G(n)} \varphi_{n-1} \right), \quad \varphi_0 = \frac{G(0)}{1 - G(0)}. \quad (7)$$

G -модели для марковских случайных последовательностей. Предположим, что на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ задана последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ со значениями в $\mathbf{R}^n$ и $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k; k \leq n)$ (предполагается, что ξ_0 — константа).

Пусть меры $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ таковы, что относительно каждой из них $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ является марковской последовательностью случайных величин. В таком случае найдется последовательность измеримых функций $\{f_n(x, y)\}_{n \geq 1}$, $f_n: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, таких, что

$$L_n = \prod_{k=1}^n f_k(\xi_{k-1}, \xi_k), \quad L_0 = 1.$$

Соответственно, формулы (6) и (7) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_n^{(b)} &= f_n(\xi_{n-1}, \xi_n)(\Delta G(n) + (1+b)\psi_{n-1}^{(b)}), \quad \psi_0^{(b)} = G(0), \\ \varphi_n &= f_n(\xi_{n-1}, \xi_n) \left(\frac{\Delta G(n)}{1 - G(n)} + \frac{1 - G(n-1)}{1 - G(n)} \varphi_{n-1} \right), \quad \varphi_0 = \frac{G(0)}{1 - G(0)}. \end{aligned}$$

Тогда двумерные последовательности $\{(\psi_n, \xi_n)\}_{n \geq 0}$ и $\{(\varphi_n, \xi_n)\}_{n \geq 0}$ являются марковскими относительно $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ (см., например, [8, лемма II.17]). Более того, если $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ является последовательностью независимых случайных величин относительно $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$, то функции $f_k(\xi_{k-1}, \xi_k)$ не зависят от ξ_{k-1} и сами последовательности $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ и $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ являются марковскими.

G -модели для диффузионных процессов. Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ задан случайный процесс X с непрерывными траекториями, $X_0 = 0$ и $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$ для всех $t \geq 0$.

Пусть меры $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ таковы, что X допускает представления

$$dX_t = \mu_0(t, X_t) dt + dB_t^0, \quad dX_t = \mu_\infty(t, X_t) dt + dB_t^\infty,$$

где $B^0 = (B_t^0)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение относительно $\mathbf{P}^0$, $B^\infty = (B_t^\infty)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение относительно $\mathbf{P}^\infty$, а $\mu_0(t, x)$ и $\mu_\infty(t, x)$ — известные функции.

Обозначим

$$\mu(t, x) = \mu_0(t, x) - \mu_\infty(t, x).$$

Предполагается, что $\mathbf{P}^0(\int_0^t \mu^2(s, X_s) ds < \infty) = \mathbf{P}^\infty(\int_0^t \mu^2(s, X_s) ds < \infty) = 1$ для всех $t \geq 0$, что является необходимым и достаточным условием локальной эквивалентности мер $\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{P}^\infty$ (см. [2, теорема III.5.38]). В этом случае процесс L задается формулой

$$L_t = \exp \left(\int_0^t \mu(s, X_s) dB_s^\infty - \frac{1}{2} \int_0^t \mu^2(s, X_s) ds \right). \quad (8)$$

Пользуясь (4) и (5), находим, что процессы $\psi^{(b)}$ и φ удовлетворяют уравнениям

$$d\psi_t^{(b)} = b\psi_t^{(b)} dt + dG(t) + \psi_t^{(b)} \mu(t, X_t) dB_t^\infty, \quad \psi_0^{(b)} = G(0), \quad (9)$$

$$d\varphi_t = \frac{1 + \varphi_{t-}}{1 - G(t)} dG(t) + \varphi_t \mu(t, X_t) dB_t^\infty, \quad \varphi_0 = \frac{G(0)}{1 - G(0)}. \quad (10)$$

Ясно, что двумерные процессы $(\psi_t^{(b)}, X_t)$ и (φ_t, X_t) являются марковскими относительно каждой из мер $\mathbf{P}^\infty$ и $\mathbf{P}^0$. Более того, если $\mu(t, x) \equiv \text{const}$, то сами процессы $\psi^{(b)}$ и φ являются марковскими.

3. Экстремальная и условно-экстремальная байесовские постановки задачи скорейшего обнаружения разладки.

3.1. Пусть задана G -модель $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \bar{\mathbf{P}}^G)$, построенная по вероятностно-статистическому эксперименту $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^\infty)$. Под $\mathfrak{M}$ будем подразумевать класс моментов остановки относительно $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$, принимающих значения в $\mathbf{R}_+$. Каждый момент $\tau \in \mathfrak{M}$ можно интерпретировать как момент подачи сигнала «тревоги» о наступлении разладки.

В данном пункте мы рассмотрим две постановки задачи скорейшего обнаружения разладки, т.е. задачи о нахождении $\tau \in \mathfrak{M}$, наиболее близкого к моменту разладки θ в некотором смысле.

Экстремальная байесовская постановка. Пусть задана функция штрафа $H: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что

$$H(t) \text{ убывает при } t \leq 0, \quad H(0) = 0, \quad H(t) \text{ возрастает при } t \geq 0. \quad (11)$$

Для каждого $\tau \in \mathfrak{M}$ величина $H(\tau(\omega) - \theta(\omega))$ интерпретируется как штраф за ошибку в решении: при $\tau(\omega) - \theta(\omega) < 0$ она соответствует штрафу за ложную тревогу, а при $\tau(\omega) - \theta(\omega) > 0$ — штрафу за запаздывание.

Экстремальная байесовская задача скорейшего обнаружения состоит в нахождении момента $\tau^* \in \mathfrak{M}$ с минимальным средним штрафом (если такой существует), т.е. τ^* , для которого

$$\mathbf{E}^G H(\tau^* - \theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^G H(\tau - \theta). \quad (12)$$

Условно-экстремальная байесовская постановка. Пусть заданы две функции штрафа $H_1(t)$ и $H_2(t)$, удовлетворяющие (11), и число $\alpha \geq 0$. Введем класс моментов остановки

$$\mathfrak{M}_\alpha(H_2) = \{\tau \in \mathfrak{M}: \mathbf{E}^G H_2(\tau - \theta) \leq \alpha\}.$$

Условно-экстремальная байесовская задача скорейшего обнаружения состоит в нахождении момента $\tau^* \in \mathfrak{M}_\alpha(H_2)$ с минимальным средним штрафом относительно H_1 (если такой существует):

$$\mathbf{E}^G H_1(\tau^* - \theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_\alpha(H_2)} \mathbf{E}^G H_1(\tau - \theta). \quad (13)$$

Два примера экстремальной и условно-экстремальной задач будут рассмотрены в разделе 6.

3.2. Условно-экстремальная задача может быть сведена к экстремальной при помощи метода Лангранжа. Для задачи (13) с заданными $H_1(t)$, $H_2(t)$ и α рассмотрим семейство экстремальных задач, зависящих от параметра $c \geq 0$: найти $\tau_c^* \in \mathfrak{M}$ такой, что

$$\mathbf{E}^G [H_1(\tau_c^* - \theta) + cH_2(\tau_c^* - \theta)] = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^G [H_1(\tau - \theta) + cH_2(\tau - \theta)].$$

Тогда, если найдется такое $c \geq 0$, для которого решение τ_c^* данной задачи существует и $\mathbf{E}^G H_2(\tau_c^* - \theta) = \alpha$, то τ_c^* является также решением условно-экстремальной задачи.

Действительно, для любого другого $\tau \in \mathfrak{M}_\alpha(H_2)$ имеем

$$\mathbf{E}^G [H_1(\tau - \theta) + cH_2(\tau - \theta)] \geq \mathbf{E}^G [H_1(\tau_c^* - \theta) + cH_2(\tau_c^* - \theta)],$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}^G H_1(\tau - \theta) \geq \mathbf{E}^G H_1(\tau_c^* - \theta) + c\alpha - c\mathbf{E}^G H_2(\tau - \theta) \geq \mathbf{E}^G H_1(\tau_c^* - \theta),$$

где мы воспользовались тем, что $\mathbf{E}^G H_2(\tau - \theta) \leq \alpha$.

4. Сведение байесовских задач скорейшего обнаружения к задачам об оптимальной остановке. В данном разделе мы покажем, как для специального класса функций штрафа $H(t)$ экстремальную байесовскую задачу (12) можно свести к задаче об оптимальной остановке для обобщенной статистики Ширяева–Робертса. Полученные результаты применимы и к условно-экстремальной задаче, если ее предварительно свести к экстремальной.

Особо важным для нас будет случай, когда процесс $\psi^{(b)}$ является марковским или компонентой многомерного марковского процесса (как, например, в частных G -моделях, рассмотренных в п. 2.2). Тогда к получаемой задаче (15) применима обширная теория марковских оптимальных правил остановки.

Будем рассматривать класс функций штрафа $H(t)$, которые либо линейны, либо экспоненциальны при $t \geq 0$:

$$H(t) = ct \text{ при } t \geq 0 \quad \text{или} \quad H(t) = \frac{c}{b} e^{bt} \text{ при } t \geq 0, \quad (14)$$

где $b, c > 0$ — некоторые константы. В линейном случае для удобства обозначений считаем, что $b = 0$.

Символом $\mathbf{E}^u$ будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}^u$ ($u \in [0, \infty]$).

Теорема 1. Если функция $H(t)$ удовлетворяет (14), то справедливо равенство

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^G H(\tau - \theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^\infty \left[\tilde{H}(\tau) + c \int_0^\tau \psi_s^{(b)} ds \right], \quad (15)$$

где $\psi^{(b)}$ — обобщенная статистика Ширяева–Робертса, а функция $\tilde{H}(t)$ задается формулой

$$\tilde{H}(t) = \int_t^\infty H(t-s) dG(s). \quad (16)$$

Оба инфимума в (15) достигаются на одном и том же моменте остановки. (Здесь и далее мы естественным образом отождествляем моменты остановки относительно фильтраций $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ и $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что для любого момента остановки $\tau \in \mathfrak{M}$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}^G H(\tau - \theta) = \mathbf{E}^\infty \left[\tilde{H}(\tau) + \int_0^\tau \int_0^s H'(s-u) \frac{L_s}{L_{u-}} dG(u) ds \right]. \quad (17)$$

В силу структуры меры $\bar{\mathbf{P}}^G$, для штрафа за ложную тревогу имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^G [H(\tau - \theta) \mathbf{I}(\tau < \theta)] &= \int_0^\infty \mathbf{E}^u [H(\tau - u) \mathbf{I}(\tau < u)] dG(u) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}^\infty [H(\tau - u) \mathbf{I}(\tau < u)] dG(u) = \mathbf{E}^\infty \tilde{H}(\tau), \end{aligned} \quad (18)$$

где во втором равенстве воспользовались (2) и тем, что $\{\tau < u\} \in \mathcal{F}_{u-}$.
Для штрафа за запаздывание имеем

$$\mathbf{E}^G[H(\tau - \theta) \mathbf{I}(\tau > \theta)] = \int_0^\infty \mathbf{E}^u[H(\tau - u) \mathbf{I}(\tau > u)] dG(u). \quad (19)$$

Для любого $u \geq 0$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^u[H(\tau - u) \mathbf{I}(\tau > u)] &= \int_u^\infty \mathbf{E}^u H'(s - u) \mathbf{I}(s \leq \tau) ds \\ &= \int_u^\infty \mathbf{E}^\infty \left[H'(s - u) \frac{L_s}{L_{u-}} \mathbf{I}(s \leq \tau) \right] ds, \end{aligned} \quad (20)$$

где во втором равенстве мы воспользовались тем, что случайная величина $\mathbf{I}(s \leq \tau)$ является $\mathcal{F}_s$ -измеримой и $\mathbf{P}_s^u \sim \mathbf{P}_s^\infty$, причем

$$\frac{d\mathbf{P}_s^u}{d\mathbf{P}_s^\infty} = \frac{L_s^u}{L_s^\infty} = \frac{L_s^0 L_{u-}^\infty}{L_s^\infty L_{u-}^0} = \frac{L_s}{L_{u-}}.$$

Из формул (19), (20), меняя порядок интегрирования, находим

$$\mathbf{E}^G[H(\tau - \theta) \mathbf{I}(\tau > \theta)] = \int_0^\tau \int_0^s H'(s - u) \frac{L_s}{L_{u-}} dG(u) ds. \quad (21)$$

Теперь равенство (17) следует из (18) и (21), что доказывает теорему.

5. Задача о разладке броуновского движения на отрезке.

5.1. В данном разделе мы применим полученные общие результаты к задаче скорейшего обнаружения разладки броуновского движения в случае, когда момент разладки имеет распределение, сосредоточенное на отрезке.³⁾ В силу результатов п. 3.2, основное внимание будет уделено экстремальной байесовской постановке (12), которую мы рассмотрим первой; пример условно-экстремальной постановки содержится в разделе 6.

Рассмотрим G -модель для диффузионных процессов, описанную в п. 2.2, считая, что $\mu_\infty(t, x) \equiv 0$ и $\mu_0(t, x) \equiv \mu$, где $\mu > 0$ — константа. Будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1. Момент разладки θ принимает значения из отрезка $[0, T]$ и функция распределения $G(t)$ обладает непрерывной плотностью на $[0, T]$, возможно с массой в нуле: $G(t) = G(0) + \int_0^t G'(s) ds$ при $t \leq T$ и $G(t) = 1$ при $t \geq T$.

Условие 2. Функция штрафа $H(t)$ линейна или экспоненциальна при $t \geq 0$, т.е. удовлетворяет (14) с некоторыми b и c .

³⁾ Отметим, что задача обнаружения момента разладки броуновского движения на отрезке рассматривалась в работе [1], где предполагалось, что момент разладки имеет экспоненциальное распределение.

Условие 3. Функция $\tilde{H}(t)$, определенная в (16), обладает непрерывной производной $\tilde{H}'(t) < 0$ на $[0, T)$ и существует предел $\tilde{H}'(T-)$.

Условие 4. Функции $\tilde{H}'(t)$ и $G'(t)$ являются неубывающими на $[0, T)$.

Последнее условие (достаточно ограничительное) обусловлено техническими особенностями доказательства теоремы о решении вспомогательной задачи об оптимальной остановке (см. теорему 3 в приложении и замечание 2). Отметим, что это условие выполнено в случае, когда θ имеет равномерное распределение (см. раздел 6).

Далее для произвольных $0 \leq t \leq T$, $x \geq 0$ символ $\mathbf{E}_{t,x}^\infty$ будет обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_{t,x}^\infty$, порожденной процессом $(\psi_{s+t}^{(b)})_{s \geq 0}$, который удовлетворяет уравнению (9) с начальным условием $\psi_t^{(b)} = x$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда оптимальным моментом остановки в задаче (12) является момент

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0: \psi_t^{(b)} \geq a(t)\} \wedge T,$$

где $a: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ — невозрастающая функция, являющаяся единственным непрерывным решением уравнения

$$\int_t^T \mathbf{E}_{t,a(t)}^\infty \left[(c\psi_s^{(b)} + \tilde{H}'(s)) \mathbf{I}\{\psi_s^{(b)} < a(s)\} \right] ds = 0, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

удовлетворяющим условию

$$a(t) \geq -\frac{\tilde{H}'(t)}{c} \quad \text{при } t \in [0, T), \quad a(T) = -\frac{\tilde{H}'(T-)}{c}. \quad (23)$$

Процесс $\psi^{(b)}$ выражается через наблюдаемый процесс X по формуле

$$\psi_s^{(b)} = e^{\mu X_s - (\mu^2/2 - b)s} \left(G(0) + \int_0^s e^{-\mu X_u + (\mu^2/2 - b)u} G'(u) du \right). \quad (24)$$

Для средней величины штрафа $\mathbf{E}^G H(\tau^* - \theta)$ справедливо выражение

$$\mathbf{E}^G H(\tau^* - \theta) = \tilde{H}(0) + \int_0^T \mathbf{E}_{0,G(0)}^\infty \left[(c\psi_s^{(b)} + \tilde{H}'(s)) \mathbf{I}\{\psi_s^{(b)} < a(s)\} \right] ds. \quad (25)$$

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1, приходим к задаче об оптимальной остановке, заключающейся в нахождении величины

$$V = c \cdot \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^\infty \int_0^\tau \left(\psi_s^{(b)} + \frac{\tilde{H}'(s)}{c} \right) ds.$$

Оптимальный момент τ^* в данной задаче является оптимальным моментом подачи сигнала тревоги о разладке, и $\mathbf{E}^G H(\tau^* - \theta) = \tilde{H}(0) + V$.

Ясно, что τ^* следует искать среди моментов $\tau \leq T$. Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 3 в приложении (примененной с константой $\lambda = 0$ и функцией $f(t) = -\tilde{H}'(t)/c$). Выражение для процесса $\psi^{(b)}$ через наблюдаемый процесс X следует из определения $\psi^{(b)}$ и формулы (8) для производной Радона–Никодима меры $\mathbf{P}^0$ по мере $\mathbf{P}^\infty$. Теорема доказана.

5.2. Один из способов решения интегрального уравнения (22) основан на «методе обратной индукции». Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Значение $a(t_n) = -\tilde{H}'(T-)/c$ находим согласно (23). Зная значения $a(t_k), a(t_{k+1}), \dots, a(t_n)$ и приближенно вычисляя интеграл (22) для $t = t_{k-1}$ по значениям подынтегральной функции в точках $t_{k-1}, t_k, \dots, t_n$, получим уравнение, из которого находится $a(t_{k-1})$. Повторяя данную процедуру, находим значение $a(t)$ во всех точках разбиения.

Математические ожидания под знаками интегралов в (22) и (25) в общем случае могут быть вычислены численными симуляциями. В случае, когда $G'(t) \equiv \rho = \text{const}$ на $[0, T]$ (т.е. θ равномерно распределен на $[0, T]$, возможно с массой $G(0) > 0$ в нуле), данные математические ожидания могут быть вычислены с использованием явного выражения для переходной плотности процесса $\psi^{(b)}$:

$$\mathbf{P}_{t,x}^\infty(\psi_{t+s}^{(b)} \in dy | \psi_t = x) = \int_{\mathbf{R}} p_s\left(z, \frac{\mu^2}{4\rho}(ye^{2z} - x)\right) dz, \quad (26)$$

где функция $p_s(z, v)$ задается формулой

$$p_s(z, v) = \frac{1}{v} \exp\left(\hat{\mu}\left(z - \frac{\hat{\mu}\hat{s}}{2}\right) - \frac{1 + e^{2z}}{2v}\right) \times \frac{e^{z+\pi^2/(2\hat{s})}}{v\sqrt{2\pi^3\hat{s}}} \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2\hat{s}) - e^z \cosh(\xi)/v} \sinh(\xi) \sin\left(\frac{\pi\xi}{\hat{s}}\right) d\xi$$

с константами $\hat{\mu} = 2 - 4b/\mu^2$, $\hat{s} = \mu^2 s/4$. Данная функция представляет собой плотность (см., например, [3, теорема 1])

$$p_s(z, v) = \mathbf{P}^\infty\left(B_s^\infty + \hat{\mu}\hat{s} \in dz, \int_0^{\hat{s}} e^{2\hat{\mu}B_u^\infty + 2\hat{\mu}u} du \in dv\right).$$

Справедливость формулы (26) следует из представления (35) ниже.

6. Численное решение задачи о разладке броуновского движения с равномерным распределением θ . В качестве примеров применения результатов раздела 5 рассмотрим случай, когда θ равномерно распределено на отрезке $[0, 1]$, т.е. $G(t) = t$ при $t \in [0, 1]$. В этом случае

$$\tilde{H}(t) = \int_{t-T}^0 H(s) ds, \quad \tilde{H}'(t) = -H(t-T).$$

Мы приведем численные решения двух задач скорейшего обнаружения разладки для $\mu = 1$. Первая задача является экстремальной, вторая — условно-экстремальной. Как будет легко видеть, условия 1–4 из п. 5.1 в них выполнены.

Задача 1. Минимизация средней величины промаха. Требуется найти $\tau \in \mathfrak{M}$, минимизирующий $\mathbf{E}^G|\tau - \theta|$. Здесь функция штрафа $H(t)$ равна $|t|$.

Результаты численного нахождения оптимальной границы остановки приведены на рис. 1. Средняя величина штрафа $\mathbf{E}^G|\tau^* - \theta|$ приближенно равна 0.25.

Рис. 1. Оптимальная граница остановки в экстремальной байесовской задаче (пунктирной линией изображена прямая $a = 1 - t$).

Задача 2. Минимизация среднего времени запаздывания при ограничении на вероятность ложной тревоги. Для заданного $\alpha \in (0, 1)$ требуется найти $\tau \in \mathfrak{M}$, минимизирующий $\mathbf{E}^G(\tau - \theta)^+$ при ограничении $\mathbf{P}^G(\tau < \theta) \leq \alpha$. Здесь функции штрафа имеют вид $H_1(t) = \max\{t, 0\}$, $H_2(t) = \mathbf{I}(t < 0)$.

Согласно методу, приведенному в п. 3.2, достаточно найти $c \geq 0$ такое, что оптимальный момент τ_c^* в экстремальной байесовской задаче

$$\mathbf{E}^G|\tau_c^* - \theta| + c\mathbf{P}^G(\tau_c^* < \theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} [\mathbf{E}^G|\tau - \theta| + c\mathbf{P}^G(\tau < \theta)]$$

удовлетворяет равенству $\mathbf{P}^G(\tau_c^* < \theta) = \alpha$. Тогда τ_c^* также будет оптимальным моментом в условно-экстремальной задаче для заданного α .

На рис. 2 слева приведены оптимальные границы остановки для $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ (меньшему значению α соответствует более высокая кривая). Справа приведена зависимость среднего времени запаздывания от вероятности ложной тревоги для оптимального момента остановки.

Рис. 2. Слева: оптимальные границы в условно-экстремальной байесовской задаче для $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$. Справа: зависимость среднего времени запаздывания от вероятности ложной тревоги.

Приложение. Решение вспомогательной задачи об оптимальной остановке. Пусть на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ заданы стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t \geq 0}$ и процесс $\psi = (\psi_s)_{s \geq 0}$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению (ср. с (9))

$$d\psi_s = (b\psi_s + g(s)) ds + \mu\psi_s dB_s, \quad \psi_0 \in \mathbf{R}_+, \quad (27)$$

где $b \in \mathbf{R}$, $\mu > 0$ — константы, а $g(s)$ — непрерывная неубывающая функция.

Для заданного горизонта наблюдений $T > 0$ рассмотрим задачу об оптимальной остановке, заключающуюся в нахождении величины

$$V = \inf_{\tau \leq T} \mathbf{E} \int_0^\tau e^{\lambda s} (\psi_s - f(s)) ds, \quad (28)$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$, $f(s)$ — невозрастающая ограниченная функция, являющаяся непрерывной и строго положительной на $[0, T)$. Инфимум в (28) берется по всем моментам остановки τ , удовлетворяющим условию $\tau \leq T$ п.н.

Для произвольных $0 \leq t \leq s$, $x \geq 0$ будем обозначать через $\mathbf{P}_{t,x}$ меру, порождаемую процессом $(\psi_{t+s})_{s \geq 0}$, который удовлетворяет (27) с начальным условием $\psi_t = x$. Математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_{t,x}$ будем обозначать через $\mathbf{E}_{t,x}$.

Теорема 3. *Оптимальным моментом остановки в задаче (28) является момент*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0: \psi_t \geq a(t)\} \wedge T,$$

где $a: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ — невозрастающая функция, являющаяся единственным непрерывным решением уравнения

$$\int_t^T \mathbf{E}_{t,a(t)}[e^{\lambda s}(\psi_s - f(s)) \mathbf{I}\{\psi_s < a(s)\}] ds = 0, \quad t \in [0, T], \quad (29)$$

удовлетворяющим условию

$$a(t) \geq f(t) \quad \text{при } t \in [0, T), \quad a(T) = f(T-). \quad (30)$$

Для величины V справедлива формула

$$V = \int_0^T \mathbf{E}_{0,\psi_0}[e^{\lambda s}(\psi_s - f(s)) \mathbf{I}\{\psi_s < a(s)\}] ds. \quad (31)$$

Доказательство. Следуя общей теории (см. [4]), позволим двумерному марковскому процессу (s, ψ_s) начинаться из любой точки $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}_+$ и рассмотрим марковскую постановку задачи (28), заключающуюся в нахождении функции цены

$$V(t, x) = \inf_{\tau \leq T-t} \mathbf{E}_{t,x} \int_0^\tau e^{\lambda(t+s)}(\psi_{t+s} - f(t+s)) ds, \quad (32)$$

где инфимум берется по моментам остановки $\tau \leq T-t$ процесса $(\psi_{t+s})_{s \geq 0}$. Для величины V из (28) имеем $V = V(0, \psi_0)$.

Из общей теории следует (см. [4, § 7]), что функция $V(t, x)$ является непрерывной и инфимум в (32) достигается на моменте остановки

$$\tau^*(t, x) = \inf\{s \geq 0: V(t+s, \psi_{t+s}) = 0\} \wedge (T-t).$$

Пространство $E = [0, T] \times \mathbf{R}_+$ разбивается на замкнутое множество остановки $D = \{(t, x): V(t, x) = 0\}$ и множество продолжения наблюдений $C = \{(t, x): V(t, x) < 0\}$. Покажем, что функция $V(t, x)$ обладает следующими свойствами:

$$V(t, x) < 0 \quad \text{для всех } 0 \leq x < f(t), \quad 0 \leq t < T, \quad (33)$$

$$\text{если } V(t_1, x_1) < 0, \quad \text{то } V(t_2, x_2) < 0 \quad \text{для всех } t_2 \leq t_1, \quad x_2 \leq x_1. \quad (34)$$

Свойство (33) справедливо, так как если $0 \leq x < f(t)$, $0 \leq t < T$, то для момента остановки $\tau = \inf\{s \geq 0: \psi_{t+s} \geq f(t+s)\} \wedge (T-t)$ математическое ожидание в (32) строго отрицательно и, следовательно, $V(t, x) < 0$.

Чтобы доказать (34), для произвольных $t_2 \leq t_1$, $x_2 \leq x_1$ зададим процессы $(\psi_{t_i+s}^i)_{s \geq 0}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие (27), формулами

$$\psi_{t_i+s}^i = e^{\mu B_s - (\mu^2/2-b)s} \left(x_i + \int_0^s e^{-\mu B_u + (\mu^2/2-b)u} g(t_i + u) du \right) \quad (35)$$

с одним и тем же броуновским движением B . Пусть $\tau^* = \tau^*(t_1, x_1)$ — оптимальный момент в задаче для $V(t_1, x_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} V(t_2, x_2) &\leq \mathbf{E} \int_0^{\tau^*} e^{\lambda(t_2+s)} (\psi_{t_2+s}^2 - f(t_2+s)) ds \\ &\leq e^{\lambda(t_2-t_1)} \mathbf{E} \int_0^{\tau^*} e^{\lambda(t_1+s)} (\psi_{t_1+s}^1 - f(t_1+s)) ds = e^{\lambda(t_2-t_1)} V(t_1, x_1) \end{aligned}$$

и, следовательно, $V(t_2, x_2) < 0$. Во втором неравенстве мы воспользовались тем, что функция f не возрастает и $\psi_{t_1+s}^2 \leq \psi_{t_2+s}^1$ для всех $s \leq T - t_1$ как ясно из (35).

Из свойств (33), (34) следует, что множество C представимо в виде

$$C = \{(t, x): 0 \leq t < T, 0 \leq x < a(t)\},$$

где $a(t)$ — некоторая невозрастающая функция на $[0, T]$ такая, что $a(t) \geq f(t)$. (Далее будет установлено, что $a(t) < \infty$ для всех $t \in [0, T]$.)

Покажем, что $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Так как $a(t)$ не возрастает и множество остановки $D = E \setminus C$ замкнуто, то $a(t)$ непрерывна справа. Докажем непрерывность слева.

Предположим, что $a(t-) > a(t)$ для некоторого $t \in [0, T]$. Выберем $\varepsilon, \delta > 0$ так, что $(a(t-) + a(t))/2 \geq a(t) + \varepsilon$ и для любого $t' \in [t - \delta, t]$ имеем $(a(t-) + a(t))/2 > f(t') + 2\varepsilon$ (последнее возможно в силу непрерывности $f(t)$). Рассмотрим последовательность начальных условий (t_n, x_n) в задаче (32) с $t_n = t - \delta/n$, $x_n \equiv x = (a(t-) + a(t))/2$. Обозначая для краткости $K_1 = \min_{0 \leq s \leq T} e^{\lambda s}$, $K_2 = \int_0^T e^{\lambda s} f(s) ds$, получаем

$$\begin{aligned} V(t_n, x_n) &= \mathbf{E}_{t_n, x} \int_0^{\tau^*} e^{\lambda(t_n+s)} (\psi_{t_n+s} - f(t_n+s)) ds \\ &\geq K_1 \varepsilon (t - t_n) \mathbf{P}_{t_n, x} \left\{ \inf_{s \leq t-t_n} \psi_{t_n+s} \geq x - \varepsilon \right\} \\ &\quad - K_2 \mathbf{P}_{t_n, x} \left\{ \inf_{s \leq t-t_n} \psi_{t_n+s} < x - \varepsilon \right\} \\ &\geq K_1 \varepsilon (t - t_n) - (K_2 + K_1 \varepsilon \delta) \mathbf{P}_{t_n, x} \left\{ \inf_{s \leq t-t_n} \psi_{t_n+s} < x - \varepsilon \right\}, \quad (36) \end{aligned}$$

где первое неравенство выполнено в силу того, что на множестве $\{\omega: \inf_{s \leq t-t_n} \psi_{t_n+s}(\omega) \geq x - \varepsilon\}$ имеем $\tau^*(\omega) = t - t_n$ и $\psi_{t_n+s}(\omega) - f(t_n+s) \geq \varepsilon$ для всех $s \in [0, t - t_n]$; а на множестве $\{\omega: \inf_{s \leq t-t_n} \psi_{t_n+s}(\omega) < x - \varepsilon\}$ справедливо неравенство $\int_0^{\tau^*} e^{\lambda(t_n+s)} (\psi_{t_n+s} - f(t_n+s)) ds \geq -K_2$.

С помощью неравенства Дуба находим

$$\mathbf{P}_{t_n, x} \left\{ \inf_{s \leq t-t_n} \psi_{t_n+s} < x - \varepsilon \right\} = O(e^{-\beta/(t-t_n)}),$$

где $\beta > 0$ — константа (не зависящая от t_n). Тогда из (36) следует, что $V(t_n, x) \geq 0$ для достаточно больших n , что противоречит выбору $(t_n, x) \in C$. Полученное противоречие доказывает непрерывность $a(t)$.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что $a(T) = f(T-)$. Отсюда и из непрерывности следует, что $a(t) < \infty$ на $[0, T]$.

Получим уравнение (29). Пусть $\mathcal{L}$ — инфинитезимальный оператор двумерного марковского процесса $((t, \psi_t))_{t \geq 0}$: $\mathcal{L}V(t, x) = V'_t(t, x) + (\mu^2 x^2/2)V''_{xx}(t, x) + (bx + g(t))V'_x(t, x)$. Из общей теории следует, что

$$V(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}(C) \cup \mathcal{C}^{1,2}(D), \quad (37)$$

$$\mathcal{L}V(t, x) = e^{\lambda t}(f(t) - x), \quad (t, x) \in C, \quad (38)$$

$$V'_{x+}(t, a(t)) = V'_{x-}(t, a(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (39)$$

Свойство (39) является *принципом гладкого склеивания*, из него следует равенство $V'_x(t, a(t)) \equiv 0$, так как $V'_{x+}(t, a(t)) = 0$. Поскольку из представления (35) ясно, что математическое ожидание $\mathbf{E}_{t,x}[\cdot]$ под знаком инфимума в (32) есть линейная функция от x , то $x \mapsto V(t, x)$ вогнута, $t \in [0, T]$.

Итак, в рассматриваемой задаче выполнены следующие свойства: (а) функция $V(t, x)$ принадлежит $\mathcal{C}^{1,2}(C) \cup \mathcal{C}^{1,2}(D)$ и непрерывна на $[0, T] \times \mathbf{R}_+$, $b(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию; (б) $\mathcal{L}V(t, x)$ локально ограничено на C и на D (следует из (38)); (с) $x \mapsto V(t, x)$ является вогнутой функцией для каждого $t \in [0, T]$; (д) $V'_x(t, a(t)) = 0$ для $t \in [0, T]$. Это позволяет применить к $V(t, x)$ формулу Ито с локальным временем на кривых [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{t,x} V(T, \psi_T) &= V(t, x) + \mathbf{E}_{t,x} \int_t^T \mathcal{L}V(s, \psi_s) \mathbf{I}\{\psi_s \neq a(s)\} ds \\ &+ \mathbf{E}_{t,x} \int_t^T \mu \psi_s V'_x(s, \psi_s) \mathbf{I}\{\psi_s \neq a(s)\} dB_s \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{t,x} \int_t^T [V'_{x+}(s, a(s)) - V'_{x-}(s, a(s))] \mathbf{I}\{\psi_s = a(s)\} dL_s^{a(\cdot)}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $L_s^{a(\cdot)}$ — процесс локального времени процесса ψ на кривой $a(t)$.

В силу определения функции $V(t, x)$ имеем $V(T, x) = 0$ для любого $x \geq 0$. Из принципа гладкого склеивания (39) следует, что последнее слагаемое в (40) равно нулю. Также заметим, что производная $V'_x(t, x)$ равномерно ограничена, так как для любых $0 \leq x_1 \leq x_2$ и $t \in [0, T]$, используя представление (35), находим

$$\begin{aligned} 0 \leq V(t, x_2) - V(t, x_1) &\leq \sup_{\tau \leq T-t} \mathbf{E}^\infty \int_0^\tau (x_2 - x_1) e^{\lambda(t+s)} e^{\mu B_s - (\mu^2/2 - b)s} ds \\ &\leq (x_2 - x_1) \int_0^T e^{\lambda s} \mathbf{E}[e^{\mu B_s - (\mu^2/2 - b)s}] ds \\ &\leq c(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

где $c > 0$ — некоторая константа. Следовательно, математическое ожидание стохастического интеграла по dB_s в (40) равно нулю.

Используя (38) и равенство $\mathcal{L}V(t, x) = 0$ при $(t, x) \in D$, получаем

$$V(t, x) = \int_t^T \mathbf{E}_{t,x} [e^{\lambda s} (c\psi_s - f(s)) \mathbf{I}\{(s, \psi_s) \in C\}] ds. \quad (41)$$

Беря $x = a(t)$ и используя равенство $V(t, a(t)) = 0$ (верное, поскольку $(t, a(t)) \in D$), получаем уравнение (29). Уравнение (31) следует из (41) для $t = 0, x = \psi_0$.

Докажем единственность решения уравнения (29), основываясь на методе, предложенном в статье [6]. Пусть $a(t)$ — решение этого уравнения, являющееся оптимальной границей остановки, а $\tilde{a}(t)$ — некоторое другое решение, являющееся непрерывной функцией, удовлетворяющей (30). Рассмотрим функцию

$$\tilde{V}(t, x) = \int_t^T \mathbf{E}_{t,x} [e^{\lambda s} (c\psi_s - f(s)) \mathbf{I}\{\psi_s < \tilde{a}(s)\}] ds, \quad t \in [0, T], \quad x \geq 0.$$

Несложно заметить, что для любого момента остановки $\tau \leq T - t$ процесса $(\psi_{t+s})_{s \geq 0}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, x) &= \mathbf{E}_{t,x} \int_0^\tau e^{\lambda(t+s)} (\psi_{t+s} - f(t+s)) \mathbf{I}\{\psi_{t+s} < \tilde{a}(t+s)\} ds \\ &\quad + \mathbf{E}_{t,x} \tilde{V}(t + \tau, \psi_{t+\tau}). \end{aligned} \quad (42)$$

В частности, если рассмотреть момент $\tau_{\tilde{a}} = \inf\{s \geq 0: \psi_{t+s} = \tilde{a}(t+s)\} \wedge (T - t)$ и воспользоваться тем, что $\tilde{V}(t + \tau_{\tilde{a}}, \psi_{t+\tau_{\tilde{a}}}) = 0$ по определению $\tilde{a}(t)$, то получаем

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, x) &= 0, & x &\geq \tilde{a}(t), \\ \tilde{V}(t, x) &= \mathbf{E}_{t,x} \int_0^{\tau_{\tilde{a}}} e^{\lambda(t+s)} (\psi_{t+s} - f(t+s)) ds, & x &< \tilde{a}(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\tilde{V}(t, x) \geq V(t, x)$ для всех $t \in [0, T], x \geq 0$.

Предположим, что $\tilde{a}(t) > a(t)$ для некоторого $t \in [0, T]$. Возьмем $x = \tilde{a}(t)$ и рассмотрим момент остановки $\tau_a = \inf\{s \geq 0: \psi_{t+s} = a(t+s)\} \wedge (T - t)$. Тогда из (42), используя соотношения $\tilde{V}(t, x) = 0$ и $\tilde{V}(t + \tau_a, a(t + \tau_a)) \geq V(t + \tau_a, a(t + \tau_a)) = 0$, получаем

$$\mathbf{E}_{t,x} \int_0^{\tau_a} e^{\lambda(t+s)} (\psi_{t+s} - f(t+s)) \mathbf{I}\{\psi_{t+s} < \tilde{a}(t+s)\} ds \leq 0.$$

Однако левая часть строго положительна, так как ψ_{t+s} мгновенно попадает в область ниже кривой $\tilde{a}(t+s)$ и $\psi_{t+s} \geq a(t+s) \geq f(t+s)$ при $s \in [0, \tau_a]$, причем для $s = 0$ данное неравенство строгое. Полученное противоречие означает, что $\tilde{a}(t) \leq a(t)$ для всех $t \in [0, T]$.

Предположим, $\tilde{a}(t) < a(t)$ для некоторого $t \in [0, T)$ и возьмем $x = \tilde{a}(t)$. Тогда $\tilde{V}(t, x) = 0$ и $\tilde{V}(t + \tau_a, a(t + \tau_a)) = 0$, так как $a(t + \tau_a) \geq \tilde{a}(t + \tau_a)$ по доказанному выше. Из формулы (42) получаем

$$V(t, x) + \mathbf{E}_{t,x} \int_0^{\tau_a} e^{\lambda(t+s)} (\psi_{t+s} - f(t+s)) [\mathbf{I}\{\psi_{t+s} < \tilde{a}(t+s)\} - 1] ds = 0, \quad (43)$$

где мы воспользовались тем, что $V(t, x) = \mathbf{E}_{t,x} \int_0^{\tau_a} e^{\lambda(t+s)} (\psi_{t+s} - f(t+s)) ds$. Однако выражение, стоящее под знаком интеграла в (43), не положительно п.н.: если $\psi_{t+s} < \tilde{a}(t+s)$, то оно равно нулю, а если $\psi_{t+s} \geq \tilde{a}(t+s)$, то $\psi_{t+s} - f(t+s) \geq 0$ согласно (30). Следовательно, $V(t, x) \geq 0$, что противоречит $(t, x) \in C$. Значит, $\tilde{a}(t) \geq a(t)$, что доказывает равенство $\tilde{a}(t) = a(t)$ для всех $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Предположение о неубывании $g(t)$ и невозрастании $f(t)$ позволило нам установить, что оптимальная граница остановки $a(t)$ не возрастает, откуда мы получили, что она непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Последние два свойства были необходимы для применения формулы Ито (40), и, кроме того, непрерывность использовалась при доказательстве единственности решения интегрального уравнения.

Однако весьма вероятно, что непрерывность и ограниченность вариации $a(t)$ могут быть установлены и при более слабых предположениях на $f(t)$, $g(t)$, нежели указанная монотонность. В таком случае утверждение теоремы 2 было бы справедливо для более широкого класса распределений момента разладки. Анализ данного вопроса мы откладываем до будущих работ.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 3 и ее доказательство получены М. В. Житлухиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gapeev P. V., Peskir G. The Wiener disorder problem with finite horizon. — Stochastic Process. Appl., 2006, v. 16, p. 1770–1791.
2. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов, т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 542 с., 366 с.
3. Matsumoto H., Yor M. Exponential functionals of Brownian motion. I: Probability laws at fixed time. — Probab. Surv., 2005, v. 2, p. 312–347.
4. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
5. Peskir G. A change-of-variable formula with local time on curves. — J. Theoret. Probab., 2005, v. 18, № 3, p. 499–535.
6. Peskir G. On the American option problem. — Math. Finance, 2005, v. 15, № 1, p. 169–181.
7. Ширяев А. Н. Вероятность, т. 1, 2. М.: МЦНМО, 2004, 927 с.
8. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.

Поступила в редакцию
7.VIII.2012