Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Т. В. Маслова, Неограниченная теория вероятностей и ее приложения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 471–498

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:03:22

© 2012 г. **МАСЛОВ В. П.***, **МАСЛОВА Т. В.****

НЕОГРАНИЧЕННАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ¹⁾

В работе рассматриваются порядковая статистика и эмпирическое математическое ожидание (в литературе называемое также оценкой матожидания) для случая бесконечно возрастающих значений случайной величины. Используется концепция Колмогорова, примененная им в теории сложности, а также связь с термодинамикой, на которую указывал еще Пуанкаре.

Математическое ожидание (обобщающее понятие среднего арифметического, вообще говоря, равного бесконечности для возрастающей последовательности значений случайной величины) сопоставляется с понятием температуры в термодинамике при использовании некоторого аналога нестандартного анализа.

Показана связь с законом соответственных состояний Ван-дер-Ваальса (VdV). Рассмотрено применение этой концепции в экономике, в информационной сети интернета и самообучающихся системах.

Ключевые слова и фразы: теория сложности, термодинамика, Бозе-газ, винеровское квантование, правило Максвелла, нестандартный анализ, закон соответственных состояний, распределение по доходам, метод Монте-Карло, теория массового обслуживания, всемирная паутина.

1. Введение. Напомним об истории рассмотрения неограниченной теории вероятностей и приведем в более полном варианте, чем в предыдущих работах, высказывания великого математика А. Пуанкаре, который был заведующим кафедрой теории вероятностей и математической физики в Сорбонне. В работе «Наука и гипотеза» в главе XI «Исчисление вероятностей» Пуанкаре пишет:

«Была ли определена вероятность? И может ли она быть определена? И если нет, то как мы решаемся рассуждать о ней? Определение, — скажут, — очень просто: вероятность какого-нибудь события есть отношение числа случаев, благоприятствующих этому событию, к полному числу возможных случаев.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: v.p.maslov@mail.ru

**Московский экономический институт.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-12058-офи-м).

Простой пример даст нам понять, как неполно это определение. Я бросаю две игральные кости; какова вероятность того, что по крайней мере на одной из них выпадает 6? Каждая кость может выпасть шестью различными способами: число возможных случаев есть $6 \times 6 = 36$; число благоприятствующих случаев есть 11, вероятность равна $11/36$.

Таково правильное решение. Но не могу ли я с таким же успехом сказать: числа очков, выпавшие на обеих костях, могут образовать $(6 \times 7)/2 = 21$ различных комбинаций²⁾; среди этих комбинаций 6 благоприятствующих; вероятность равна $6/21$.

Почему первый способ рассчитывать возможные случаи более законен, чем второй? Во всяком случае наше определение нам этого не указывает.

Таким образом, приходится дополнить это определение, говоря: «... к полному числу возможных случаев при условии, чтобы эти случаи были равновероятны». И вот мы пришли к определению вероятного при помощи вероятного же.

Как мы узнаем, что два возможных случая равновероятны? Не является ли это результатом некоторого условного соглашения? Если мы в начале каждой проблемы явно укажем условное соглашение, то все пойдет хорошо, нам придется только применять правила арифметики и алгебры, и мы доведем вычисление до конца так, что результат не оставит места никакому сомнению. Но если мы желаем сделать малейшее применение этого результата, то необходимо будет доказать, что наши условные соглашения были законны, и мы как раз натолкнемся на то затруднение, которое думали обойти.

Нам могут сказать: простого здравого смысла достаточно, чтобы указать, какое соглашение следует допустить. Но вот Бертран, курьеза ради, разобрал простую задачу: «Какова вероятность того, чтобы в окружности хорда была больше стороны вписанного равностороннего треугольника?» Знаменитый геометр допустил последовательно два соглашения, одинаково, по-видимому, внушаемые здравым смыслом, и нашел в одном случае $1/2$, в другом $1/3$.

Заключение, которое по всей видимости вытекает из всего этого, состоит в том, что исчисление вероятностей есть наука бесполезная, что нужно с недоверием относиться к тому неясному инстинкту, который мы называем здравым смыслом и к которому обращаемся при установлении наших соглашений».

(Цитировано по [1, с. 115–116]).

Эту проблему зависимости теории вероятности от здравого смысла, о которой говорил еще Лаплас, преодолел Колмогоров в своей теории сложности. Мы кидаем монету и не говорим о вероятности выпадения

²⁾ Обратите внимание на то, что при этом подсчете результат, скажем, (1,6) отождествляется с результатом (6,1), т.е. считается только один раз; иными словами, мы считаем кости неразличимыми. Мы увидим ниже, что в термодинамике этому отвечает переход от статистики Больцмана к статистике Бозе–Эйнштейна.

орла и решки, а выполняем достаточно большое количество испытаний и после этого мы замечаем, что большинство возможных вариантов скапливается в области $1/2 \pm \sqrt{N}$, где N — число испытаний. При этом Колмогоров определяет минимальный код отдельного испытания, длина которого близка к максимальной энтропии.

Это значит, хотя А. Н. Колмогоров это не подчеркивает, что его подход основывается на энтропии.

Это замечательное достижение в случае, когда значение случайной величины не возрастает, полностью отвечает на вопрос, поставленный Пуанкаре в цитированной выше философской работе.

Мы переносим этот принцип Колмогорова на случай бесконечно возрастающей последовательности случайных величин.

Вначале рассмотрим известный случай возрастающих значений случайной величины дохода, так называемый «петербургский парадокс». Игрок играет в рулетку, где можно поставить, в частности, на красное или на черное, и ставит, скажем, на черное l долларов. Если выпало красное, то игрок после проигрыша увеличивает ставку на черное в e раз. Проиграв, он снова увеличивает ставку на черное в e раз, и так до тех пор, пока не выпадет в конце концов через m шагов черное. Ставка была $e^m l$. Игрок проиграл

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^k l = l \frac{e^m - 1}{e - 1},$$

а выиграл

$$e^m l.$$

В результате итоговый выигрыш примерно равен

$$0.418e^m \cdot l, \quad m > 2.$$

В свое время этот парадокс в теории игр объяснялся отсутствием достаточно большого количества денег у игрока. Но сегодня, когда деньги безналичные и кредит у крупных чиновников и государственных банков практически неограничен, возможность обогащения подобным образом безгранична³⁾. А это очень опасно для экономики, если за чиновниками нет должного общественного контроля.

Если выигрыш — это случайная величина, точнее, значение, которое принимает случайная величина ξ , то экспоненциально растущие значения случайной величины катастрофичны.

В наше время экономическая катастрофа более близка и более опасна, чем экологическая, которая сейчас привлекает всеобщее внимание. В 1567 году (святой) папа Пий V издал специальную буллу «De

³⁾ Во Франции, Германии и других государствах постоянно идут процессы против высоких чиновников, злоупотребляющих своими возможностями.

salutis gregio dominicis» (О спасении стада Господня). Но ни инквизиция, ни законы шариата не способны спасти все общество, состоящее из людей с различным менталитетом и различными религиозными убеждениями (см. ниже замечание 7).

Мы хотим сказать, что историки недостаточно внимания уделяли такой проблеме, как коррупция. Историки-марксисты считали вопросы нравственности и коррупции чиновников слишком примитивным объяснением социальных перемен.

Но еще Саллюстий (86–35 гг. до н.э.) считал первопричиной краха олигархического режима в Риме падение нравственности и всеобщую коррупцию. В качестве примера олицетворения строгих римских нравов он приводил Катона (о роли моральных правил в обществе см. [2]).

З а м е ч а н и е 1. Если речь идет о порядковой статистике доходов одного из государств, входящих в Евросоюз, то нужно рассматривать статистические данные до его вступления в Еврозону. Тогда можно предсказать согласно неограниченной теории вероятностей, когда это государство «выпадет в осадок», как водяная роса в смеси газов, составляющих воздух.

2. Зависимость от точки отсчета и изоморфизм. Понятие температуры как средней энергии. Великий А. Пуанкаре указал на связь термодинамики и теории вероятностей. Он писал: «Упомяну также... о кинетической теории газов — этой общеизвестной гипотезе, по которой предполагается, что каждая газовая молекула описывает крайне сложную траекторию, но где по свойству закона больших чисел явления, взятые в среднем — в форме, единственно доступной для наблюдения, — подчиняются простым законам, каковы законы Мариотта и Гей-Люссака.

Все эти теории покоятся на законах больших чисел, так что падение исчисления вероятностей, очевидно, увлекло бы их за собой» (цитировано по [1, с. 117])⁴⁾.

В нашей работе конструируется такая теория вероятностей, которая тесно связана с кинетической теорией газов и не опирается на понятие равновероятных событий. Она следует основной идее Колмогорова, сформулированной им в теории сложности.

Поясним связь с термодинамикой Бозе-газа.

Эмпирическое математическое ожидание случайной величины, при-

⁴⁾ Пуанкаре сам построил математическую модель идеального газа. В. В. Козлов в [3] доказал, что для этой модели имеет место парадокс Гиббса. Доказательство Козлова послужило стимулом исследования этой важной проблемы одним из авторов (см. [4]–[6] и др.).

нимающей значения $\{\lambda_i\}$, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{n} \lambda_i = \mathcal{E}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{n} = 1, \quad (1)$$

или, иначе,

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i \lambda_i = M, \quad M = n\mathcal{E}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n. \quad (3)$$

Эти соотношения в точности совпадают с теми соотношениями, которые используются для определения внутренней энергии для идеального газа, если λ_i — это набор собственных значений некоторого неограниченного самосопряженного оператора $\hat{H}$, называемого гамильтонианом, а N_i — число частиц, находящихся на этом уровне:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i \lambda_i = E, \quad \sum_{i=1}^{\infty} N_i = N. \quad (4)$$

Средняя энергия, приходящаяся на одну частицу, равна

$$E_{\text{ср}} = \frac{E}{N}.$$

Она, как известно, связана с понятием *температуры* T .

Как известно, в газе число частиц велико: в сосуде объема $V = 1 \text{ см}^3$ содержится $N \approx 10^{19}$ частиц (при комнатной температуре и давлении в 1 атм). Средняя энергия газа в единичном объеме равна kT , где k — константа Больцмана, а T — температура газа в равновесном состоянии.

Следовательно, в термодинамике уже было определено «среднее арифметическое» для случая, когда случайная величина λ принимает бесконечно возрастающие значения. Ее рост мы обсудим ниже.

Ван-дер-Ваальс знаменит своим эмпирическим соотношением (уравнение Ван-дер-Ваальса). Но во всех обзорах по термодинамике говорится, что самое замечательное открытие Ван-дер-Ваальса — это закон соответственных состояний. Этот закон заключается в следующем. Реальные чистые газы⁵⁾ имеют разную критическую температуру T_c и разное критическое давление P_c .

Д. И. Менделеев критическую температуру T_c называл температурой абсолютного кипения. Он имел в виду, что выше этой температуры жидкое состояние невозможно. Что такое температура по Кельвину?

⁵⁾ Чистый газ — это газ, состоящий из одинаковых молекул.

Она отсчитывается от абсолютного нуля. Однако абсолютный нуль недостижим в том смысле, что, как бы мала температура по Кельвину ни была, она все равно бесконечно далеко отстоит от абсолютного нуля. В этом смысле более наглядно рассматривать логарифм температуры. Тогда $\ln T|_{T=0} = -\infty$, и видно, что расстояние сколь угодно малой температуры по Кельвину до абсолютного нуля — бесконечная величина. Значит, мы имеем дело в математике с «нестандартным анализом» и бесконечно большой температурой, хотя она может быть равна, например, одной сотой градуса по Кельвину.

Если перейти к относительным величинам

$$T_{\text{red}} = \frac{T}{T_c}, \quad P_{\text{red}} = \frac{P}{P_c}, \quad (5)$$

то оказывается, что в этих приведенных координатах изотермы, изохоры и изобары на всех координатных плоскостях (давление–объем), (температура–плотность) и т.д. для разных газов, сильно отличающихся критической температурой T_c , ведут себя очень похоже. Это верно для азота, аргона, углекислого газа, метана и других газов.

Пример 1. Рассмотрим стандартное гильбертово пространство функций H , определенных на отрезке $[0, \pi]$, и базисный набор ортогональных функций

$$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}, \quad (6)$$

а также два самосопряженных оператора

$$\hat{A}_1 = -ih \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{A}_2 = -2ih \frac{\partial}{\partial x}, \quad (7)$$

зависящих от параметра $h = 1/k$, где k — целое число.

Начальные точки отсчета в базисе $\{e^{inx}\}$ — это $n = 1$.

Рассмотрим $n_0^{(1)} = k$ и $n_0^{(2)} = k/2$. Мы получим, что

$$\hat{A}_1 e^{in_0^{(1)}x} \approx 1, \quad \hat{A}_2 e^{in_0^{(2)}x} \approx 1.$$

Очевидно, что

$$\{e^{i(n-k)x}\}_{n=-\infty}^{n=\infty} \quad \text{и} \quad \{e^{i(n-k/2)x}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$$

изоморфны

$$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}.$$

Таким образом, в случае, когда $h \rightarrow 0$, сдвиг точки отсчета бесконечного базиса смещается с точки $n = 1$ в точку $n = 1/h$ в первом случае $\hat{A}_1$ и в точку $n = 1/(2h)$ во втором случае $\hat{A}_2$. На отрезке $[0, \pi]$ на функциях x , разложенных по базису (6), операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ будут вести себя совершенно аналогично оператору $\hat{A}$ обычной нумерации функций.

При сдвиге нумерации на $n - k$ и $n - k/2$ мы приходим к быстро осциллирующим функциям. Эти пространства при $h \rightarrow 0$ ортогональны друг другу и исходному гильбертову пространству H (в том смысле, что $\int \sin(x/h)\varphi(x) dx \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $\varphi(x) \in H$).

Обозначив $e^{ikx} = \Psi_c$ и $e^{i(k/2)x} = \varphi_c$, мы получаем, что пространство функций, отвечающее базису вида Ψ_n/Ψ_c изоморфно пространству функций Ψ_n/φ_c при $h \rightarrow 0$, где $\Psi_n = e^{inx}$ ($h = 0$, $k = \infty$ в «нестандартном анализе»).

Аналогичная картина имеет место для рядов Дирихле и для набора собственных функций уравнения Шрёдингера (оператора Гамильтона $\hat{H}$) для осциллятора и т.п.⁶⁾ (см. [8]).

Этот изоморфизм бесконечно больших величин «нестандартного анализа» объясняет в известной мере эмпирический закон соответственных состояний Ван-дер-Ваальса, который обнаружил подобный «почти» изоморфизм.

Для математика объяснить идеи новой термодинамики специалисту-физику трудно. Но самое трудное — это объяснить, что столь малая температура, как $T = 1/100$ К, является бесконечно большой величиной. Для математического ожидания (1) при случайной величине, принимающей растущие значения (как, например, в случае $\lambda_i = i^2$, $i = 1, 2, \dots$), этот факт вполне естественен как для случая разложения числа M на N слагаемых, так и для частотных словарей [9].

П р и м е р 2. Приведем пример знаменитой теоремы теории чисел — решение старинной задачи, имеющей латинское название «partitio numerorum». В этой задаче участвует целое число M , которое разлагается на N слагаемых, например, $M = 5$, $N = 2$:

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3,$$

что дает 2 варианта решения этой задачи: $\mathcal{M} = 2$.

Если $M = 10^{23}$, $N = 1$, то вариант разложения всего один: $\mathcal{M} = 1$. Если $M = 10^{23}$ и $N = 10^{23}$, то вариант разложения также только один — это сумма единиц, т.е. $\mathcal{M} = 1$.

Очевидно, что найдется такое число N_c при фиксированном M , при котором число вариантов разложения $\mathcal{M}$ будет максимально (это число, вообще говоря, не единственно). Энтропией Хартли называется $\log_2 \mathcal{M}$. В точке, где она достигает своего максимума, возникает максимум энтропии.

Пусть задано разбиение

$$M = a_1 + \dots + a_N$$

⁶⁾ Отметим, что связь между решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера вида $e^{i\hat{H}t}\Psi_0$, где $\Psi_0 \in H$ — начальное условие, и решением уравнения теплопроводности $e^{-\hat{H}t}\Psi_0$ прослежена в разделе 2 о винеровском квантовании работы [7].

числа M на N слагаемых. Обозначим через N_j количество слагаемых, в точности равных числу j , в правой части этого равенства.

Тогда всего слагаемых будет $\sum_j N_j$, и это число равно N , поскольку мы знаем, что слагаемых всего N штук. Далее, сумма слагаемых, равных j , равна jN_j , поскольку их N_j штук, а сумма всех слагаемых тогда получается суммированием этих выражений по j , т.е. $\sum_j jN_j$, и она равна M . Именно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i = N, \quad \sum_{i=1}^{\infty} iN_i = M. \quad (8)$$

Неединственность указанного выше максимума и неопределенность числа этих максимумов позволили Эрдешу получить результат лишь с точностью до $o(\sqrt{M})$.

Таким образом, имеет место теорема Эрдеша для системы двух диофантовых уравнений

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i = N, \quad \sum_{i=1}^{\infty} iN_i = M. \quad (9)$$

Максимальное число решений этой системы достигается при выполнении соотношения

$$N_c = \beta^{-1} M_c^{1/2} \ln M_c + \alpha M_c^{1/2} + o(M_c^{1/2}), \quad \beta = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (10)$$

а коэффициент α определяется формулой $\beta/2 = e^{-\alpha\beta/2}$.

Если в задаче (9) число N увеличивать, а M оставлять постоянным, то число решений будет убывать. Если суммы (9) отсчитывать от нуля, а не от единицы, т.е.

$$\sum_{i=0}^{\infty} iN_i = (M - N), \quad \sum_{i=0}^{\infty} N_i = N, \quad (11)$$

то число решений не будет убывать, а будет оставаться постоянным.

Объясним этот факт. Задача Эрдеша–Ленера [10] заключается в разложении числа M_c на $N \leq N_c$ слагаемых.

Разложение числа 5 на 2 слагаемых дает 2 варианта. Если мы включим также 0, то получим три варианта: $5 + 0 = 3 + 2 = 4 + 1$. Таким образом, включение нуля дает возможность сказать, что мы разлагаем число на $k \leq n$ слагаемых. Действительно, разложение числа 5 на 3 слагаемых включает все предыдущие варианты: $5 + 0 + 0$, $3 + 2 + 0$, $4 + 1 + 0$ и добавляет новые варианты уже без нуля.

Максимум при этом не сильно изменится [10]; зато число вариантов не будет уменьшаться: нули позволяют максимуму оставаться постоянным, и энтропия никогда не будет убывать — выйдет после достижения максимума на константу. Это замечательное свойство энтропии и

позволяет построить в общем случае неограниченную теорию вероятностей [11]. В физике этот эффект идентичен так называемому явлению Бозе-конденсата.

Спрашивается, чем отличаются арифметика и задача «partitio numerorum» от статистики Больцмана–Шеннона? Если мы полагаем, что $4 + 1$ и $1 + 4$ — это два разных варианта, то получаем статистику Больцмана–Шеннона. Число вариантов разложения $\mathcal{M}$ стремительно увеличивается. Таким образом, «некоммутативность» сложения дает дополнительно огромное число вариантов разложения и энтропия Хартли, равная логарифму числа вариантов, будет совпадать с энтропией Больцмана–Шеннона.

Энтропия арифметики в силу коммутативности и симметрии — это энтропия Бозе–Эйнштейна. Приведем формулу для энтропии неравновесного Бозе-газа, выведенную в учебнике [13, с. 184, формула 54.6]:

$$S = \sum_j G_j [(1 + \bar{n}_j) \ln(1 + \bar{n}_j) - \bar{n}_j \ln \bar{n}_j], \quad (12)$$

где $\bar{n}_j$ — средние числа заполнения квантовых состояний $n_j = N_j/G_j$.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_j N_j &= \sum_j G_j \bar{n}_j = N, \\ \sum_j \varepsilon_j N_j &= \sum_j \varepsilon_j G_j \bar{n}_j = E. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда, в силу метода неопределенных множителей Лагранжа для максимума энтропии (12) при условиях (13), получаем⁷⁾

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{a+b\varepsilon_j} - 1}. \quad (14)$$

Здесь $a = -\mu/T$, $b = 1/T$, T — температура, $\mu \leq 0$ — химпотенциал. Таким образом, неопределенные множители Лагранжа выражаются через температуру и химпотенциал газа.

Поскольку согласно формулам Бозе–Эйнштейна суммы типа

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i n_i = M, \quad \sum_{i=0}^{\infty} n_i = n$$

заменяются интегралами, то выделить точку $i = 0$ невозможно, и явление конденсата может происходить лишь в окрестности точки $i = 0$, а не в самой этой точке. А при $D \leq 2$ формулы Эйлера–Маклорена не применимы (т.е. нельзя перейти от сумм к интегралам) и, следовательно, точку $i = 0$ можно выделить.

⁷⁾ Мы дословно повторяем вывод [13].

Однако будут ли скапливаться лишние «частицы» при $N > N_c$ именно на точке $i = 0$? На самом деле, этот вопрос заключается в следующем: будет ли число нулей в приведенной задаче при $M \rightarrow \infty$ много больше, чем число единиц, т.е. будет ли выполняться соотношение

$$N_1 = o(N_0)$$

даже при $N > N_c$?

Подсчет на машине дает отрицательный ответ. Специалисты по теории чисел тоже отвечают отрицательно. Тем более при $D > 2$, когда оценки Эйлера–Маклорена уже могут быть применимы и при $i \gg 1$ мы можем перейти к интегралу, невозможно говорить об одной точке $i = 0$, как это делается в учебнике [13].

На самом деле, одновременно со сходимостью к интегралу (например, в 3-мерном случае) при $N \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0$ возрастает и колоколообразная функция типа $\sqrt{N}e^{-Nx^2}$, где

$$\frac{1}{\ln N} > x \geq 0 \quad (15)$$

(ср. работу [12]).

В этом общем выводе необходимо понять, что такое в общем случае G_j ?

В математической литературе есть два определения G_j : статистическое, отвечающее квантовой статистике, и математико-физическое, отвечающее D -мерному уравнению Лапласа в D -мерном объеме. Точно так же в учебниках Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица есть два определения Бозе-газа. Одно приводится в части, которая называется «Статистическая физика», другое определение через симметрические собственные функции уравнения Шрёдингера приводится в параграфе «Квантовая механика». В математической литературе первое определение носит имя Вейля, а второе — имя Куранта. Рассмотрим оба определения подробнее.

$2D$ -мерное фазовое пространство разбивается на решетку и G_j определяется формулой

$$G_i = \frac{\Delta p_j \Delta q_j}{(2\pi\hbar)^D}. \quad (16)$$

Здесь $\hbar$ — константа Планка.

Сопоставление G_i с кратностями спектра уравнения Шрёдингера дает соответствие между симметрическими по перестановке частиц собственными функциями N -частичного уравнения Шрёдингера и комбинаторными выкладками Бозе-статистики, приведенными в книге [13].

Одночастичная ψ -функция удовлетворяет свободному уравнению Шрёдингера с условиями Дирихле на стенках сосуда. Согласно клас-

сической формуле Куранта число собственных значений, меньшее заданного $\lambda \gg 1$ (спектральная плотность $\rho(\lambda)$) имеет асимптотику

$$\rho(\lambda) = \frac{Vm^{D/2}\lambda^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)(2\pi)^{D/2}\hbar^D}(1 + o(1)) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \quad (17)$$

(V есть D -мерный объем).

Именно этим соответствием мы устанавливаем связь между комбинаторикой Бозе–Эйнштейна [13], определением для N -частичного уравнения Шрёдингера и кратностью спектра одночастичного уравнения Шрёдингера.

Спектр одночастичного уравнения Шрёдингера без учета потенциала взаимодействия с точностью до множителя совпадает со спектром оператора Лапласа.

В случае оператора Лапласа и уравнения Шрёдингера не имеет смысла рассматривать дробные размерности. В статистическом случае дробные размерности имеют смысл, но совершенно другой. Они определяют среднее число степеней свободы, которое для молекул с различными скоростями может быть разным, а среднее число степеней свободы для всего газа уже будет дробным. Оно отвечает средней энергии — температуре. Для неограниченной теории вероятностей, которую мы рассматриваем, именно дробная «размерность» (читай: среднее по всей «генеральной» совокупности число степеней свободы) имеет смысл.

Одним из авторов было доказано, что как энергия вырождения для Бозе-газа, так и число частиц в состоянии вырождения совпадают с точностью до нормировки с критическими значениями N_c и E_c (т.е. при $\mu = 0$) классического невзаимодействующего газа. В D -мерном случае энергия вырождения (degeneration) имеет вид

$$E_d = \int_0^\infty \frac{\frac{|p|^2}{2m} d\varepsilon}{e^{\frac{|p|^2}{2m}/T_d} - 1}, \quad (18)$$

где

$$d\varepsilon = \frac{|p|^2}{2m} \frac{dp_1 \cdots dp_D dV_D}{(2\pi\hbar)^D}. \quad (19)$$

Отсюда мы получаем коэффициенты C и Λ^D в формуле

$$E_d = C\Lambda^D T_d^{2+\gamma} \zeta\left(1 + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{D}{2}\right). \quad (20)$$

Удобнее рассматривать другую нормировку

$$d\varepsilon' = \frac{1}{\Gamma(D/2 + 1)} d\varepsilon \quad (21)$$

для энергии и, соответственно,

$$d\varepsilon'' = \frac{1}{\Gamma(D/2)} d\varepsilon \quad (22)$$

для числа частиц N .

Переход к координатам Ван-дер-Ваальса (5) приводит к коэффициенту $S\Lambda^D$ вида $\tilde{\Lambda}^{\gamma-\gamma_c}$, где γ_c определяется из экспериментальных значений величины $Z|_{\mu=0} = \zeta(\gamma_c+2)/\zeta(\gamma_c+1)$, $\zeta(x)$ — дзета функция Римана. Ниже мы будем опускать волну у коэффициента Λ , а также индекс r (reduced) у параметров T и P .

После этого удобнее перейти к полилогарифму $\text{Li}_{2+\gamma}(e^{-\mu/T})$ для энергии и полилогарифму $\text{Li}_{1+\gamma}(e^{-\mu/T})$ для числа частиц:

$$E = T^{2+\gamma} \text{Li}_{2+\gamma}(a), \quad (23)$$

$$N = T^{1+\gamma} \text{Li}_{1+\gamma}(a), \quad (24)$$

где a — активность ($a = e^{-\mu/T}$).

Тогда фактор сжимаемости равен

$$Z = \frac{E}{NT} = \frac{\text{Li}_{2+\gamma}(a)}{\text{Li}_{1+\gamma}(a)} = \frac{M}{Tn}. \quad (25)$$

Коэффициент Λ здесь сокращается.

3. Базисные наборы и фазовый переход. Каждому числу степеней свободы мы сопоставим свою базисную последовательность, которая в термодинамике соответствует чистому газу из одинаковых молекул. Именно, мы рассматриваем следующий базисный набор случайных величин $\{i^{D/2}\}$, отвечающих числу степеней свободы D .

Вариационный ряд

$$\xi_i = i^{D/2}, \quad (26)$$

будем называть базисным рядом⁸⁾ размерности D .

Пусть n_i — значение исхода, отвечающего ξ_i .

Выборочное значение (оценка) математического ожидания равно

$$\frac{\sum n_i \xi_i}{n} = \mathcal{E}.$$

Будем предполагать, что $\mathcal{E} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Удобно ввести также параметр γ по формуле

$$D = 2(\gamma + 1), \quad \gamma = \frac{D}{2} - 1.$$

⁸⁾ Аналогично тому, как в термодинамике чистые газы отвечают таблице Менделеева и каждому чистому газу отвечает определенное значение Z_c , например, с точностью до 0.01%.

Мы будем рассматривать однопараметрическое семейство энтропий S_γ как логарифм от числа решений системы соотношений

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n, \quad \sum_{i=1}^{\infty} n_i \xi_i \leq n \mathcal{E}. \quad (27)$$

Асимптотическое соотношение $n(\mathcal{E})$ между n и $\mathcal{E}$ при $n \rightarrow \infty$, при котором достигается максимальное число решений системы (27) (с точностью до $o(N)$), будем называть точкой максимальной дезаккумуляции выборочного значения матожидания, а наборы решений $\{n_i\}/n$ уравнений (27) — типичными; значение n , при котором достигается максимальная дезаккумуляция, обозначим через N_c .

Двоичный логарифм числа решений соотношения (27) является энтропией Хартли S .

Итак, a, b — множители Лагранжа (см. (12)–(14)) при нахождении максимума S_γ с условиями (27):

$$dS = a dn + b d(\mathcal{E}n), \quad \mathcal{E}n = M, \quad (28)$$

$$d(\mathcal{E}n) = \frac{1}{b} dS - \frac{a}{b} dn. \quad (29)$$

Обозначим величину $1/b$ через T , а величину a/b через μ ($\mu \leq 0$). В термодинамике еще добавляется член $P dV$, где P — давление, V — объем.

З а м е ч а н и е 2. В экономическом расчете доходов (см. ниже) переменную T_c мы будем называть минимальной зарплатой, а $\bar{\mu} = -\mu$ — номинальным процентом или коэффициентом дезаккумуляции. Введем также обозначение $b = 1/T$. Значению $n = N_c$ соответствует $T = 1$. При заданном E максимум дезаккумуляции достигается при значении $n(E)$, которое мы обозначили через N_c . Объему V отвечает объем товаров Q , давлению P — их цена (закон соответствия Ирвинга Фишера).

Энтропия Хартли S_γ при $\gamma > 0$ имеет вид

$$S = n \left[Z(\gamma)(2 + \gamma) + \frac{\mu}{T} \right]. \quad (30)$$

При $\mu = 0$ и при $n > N_c$ энтропия S продолжается непрерывным образом константой (явление, которое в частном случае $D = 3$ аналогично физическому понятию «конденсата Бозе–Эйнштейна»).

Соотношение $n > n_c$ эквивалентно соотношению $T < 1$. При этом для $n \gg k \gg 1$ (см. (15)) число «надкритических» значений равно $\sum_{i=k}^{\infty} n_i = n_c$. Остальные $n - n_c$ скапливаются на относительно уменьшающемся при $n \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$ интервале $i \leq k \ll n$. Здесь $k \gg 1$ — носитель колоколообразной функции.

Переход к интегралу сопровождается приближением «колоколообразной» функции к δ -функции («Бозе-конденсат»). Следовательно, в формуле (30) при $n > n_c$ или $T < 1$ значения dn (а в термодинамике и dV) можно приравнять нулю. В результате энтропия «жидкой» фазы приобретает вид

$$d(\mathcal{E}n) = T dS. \quad (31)$$

На плоскости $\{M, Z = M/(nT)\}$ «газовая» критическая изотерма

$$M = \text{Li}_{\gamma_c+2}(e^{-\mu/T_c}), \quad Z = \frac{\text{Li}_{\gamma_c+2}(e^{-\mu/T_c})}{\text{Li}_{\gamma_c+1}(e^{-\mu/T_c})} \quad (32)$$

практически идеально совпадает для всех чистых газов, каждому из которых отвечает $Z_c = \zeta(\gamma_c + 2)/\zeta(\gamma_c + 1)$. Для аргона $Z_c = 0.29$, для метана $Z_c = 0.29$ и других газов значение Z_c берется из эксперимента. «Базовая» спинодаль (т.е. множество точек при $\mu = 0$) на плоскости $\{M, Z\}$ представляет собой отрезок $Z = Z_c, M = \{0, 1\}$. Изотерма $T < 1$ хорошо совпадает на отрезке $-\infty < \mu < \mu_l$ вплоть до фазового перехода «газ-жидкость» при $\mu = \mu_l$.

На «жидкой» изотерме значение $n = T^{\gamma_c+1}\zeta(\gamma_c + 1)$ постоянно. Поэтому она представляет собой прямую, проходящую через точку $M = T^{\gamma_c+2}, Z = Z_c$ (начало координат $M = 0, Z = 0$).

З а м е ч а н и е 3. Бозе-конденсирование для статистики доходов означает, что при увеличении числа испытаний $n > n_0$ мы неизбежно попадаем в группу с малым доходом, если генеральная совокупность — это население страны, а порядковая статистика определяется значениями случайной величины (доходом каждого гражданина страны).

4. Отрицательные значения параметра γ . В предположении, что при $T = 1$ переход в жидкую фазу не осуществляется, мы приравниваем химпотенциалы μ и $\tilde{\mu}$ для «жидкой» и «газовой» фазы на изотерме $T = 1$.

Затем мы находим точку μ — точку перехода в «жидкую» фазу при $T < 1$, приравнявая химпотенциалы «жидкой» и «газовой» фазы.

З а м е ч а н и е 4. Рассмотрим случай $\gamma < 0$ и $\tilde{\mu} = 0$.

Введем обозначение

$$F(\xi) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{e^\xi - 1}.$$

При $\gamma < 0$ и $\tilde{\mu} = 0$ имеем (согласно (14))

$$N_c = \Lambda^{\gamma-\gamma_c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^\gamma}{e^{bj} - 1} = \Lambda^{\gamma-\gamma_c} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} j^\gamma \frac{1}{bj} - \sum_{j=1}^{\infty} j^\gamma F(bj) \right\}, \quad b = \frac{1}{T_r}. \quad (33)$$

Поскольку функция $f(x) = x^\gamma F(bx)$ монотонно убывает, то

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j^\gamma F(bj) &= \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \leq \int_0^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^\gamma F(bx) dx = b^{-\gamma-1} \int_0^{\infty} x^\gamma F(x) dx \end{aligned} \quad (34)$$

(неравенство Назайкинского).

Таким образом,

$$N|_{\bar{\mu}=0} = \Lambda^{\gamma-\gamma_c} b^{-1} \zeta(1-\gamma) + O(b^{-1-\gamma}), \quad \gamma < 0, \quad b = \frac{1}{T}, \quad (35)$$

где ζ — дзета-функция Римана.

В настоящем пункте мы найдем точку изотермы-изобары жидкости при медленном стремлении величины $\varkappa = -\mu/T$ к нулю.

Прежде всего мы учтем, что N_c хотя и велико, но конечно и, следовательно, нужно использовать парастатистическую поправку. Напомним соотношение

$$\Omega = -\Lambda^{\gamma-\gamma_c} T \sum_k \ln \left(\frac{1 - \exp\{((\mu - \varepsilon_k)/T)N\}}{1 - \exp\{(\mu - \varepsilon_k)/T\}} \right) \quad (36)$$

для Ω -потенциала.

Применяя формулу Эйлера–Маклорена с учетом параметра γ , получаем

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{j^\gamma}{e^{bj+\varkappa}} - \frac{kj^\gamma}{e^{bkj+\varkappa}} \right) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{bx+\varkappa}} - \frac{k}{e^{kx+\varkappa}} \right) dx^\alpha + R,$$

где $\alpha = \gamma + 1$, $k = N$ и $b = 1/T$. Здесь остаток R удовлетворяет оценке

$$|R| \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty |f'(x)| dx^\alpha, \quad \text{где} \quad f(x) = \frac{1}{e^{bx+\varkappa}} - \frac{k}{e^{kx+\varkappa}},$$

и, вычисляя производную, находим

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{bk^2 e^{k(bx+\varkappa)}}{(e^{k(bx+\varkappa)} - 1)^2} - \frac{be^{bx+\varkappa}}{(e^{bx+\varkappa} - 1)^2}, \\ |R| &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \left| \frac{k^2 e^{k(y+\varkappa)}}{(e^{k(y+\varkappa)} - 1)^2} - \frac{e^{y+\varkappa}}{(e^{y+\varkappa} - 1)^2} \right| dy^\alpha. \end{aligned} \quad (37)$$

Имеем также

$$\frac{e^y}{(e^y - 1)^2} = \frac{1}{y^2} + \psi(y), \quad \text{где} \quad \psi(y) \text{ — гладкая и } |\psi(y)| \leq C(1 + |y|)^{-2}.$$

Подставляя эту формулу в (37), получаем

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \left| k^2 \psi(k(y + \varkappa)) - \psi(y + \varkappa) \right| dy^\alpha \\ &\leq k^{2-\alpha} \int_{k\varkappa}^\infty |\psi(y)| dy^\alpha + \int_{\varkappa}^\infty |\psi(y)| dy \leq \frac{Ck^{2-\alpha}}{1 + (k\varkappa)^{2-\alpha}} \end{aligned}$$

с некоторой постоянной C . Например, если $\varkappa \sim (\ln k)^{-1/4}$, то $|R|$ имеет оценку $|R| \sim O((\ln k)^{(2-\alpha)/4})$. Следовательно, $k = N_c$ и $T = T_c$, и мы приходим к следующей формуле для интеграла при $\mu = 0$:

$$M = \frac{\Lambda^{\gamma-\gamma_c}}{\alpha\Gamma(\gamma+2)} \int \frac{\xi d\xi^\alpha}{e^{b\xi} - 1} = \frac{\Lambda^{\gamma-\gamma_c}}{b^{1+\alpha}} \int_0^\infty \frac{\eta d\eta^\alpha}{e^\eta - 1},$$

где $\alpha = \gamma + 1$. Следовательно,

$$b = \frac{1}{M^{1/(1+\alpha)}} \left(\frac{\Lambda^{\gamma-\gamma_c}}{\alpha\Gamma(\gamma+2)} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi^\alpha}{e^\xi - 1} \right)^{1/(1+\alpha)}.$$

Получаем (см. [16])

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{b\xi} - 1} - \frac{k}{e^{kb\xi} - 1} \right\} d\xi^\alpha &= \frac{1}{b^\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\xi - 1} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi^\alpha \\ &\quad + \frac{1}{b^\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi(1 + (k/2)\xi)} \right) d\xi^\alpha \\ &\quad - \frac{k^{1-\alpha}}{b^\alpha} \int_0^\infty \left\{ \frac{k^\alpha}{e^{k\xi} - 1} - \frac{k^\alpha}{k\xi(1 + (k/2)\xi)} \right\} d\xi^\alpha \\ &= \frac{c(\gamma)}{b^\alpha} (k^{1-\alpha} - 1). \end{aligned}$$

Поскольку $k \gg 1$, получаем окончательно, положив $k = N|_{\mu/T=o(1)}$,

$$N|_{\mu/T=o(1)} = (\Lambda^{\gamma-\gamma_c} c(\gamma))^{1/(1+\gamma)} T, \quad \text{где} \quad c(\gamma) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{e^\xi - 1} \right) \xi^\gamma d\xi. \quad (38)$$

Соотношение $N = T^{\gamma_c+1} \zeta(\gamma_c + 1)$ сопрягается с линейным соотношением $N = A(\gamma)T$, где $A(\gamma) = (\Lambda^{\gamma-\gamma_c} c(\gamma))^{1/(1+\gamma)}$, при $P < 0$.

Мы можем произвести нормировку активности a в точке T_c и можем найти a_0 , сопрягая жидкую и газовую ветку при T_c для давления (т.е. для величины M), чтобы фазового перехода на критической изотерме при $T = 1$ не было.

Далее будем нормировать активности при $T < 1$ на вычисленное ниже значение a_0 . Тогда химпотенциалы (в термодинамике — термодинамические потенциалы Гиббса для жидкой и газовой ветки) будут совпадать и, следовательно, при $T = 1$ фазового перехода «газ–жидкость» не будет (ср. раздел 5).

Теперь, чтобы изохора-изотерма «несжимаемой жидкости» имела место, мы должны построить ее и для меньшей плотности, чем $N_c = \zeta(\gamma_c + 1)$, а именно для

$$N(T) = T^{\gamma_c+1} \zeta(\gamma_c + 1).$$

Мы получаем значение $\gamma(T)$ из неявного уравнения

$$A(\gamma) = T^{\gamma_c} \zeta(\gamma_c + 1).$$

Тем самым для каждого $T < 1$ мы найдем кривую спинодали (т.е. точки, где $\tilde{\mu} \sim T(\ln N(T))^{-1/4}$) в области отрицательных γ :

$$\Lambda^{-(\gamma-\gamma_c)/(1+\gamma)} c(\gamma)^{1/(1+\gamma)} = T^{\gamma_c} \zeta(\gamma_c + 1), \quad (39)$$

Из двух значений γ решения (39) мы выбираем наименьшее (наибольшее по модулю) и обозначаем его $\gamma(T)$. В частности при $T = 1$ обозначаем $\gamma_0 = \gamma(1)$.

Второе решение имеет место для некоторых металлов (ртуть, цезий и др.) и отвечает метастабильному состоянию. Реальное взаимодействие между частицами дает существенно большее отклонение второго решения от γ_0 [15].

Пусть $a_g = e^{-\mu/T}$ — активность газа, $a_l = e^{-\tilde{\mu}/T}$ — активность жидкости. Приведем условие равенства M и активностей в точке фазового перехода (см. раздел 5):

$$T^{\gamma_c} \text{Li}_{2+\gamma_c}(a_g) = \Lambda^{-|\gamma(T)|-\gamma_c} T^{-|\gamma(T)|} \text{Li}_{2-|\gamma(T)|}\left(\frac{a_l}{a_0}\right), \quad (40)$$

$$\frac{\Lambda^{\gamma_0-\gamma_c}}{\zeta(2+\gamma_0)} \text{Li}_{2+\gamma_0}(a_0) = 1, \quad (41)$$

$$a_g = \frac{a_l}{a_0}. \quad (42)$$

Эти два равенства определяют значение химического потенциала $\mu = \tilde{\mu} = T \ln a_g$, при котором происходит фазовый переход «газа» в «жидкость».

Пусть $T_0 = \min_{-1 < \gamma < 0} A(\gamma)$. Тем самым для каждого $T_0 < T < T_c$ мы получим значение редуцированной (reduced) активности жидкости $a_r = a_l/a_0$ (a_l — активность жидкости), что соответствует нормировке Ван-дер-Ваальса (5)).

З а м е ч а н и е 5. В термодинамике критические значения T_c , P_c , ρ_c вычислены экспериментально почти для всех газов, поэтому критическое число степеней свободы может быть заранее задано. Параметр Λ ($1.6 < \Lambda < 3$, $T > 1/3$) определяется из совпадения бинодали в тройной точке, полученной из эксперимента.

В теории вероятностей и экономике эти величины могут быть определены лишь косвенными способами (например, степенью роста доходов (см. ниже) или с помощью анализа достаточно большой совокупности пар долги–дюрации (дюрация — время возвращения долга); см. [17]). Однако аналогия с законом соответственных состояний Ван-дер-Ваальса позволяет надеяться, что сценарии «фазовых переходов» различных государств должны быть достаточно похожими (см. [18]).

5. Учет бесконечно малой диссипации и правило Максвелла. В работе А. С. Мищенко и одного из авторов [19] рассмотрен переход к двумерному лагранжеву многообразию в четырехмерном фазовом пространстве, где давление P и температура T (интенсивные переменные) играют роль координат, а экстенсивные величины объем V и энтропия S играют роль импульсов от лагранжева многообразия, где энтропия есть порождающее лагранжеву структуру действие.

Оказывается, что это сложное преобразование, приводящее к термодинамическому потенциалу Гиббса, удастся провести, как мы видели, лишь с помощью продолжения в область отрицательных значений γ . Затем можно обосновать максвелловский переход, введя малую диссипацию (вязкость). Введение бесконечно малой диссипации позволяет одновременно решить проблему критических показателей, не прибегая к гипотезе скейлинга, на которой основан метод ренормировочной группы. Покажем это.

В термодинамике вязкость отсутствует. Однако, вообще говоря, без бесконечно малой диссипации равновесие в термодинамике не должно наступить. Поэтому ее введение и затем устремление к нулю естественно.

Геометрическое квантование лагранжева многообразия (см. [20, § 11.4]) обычно связывается с введением константы $\hbar$. Винеровским (или туннельным) квантованием один из авторов назвал случай, когда число $\hbar$ чисто мнимое [21].

Применим винеровское квантование к термодинамике. Термодинамический потенциал $G = \mu N$ является действием $\mathbf{S} = \int p dq$ на двумерном лагранжевом многообразии Λ^2 в четырехмерном фазовом пространстве q_1, q_2, p_1, p_2 , где q_1 и q_2 соответственно есть давление P и температура T , p_1 равно объему V , а p_2 равно энтропии S с обратным знаком. Все другие потенциалы: внутренняя энергия E , свободная энергия F и энтальпия W суть результаты проецирования лагранжева многообразия на координатные плоскости p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} E &= - \int \vec{q} d\vec{p}, \quad \vec{q} = \{q_1, q_2\}, \quad \vec{p} = \{p_1, p_2\}, \\ W &= - \int (q_2 dp_2 + q_1 dp_1), \quad F = \int (q_1 dp_1 - q_2 dp_2). \end{aligned} \quad (43)$$

При винеровском квантовании имеем

$$N = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad V = \varepsilon \frac{\partial}{\partial p}, \quad S = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial T}.$$

Следовательно, роль времени t при квантовании будет играть $\ln(-\mu)$:

$$G = \mu N \sim \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial \mu} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \ln \mu}.$$

Заметим, что туннельное квантование уравнения Ван-дер-Ваальса (ВДВ) при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает правило Максвелла (см. ниже).

Как мы увидим ниже, критическая точка и точки спинодали являются фокальными и поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ не переходят в «классику», т.е. в модель ВДВ. Точки спинодали, подобно точкам поворота в квантовой механике, приближаются функцией Эйри, а критическая точка — точка возникновения двух точек поворота (двух функций Эйри) приближается функцией Вебера (см. [22]). Именно через функцию Вебера выражается в уравнении Бюргерса точка возникновения ударной волны при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если вне этих точек совершить переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, то получится модель ВДВ–Максвелла. Однако в самих этих точках предельный переход нарушается. Поэтому так называемые «классические» критические показатели Ландау [13] оказываются грубо не совпадающими с экспериментом. Функция Вебера дает особенности вида $\varepsilon^{-1/4}$, а функция Эйри — особенность вида $\varepsilon^{-1/6}$.

Приведем более подробное рассмотрение уравнения Бюргерса.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0, \quad (44)$$

где $h > 0$ — параметр. Известно, что все линейные комбинации

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \quad (45)$$

решений u_1 и u_2 уравнения (44) являются решениями этого уравнения.

Произведем замену

$$u = \exp\left(-\frac{w(x, t)}{\varepsilon}\right). \quad (46)$$

Получим следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (47)$$

которое называется проинтегрированным уравнением Бюргерса⁹⁾. Очевидно, что с любым решением u_i уравнения (44) ассоциируется решение $w_i = -\varepsilon \ln u_i$ уравнения (47), $i = 1, 2$. С решением (45) уравнения (44) ассоциируется решение уравнения (47)

$$w = -\varepsilon \ln (e^{-(w_1+\mu_1)/\varepsilon} + e^{-(w_2+\mu_2)/\varepsilon}),$$

где $\mu_i = -\varepsilon \ln \lambda_i$ ($i = 1, 2$). Поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w = \min(w_1, w_2),$$

мы получаем $(\min, +)$ -алгебру тропической математики [23].

Для определения решений при $t > t_{\text{cr}}$ Хопф предложил рассмотреть уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v|_{t=0} = p_0(x), \quad (48)$$

и назвать (обобщенным) решением уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} + p \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad p|_{t=0} = p_0(x) \quad (49)$$

функцию $p_{\text{об}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v$ (волны Римана).

Решение v уравнения Бюргерса выражается через логарифмическую производную

$$v = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \ln u \quad (50)$$

решения u уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^x p_0(x) dx \right\}. \quad (51)$$

Таким образом, исходная задача сводится к изучению логарифмического предела решения уравнения теплопроводности. Известно, что решение задачи (51) имеет вид

$$u = (2\pi\varepsilon t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left((x-\xi)^2 + 2t \int_{-\infty}^{\xi} p_0(\xi) d\xi \right) / 2th \right\} d\xi. \quad (52)$$

Асимптотика интеграла (52) вычисляется методом Лапласа. При $t < t_{\text{cr}}$ имеем

$$u = (|J|^{-1/2}(\xi(x, t), t) + O(\varepsilon)) \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} S(x, t) \right\}. \quad (53)$$

⁹⁾ Обычное уравнение Бюргерса выводится из уравнения (47) дифференцированием по x и заменой $\varepsilon = \partial w / \partial x$.

Здесь $S(x, t) = \int_{-\infty}^{r(t)} p dx$, а интеграл вычисляется вдоль Λ^t , точка $r(x)$ — точка на Λ^t . При $t > t_{\text{cr}}$ существуют три точки $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$ на Λ^t , проекции которых на ось x совпадают, или, иначе говоря, уравнение $Q(t, \xi) = x$ при $x \in (x_1, x_2)$ имеет три решения $\xi_1(x, t)$, $\xi_2(x, t)$, $\xi_3(x, t)$.

Обозначим $S(x, t) = \int_{-\infty}^{r(x)} p dx$ при $x < x_1$, $x > x_2$ и $S(x, t) = \min(S_1, S_2, S_3)$, где $S_j = \int_{-\infty}^{r_j(x)} p dx$, $j = 1, 2, 3$, при $x \in [x_1, x_2]$.

Если $x = x_1$, то $r_1(x_1) = r_2(x_1)$ — фокальная точка на Λ^t и $S_1(x, t) = S_2(x, t)$; аналогично, если $x = x_2$, то $r_2(x_2) = r_3(x_2)$, $S_2(x, t) = S_3(x, t)$.

Точку, в которой $S_1 = S_3 = S$, обозначим x_t^* . Тогда при $x < x_t^*$ и $x > x_t^*$ асимптотика интеграла (52) по-прежнему имеет вид (53), с той лишь разницей, что ξ в этой формуле полагается равным $\xi_1(x, t)$ при $x_1 \leq x < x_t^*$ и $\xi_3(x, t)$ при $x_2 \geq x > x_t^*$. В точке x_t^* асимптотика интеграла (52) состоит из двух слагаемых вида (53), одно из которых отвечает точке $r_1(x_t^*)$, а другое — точке $r_3(x_t^*)$. Таким образом, при $x_1 \leq x < x_t^*$ точки $r_2^t(x_t^*)$ и $r_3^t(x_t^*)$, расположенные на Λ^t , вносят в асимптотику решения задачи (51) малый (порядка не более $O(\varepsilon)e^{-S/\varepsilon}$) вклад. Поэтому эти точки мы будем называть несущественными, а остальные точки кривой Λ^t , состоящие из несущественных или существенных точек, назовем также несущественными или существенными соответственно.

Приведенные рассуждения позволяют получить обобщенное разрывное решение задачи (49) при временах $t > t_{\text{cr}}$. Оно определяется функцией $p = p(x, t)$, задающей существенные области кривой Λ^t . Заметим, что отсюда, в частности, следует известное в гидродинамике правило равных площадей для определения фронта ударной волны, эволюция которой описывается уравнением (49). Отметим, что это в точности отвечает правилу Максвелла для уравнения ВДВ.

Решение $p_\varepsilon(x)$ уравнения Бюргерса в критической точке $x = p^3$ вычисляется по формуле

$$p_\varepsilon(x) = \frac{\partial \ln \Psi(x)}{\partial x} = \frac{\int_0^\infty \exp\{(-x\xi - \xi^4/4)/\varepsilon\} \xi d\xi}{\int_0^\infty \exp\{(-x\xi - \xi^4/4)/\varepsilon\} d\xi}. \quad (54)$$

При $x \rightarrow 0$ после замены $\xi/\sqrt[4]{\varepsilon} = \eta$ получаем

$$p_\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{\varepsilon} \cdot \text{const.} \quad (55)$$

Если положить $x = 0$, то замена переменных $\xi = \sqrt[4]{\varepsilon} y^{1/4}$ дает особенность при $\varepsilon \rightarrow 0$ порядка $\varepsilon^{-1/4}$. Что это означает с точки зрения классики и классического измерения, когда выполнено условие, которое в работе [24] названо «условием квазиклассичности» (это значит, в случае, когда мы находимся вне фокальной точки)? Для преобразования

Лапласа это означает, что мы находимся в области, где применим асимптотический метод Лапласа, т.е. где

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-(px - \tilde{S}(p))/\varepsilon} dp, \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\tilde{S}(p)}{p^4} < \infty, \quad \tilde{S}^{(4)}(p)|_{p=0} \neq 0. \quad (56)$$

Если решение соотношения

$$x = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial p} \quad (57)$$

невырождено, т.е. $(\partial^2 \tilde{S})/(\partial p^2) \neq 0$ в точке $(\partial \tilde{S})/(\partial p) = x$, то в этом случае приведенный интеграл (54) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ограничен. Чтобы он имел нуль порядка $\varepsilon^{1/4}$, мы должны проинтегрировать его по x дробной производной $D^{-1/4}$. Значение $D^{-1/4}$ применительно к единице, $D^{-1/4}1$, дает приблизительно $x^{1/4}$.

В силу принципа неопределенности [7] соответствие оператора дифференцирования и малого параметра вида $D \rightarrow 1/\varepsilon$ сохраняется для отношения $-\varepsilon \frac{\partial u / \partial x}{u}$, хотя главный член асимптотики в разности $\frac{\partial^2 u / \partial x^2}{u}$ и $\frac{(\partial u / \partial x)^2}{u^2}$ сокращается.

В случае термодинамики роль x играет давление P , а роль импульса p играет объем V . Поэтому $V \sim P^{1/4}$, т.е.

$$P_{\text{cr}} \sim (V - V_{\text{cr}})^4. \quad (58)$$

Это и есть скачок критического показателя. Аналогично можно получить и другие критические показатели [7]. О сравнении с экспериментальными данными см. ту же работу.

6. Независимые события, условная вероятность и логарифмическое масштабирование.

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть события независимыми, если отвечающие им энтропии Хартли складываются.

Рассмотрим условную вероятность для независимых событий.

Как известно, *условной вероятностью* события называется вероятность одновременного появления пары, состоящей из события и условия, перенормированная на вероятность условия:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)},$$

A — событие, B — условие.

Формула

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(B|A_i) \mathbf{P}(A_i), \quad \bigcup A_i = \Omega, \quad (59)$$

для непересекающихся событий $\{A_i\}$ называется формулой *полной вероятности*.

Аналогичная формула имеет место в новой концепции вероятности. Достаточно ее получить для $k = 2$. Это, согласно теории сложности Колмогорова, должно быть равенство энтропий с учетом условной вероятности $\{\alpha, \beta = 1 - \alpha\}$. Именно, при $\tilde{\mu} = 0$

$$Z_c(\gamma_c + 2) = \alpha(\gamma_1^c + 2)Z_1^c + \beta(\gamma_2^c + 2)Z_2^c, \quad (60)$$

где $Z_c = \zeta(\gamma + 2)/\zeta(\gamma + 1)$, $\alpha + \beta = 1$.

Из этих формул мы получаем значение γ_c для «смесей» типа (59), исходя из базисных вариационных рядов.

Приведенная конструкция легко переносится на общий случай формулы (59).

Логарифмическое масштабирование задает в порядковой статистике (вариационном ряде) взаимно однозначное соответствие чисел $A \geq 0$ и $\ln A = a$, а также $B \geq 0$ и $b = \ln B$. Произведению AB при логарифмическом масштабировании отвечает сумма логарифмов $\ln A + \ln B$.

Сложение при логарифмическом масштабировании. Алгоритм суммы отвечает

$$A \oplus B = \frac{1}{\ln n} \ln(n_c^{(1)} + n_c^{(2)}) \quad (61)$$

при учете ограничения (60) на рост n .

С помощью этого взаимно однозначного соответствия можно кодировать любые числа A и B , а также полуполе AB и соответствие $A + B \rightarrow A \oplus B$.

Сложение (61) при $n \rightarrow \infty$ переходит в фазовый скачок из «газообразного» состояния в «жидкое», т.е. из «открытого» состояния в «закрытое».

З а м е ч а н и е 6. Отметим, что в нашем рассмотрении неограниченной теории вероятностей отсутствует объем V , одна из важнейших величин в термодинамике, и роль плотности играет число частиц N . При фазовом переходе «газ–жидкость» плотность испытывает скачок и, следовательно, в нашем случае испытывает скачок величина N . В термодинамике естественно считать число частиц постоянной величиной, а скачок плотности относить за счет скачка объема V . Тогда химпотенциал μ , умноженный на число частиц, равняется термодинамическому потенциалу Гиббса, который остается непрерывным в точке фазового перехода (правило Максвелла). Следовательно, химпотенциалы жидкой и газовой фазы должны совпадать.

З а м е ч а н и е 7. Энтропия, согласно теории сложности Колмогорова, непосредственно связана с кодом минимальной длины. Тем самым, фазовый переход энтропии «газа» (30) в энтропию «жидкости» (31)

означает переход к новому кодированию. Уменьшить число испытаний нельзя — *число испытаний необратимо*. В нашем случае увеличение числа испытаний в состоянии «жидкой фазы» ничего не дает, так как избыточные испытания попадают в «Бозе-конденсат» «Бозе-жидкости».

7. Применения.

7.1. Распределение по доходам. Одна из важнейших проблем современной математической статистики заключается в том, что «генеральная совокупность» измеряемых случайных величин очень велика, и выборка также велика, но много меньше генеральной совокупности.

В СССР выборка в социальных опросах обычно составляла 3.5 тысяч человек.

Примером генеральной совокупности могут служить все граждане страны. Мы хотим вычислить их средний доход.

Есть величины, которые задаются государством, — размер минимальной зарплаты и величина номинального процента $\tilde{\mu}$.

С другой стороны, много граждан имеют зарплату меньшую минимальной — члены семьи работающего (иждивенцы), а также безработные. Если построить порядковый ряд, «порядковую статистику» по возрастанию доходов¹⁰⁾ и разбить на кластеры с точностью до 1–3%, то, обозначив значения случайной величины ξ -дохода через ξ_i , получим вариационный ряд

$$\left\{ \frac{\xi_i}{T} \right\}_{i=0}^{\infty}.$$

Пусть n — число испытаний (выборка), n_i — число исходов, при которых выпало число ξ_i/T , тогда по обычному определению оценка выборочного математического ожидания, умноженного на n испытаний, равна

$$\sum n_i \frac{\xi_i}{T} = M, \quad \sum n_i = n. \quad (62)$$

Таким образом, оценка выборочного математического ожидания равна

$$E = \frac{M}{n}. \quad (63)$$

Очевидно, что если ξ_i принимает неограниченно возрастающие значения, то случайная конечная выборка не может служить даже приближительной «оценкой» истинного математического ожидания.

Поэтому когда определяют средний душевой доход, разделяют генеральную совокупность на части, выделяя район, в среднем характеризующий исследуемый страт общества, на котором используют гипотезу

¹⁰⁾ Это реально можно сделать лишь в тех странах, где по выплачиваемым налогам можно подсчитать доходы, т.е. доходы, как правило, не утаиваются.

равновесного распределения. Иногда рассматривают отдельные домохозяйства в развитии (лонгитюдинальные исследования — longitudinal study).

Иногда используют также следующую методику измерения распределения населения по доходам. При этом исходными данными служат не подтверждаемые никакими документами регулярные отчеты 50 000 человек, из которых 2 000 — москвичи. Контингент этих респондентов сознательно поддерживается постоянным. Новые лица привлекаются только по мере выбытия прежних. Богатых людей среди них заведомо нет, поскольку участие в обследовании — дело добровольное. Находящиеся за чертой бедности люди могут быть, поскольку за отчеты немного платят.

Полученные данные экстраполируют, сопоставляя социально-экономические характеристики респондентов (регион и тип населенного пункта, пол, возраст, состав семьи, род занятий и др.) с данными переписи.

Никаких оценок точности ни в России, ни в мире не делается. Есть только сравнения с «теоретически ожидаемым» распределением (логнормальное с паретовским хвостом). Впервые В. Парето предложил свое степенное распределение как описание распределения по доходам в соответствии с эмпирическими данными. Известны также теоретические дискуссии о том, можно ли интерпретировать наблюдаемые отклонения как наличие многих максимумов.

Однако бесконечные множества невозможно разбить на конечное число конечных множеств.

Поэтому в нашем случае оценку математического ожидания точнее называть эмпирическим математическим ожиданием.

Величину

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M}{\ln n} = D \quad (64)$$

мы называли размерностью в случае, отвечающем квантовой механике, и числом степеней свободы в статистическом случае.

Оказывается, что для каждого M при нашем предположении (64) существует такое критическое число измерений $N_c \ll M$, что при увеличении числа измерений $N > N_c$ с нашей асимптотической точностью (например, $O(N^\alpha)$, где $\alpha < 1$) мы будем натекать, как правило, на безработных и низкооплачиваемых людей, что практически в пределах нашей точности не сказывается на величине N_c .

З а м е ч а н и е 8. Поясним, что такое закрытая валютная система. Это не аналог рубля в СССР, хотя рубль был неконвертируемым. Внутри СССР, в основном, существовала не рыночная система, т.е. система, не основанная на энтропии.

Другой тип закрытой системы — это закрытая валютная система в послевоенной Великобритании. Тогда обмен фунта стерлингов на другие валюты был запрещен. Аналогично в Израиле шекели можно было обменять на доллары в количестве, не большем 500 долларов.

Можно провести грубую аналогию с жидкостью и газом. Если открыть пробку в бутылке с газом, газ будет выходить из бутылки, в отличие от бутылки с водой. Наличие поверхностного натяжения — это наличие границы для жидкости, аналогично наличию границы государства с закрытой валютной системой.

7.2. Задачи массового обслуживания для WWW. В качестве генеральной совокупности будем брать все коммуникаторы, отправляющие сообщения: компьютеры, айпеды, айфоны.

Когда имеет место один канал связи, то сообщение, которое послано раньше других, и доставлено будет раньше других. Тут соблюдается очередность и имеет место теория Шеннона, в том числе энтропия Шеннона, равная энтропии Больцмана. Если же сообщения собраны в пакеты, то этот принцип перестает работать, и мы попадаем в специфическую ситуацию. В задачах массового обслуживания значение случайной величины — количество посланных пакетов, отвечающих данной генеральной совокупности, — неограниченно возрастает. Имеется в виду порядковая статистика и соответствующий ей вариационный ряд (см. [11]).

Суперкомпьютер, вписанный во Всемирную паутину — World Wide Web (WWW), идентичен государству в мировом союзе. Достаточные условия для его выпадения из WWW следуют из вышеизложенной неограниченной теории вероятностей.

З а м е ч а н и е 9. При полном воцарении World Wide Web, перед которой, скажем, каждый крупный чиновник исповедуется под контролем детектора лжи, моральные запреты, предписанные различными религиями в качестве «правил игры», обеспечивающих существование человеческого общества, в известной мере могут осуществляться через WWW.

7.3. Связь с методом Монте-Карло. В качестве примера связи с методом Монте-Карло рассмотрим конкретную задачу для самообучающегося аудиоида — прибора, который описывает картины в картинной галерее. Этот прибор ориентирован на три степени свободы: движение в направлении «север–юг», движение в направлении «запад–восток» и поворот вокруг своей оси. Однако самообучающаяся программа должна учитывать еще и направление, вдоль которого картин нет (например, расположение коридора).

С одной стороны, 3 степени свободы дают возрастающие как $\{i^{3/2}\}$ значения случайной величины. С другой стороны, учет направления, в котором нет картин, осуществляется естественно самообучающейся

программой.

Применение метода Монте-Карло для выбора псевдослучайной величины на языке Java сокращает число степеней свободы. При достаточно большом числе испытаний (посетителей музея) программа прибора, казалось бы, приспособленного для любой картинной галереи, в результате самообучения может переходить в программу, которая приспособлена к архитектуре только данного музея. А это означает переход из открытого состояния в закрытое.

Если пользоваться обычным способом округления, а значит, рассматривать псевдослучайные величины некоторой конечной длины, то тестирование исходной программы не будет достаточно совершенным. Поэтому прибор может не удовлетворять всем требованиям потребителя. В примере музея, содержащего картинную галерею, этот факт не вызовет катастрофы. Пострадает лишь репутация выпускающей фирмы. Если же аналогичный прибор служит поводом для слепого человека, то указанная неточность округления может закончиться катастрофой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. О науке (пер. с фр. работ Пуанкаре «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод», «Последние мысли»). М.: Наука, 1990, 736 с.
2. Гусейнов А. А. Великие пророки и мыслители. Нравственные учения от Моисея до наших дней. М.: Вече, 2009.
3. Kozlov V. V. Kinetics of collisionless gas: equalization of temperature, growth of the coarse-grained entropy and the Gibbs paradox. — Regul. Chaotic Dyn., 2009, v. 14, № 4–5, p. 535–540.
4. Маслов В. П. Решение парадокса Гиббса в рамках классической механики (статфизики) и кристаллизация газа C_{60} . — Мат. заметки, 2008, т. 83, № 5, с. 787–791.
5. Maslov V. P. Solution of the Gibbs paradox using the notion of entropy as a function of fractal dimension. — Russ. J. Math. Phys., 2010, v. 17, № 3, p. 288–306.
6. Maslov V. P. Gibbs paradox, liquid phase as an alternative to the Bose condensate, and homogeneous mixtures of new ideal gases. — Math. Notes, 2011, v. 89, № 3, p. 366–373.
7. Маслов В. П. Критические показатели как следствие винеровского квантования термодинамики. — Теорет. и матем. физ., 2012, т. 170, № 3, с. 458–470.
8. Маслов В. П. Вырождение при переходе от дискретного спектра к непрерывному и переход из квантовой механики в классическую. — Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 5, с. 957–960.
9. Маслова Т. В. Об уточнении закона Ципфа для частотных словарей. — Научно-техническая информация, сер. 2, 2006, т. 11, с. 37–44.
10. Erdős P., Lehner J. The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer. — Duke Math. J., 1941, v. 8, № 2, p. 335–345.
11. Maslov V. P. Unbounded probability theory compatible with the probability theory of numbers. — Math. Notes, 2012, v. 91, № 5, p. 697–703.
12. Maslov V. P. Bose condensate in the D -dimensional case, in particular, for $D = 2$. — Russ. J. Math. Phys., 2012, v. 19, № 3, p. 317–323.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964, 567 с.
14. Maslov V. P. Zeno-line, binodal, T - ρ diagram and clusters as a new Bose-condensate bases on new global distributions in number theory. arXiv:1007.4182v3 [math-ph], 28 Dec 2010.
15. Шмулович К. И., Меркьюри Л. Геохимические процессы при отрицательных давлениях. — Вест. Отд. наук о Земле РАН, 2006, № 1 (24), 3 с.

16. *Maslov V. P.* Threshold levels in economics. arXiv:0903.4783v2 [q-fin.ST], 3 Apr 2009.
17. *Maslov V. P.* Theorems on the debt crisis and the occurrence of inflation. — *Math. Notes*, 2009, v. 85, № 1, p. 146–150.
18. *Маслов В. П.* Квантовая экономика. М.: Наука, 2006.
19. *Maslov V. P., Mischenko A. S.* Geometry of a Lagrangian manifold in thermodynamics. — *Russ. J. Math. Phys.*, 2003, v. 10, № 2, p. 161–172.
20. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
21. *Маслов В. П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
22. *Маслов В. П.* Нестандартные характеристики в асимптотических задачах. — *Успехи матем. наук*, 1983, т. 38, № 6, с. 3–36.
23. *Litvinov G. L.* The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction. — *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*. Providence: Amer. Math. Soc., 2005, p. 1–17. (Contemp. Math., v. 377.)
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1976.
25. *Вершик А. М.* Статистическая механика комбинаторных развиений и их предельные конфигурации. — *Функц. анализ и его прил.*, 1996, т. 30, № 2, с. 19–39.
26. *Маслов В. П., Назайкинский В. Е.* О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I. — *Матем. заметки*, 2008, т. 83, в. 2, с. 232–263.

Поступила в редакцию
19.IX.2012