Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шевцова, Моментные оценки точности нормальной аппроксимации с уточненной структурой для сумм независимых симметричных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 499–532

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:32:51

© 2012 г.

ШЕВЦОВА И. Г.*

**МОМЕНТНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ
АППРОКСИМАЦИИ С УТОЧНЕННОЙ СТРУКТУРОЙ ДЛЯ
СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СИММЕТРИЧНЫХ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾**

Для равномерного расстояния Δ_n между функцией распределения стандартного нормального закона и функцией распределения нормированной суммы n независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$ с симметричными функциями распределения $F_1, \dots, F_n$ и $\mathbf{E}|X_j| = \beta_{1,j}$, $\mathbf{E}X_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, \dots, n$, при всех $n \geq 1$ и $c \geq 0$ доказаны оценки

$$\Delta_n \leq \frac{1/2 + \varkappa + c}{\sqrt{2\pi}} \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa - c}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \begin{cases} 4\ell_n^{7/6} \wedge A(c)\ell_n^{4/3} & \text{в общем случае,} \\ 2\ell_n^{3/2} \wedge A(c)\ell_n^2, & \text{если } F_1 = \dots = F_n, \end{cases}$$

где $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$, $\ell_n = B_n^{-3} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|X_j|^3$, $\varkappa = \sup_{x>0} (\cos x - 1 + x^2/2)/x^3 = 0.0991\dots$, функция $A(c)$ не ограничена при $c \rightarrow 0$, монотонно убывает, принимая конечные значения при всех $c > 0$, и указана в явном виде, символом $\wedge$ обозначен минимум. Обсуждается вопрос оптимальности константы $(1/2 + \varkappa)/\sqrt{2\pi} = 0.2390\dots$ в первом слагаемом, соответствующей значению $c = 0$. Полученные оценки уточняют известные результаты В. Бенткуса (1991, 1994) (при $c = \varkappa$) и Г. П. Чистякова (1996, 2001) (при $c = 1/2 - \varkappa = 0.4008\dots$). Также доказаны аналогичные результаты для случая, когда симметричные случайные слагаемые имеют абсолютные моменты только порядка $2 + \delta$ с некоторым $0 < \delta < 1$.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, оценка скорости сходимости, нормальная аппроксимация, неравенство Берри–Эссеена, асимптотически правильная константа.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; Институт проблем информатики РАН; e-mail: ishevtsova@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-07-33063, 11-01-00515а, 11-07-00112а, 11-01-12026-офи-м), Министерства образования и науки (грант МК-2256.2012.1, государственный контракт 16.740.11.0133 в рамках ФЦП «Кадры»).

1. Введение. Для $\delta \in [0, 1]$ введем класс $\mathcal{F}_{2+\delta}$ функций распределения (ф.р.) $F(x)$, имеющих конечные моменты порядка $2 + \delta$, $\mathcal{F}_{2+\delta, s}$ — множество всех симметричных ф.р. из $\mathcal{F}_{2+\delta}$. Для $F \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}$ положим $\beta_r = \beta_r(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dF(x)$, $0 < r \leq 2 + \delta$, и $\sigma^2 = \beta_2$. Ясно, что $\sigma^{2+\delta} \leq \beta_{2+\delta}$ для всех $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ и $\delta \in [0, 1]$ в силу неравенства Ляпунова.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины (н.с.в.), заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и имеющие ф.р. $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ соответственно. Для $j = 1, \dots, n$ обозначим

$$\begin{aligned}\sigma_j^2 &= \mathbf{E}X_j^2, \quad \beta_{r,j} = \mathbf{E}|X_j|^r, \quad 0 < r \leq 2 + \delta, \\ B_n^2 &= \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad \ell_n = B_n^{-(2+\delta)} \sum_{j=1}^n \beta_{2+\delta,j}, \\ \bar{F}_n(x) &= \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n < x B_n), \\ \Delta_n &= \Delta_n(F_1, \dots, F_n) = \sup_x |\bar{F}_n(x) - \Phi(x)|,\end{aligned}$$

$\Phi(x)$ — ф.р. стандартного нормального закона. Будем предполагать, что $B_n > 0$. Несложно убедиться, что в сделанных выше предположениях $\ell_n \geq B_n^{-(2+\delta)} \sum_{j=1}^n \sigma_j^{2+\delta} \geq n^{-\delta/2}$ для любого $n \geq 1$. Если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены (о.р.), то мы будем использовать обозначения: $F = F_1 = \dots = F_n$ — их общая ф.р.,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbf{E}X_1^2 > 0, \quad \beta_{2+\delta} = \mathbf{E}|X_1|^{2+\delta}, \\ \beta_\delta &= \mathbf{E}|X_1|^\delta, \quad \Delta_n(F) = \Delta_n(F, \dots, F).\end{aligned}$$

Тогда

$$B_n = \sigma\sqrt{n}, \quad \ell_n = \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} n^{\delta/2}}.$$

Всюду далее под записью $X \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ ($X \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}$) подразумеваем, что ф.р. с.в. X принадлежит классу $\mathcal{F}_{2+\delta}$ ($\mathcal{F}_{2+\delta, s}$).

В 1900–1901 гг. А. М. Ляпунов доказал вариант центральной предельной теоремы для независимых с.в., ныне известный как *теорема Ляпунова*, согласно которому, если $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ при некотором $0 < \delta \leq 1$ и $\ell_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\Delta_n(F_1, \dots, F_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а также установил первую оценку скорости сходимости:

$$\Delta_n(F_1, \dots, F_n) \leq \begin{cases} O(\ell_n), & 0 < \delta < 1, \\ O(\ell_n |\ln \ell_n|), & \delta = 1. \end{cases}$$

В 1923–1928 гг. Г. Крамер конкретизировал вид O -большого для $\delta = 1$ в оценке Ляпунова:

$$\Delta_n \leq 3\ell_n \ln n, \quad n \geq 1, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3, \quad (1)$$

и показал, что если случайные слагаемые о.р. и удовлетворяют условию

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\mathbf{E} e^{itX_1}| < 1,$$

ныне известному как условие Крамера, то логарифмический множитель $\ln n$ в (1) может быть опущен.

В 1941–1942 гг. А. Берри [20] и К.-Г. Эсseen [23] для $\delta = 1$ показали, что логарифмический множитель в оценке Ляпунова может быть опущен без каких бы то ни было дополнительных ограничений на ф.р. $F_1, \dots, F_n$ или на число слагаемых n , и доказали неравенство

$$\Delta_n \leq C_{\text{BE}}(\delta) \cdot \ell_n, \quad n \geq 1, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}, \quad (2)$$

при $\delta = 1$, указав конкретные значения абсолютной константы $C_{\text{BE}}(1)$. Для $0 < \delta < 1$ неравенство (2) было доказано в 1945 г. Эсseenом в [25]. Не останавливаясь на истории уточнения верхних оценок константы $C_{\text{BE}}(1)$, богатой интересными результатами и подробно изложенной, например, в [8], [28], отметим, что наилучшие на сегодняшний день двусторонние оценки $C_{\text{BE}}(1)$ имеют вид

$$0.4097 \dots = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \leq C_{\text{BE}}(1) \leq \begin{cases} 0.5591, & \forall F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}, \\ 0.4748, & F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta} \end{cases}$$

(нижняя оценка получена в [26], верхняя 0.5591 — в [12], верхняя 0.4748 — в [31]). Для симметричных случайных слагаемых нижняя оценка более оптимистична: $C_{\text{BE}}(1) \geq 1/\sqrt{2\pi} = 0.3989 \dots$ [23] (см. также [24], [25]). При $0 < \delta < 1$ наилучшие верхние оценки констант $C_{\text{BE}}(\delta)$ получены для случая произвольных $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ В. Тысяаком в [33] (см. вторую строку таблицы 1), для случая же $F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ — в [4] (см. третью строку таблицы 1), нижние оценки, справедливые также и для симметричных о.р. случайных слагаемых, впервые приведены в недавней работе [16] (см. четвертую строку таблицы 1).

Таблица 1. Двусторонние оценки констант $C_{\text{BE}}(\delta)$ из неравенства (2) для некоторых $\delta \in (0, 1)$: во второй строке — верхние оценки для произвольных $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ [33], в третьей — уточненные верхние оценки для н.о.р.с.в. из $\mathcal{F}_{2+\delta}$ [4], в четвертой — нижние оценки [16].

δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$C_{\text{BE}}(\delta) \leq$	1.102	1.076	1.008	0.950	0.902	0.863	0.833	0.812	0.802
$C_{\text{BE}}(\delta) \leq$	0.6028	0.6094	0.6195	0.6342	0.6413	0.6276	0.6026	0.5723	0.5383
$C_{\text{BE}}(\delta) \geq$	0.4097	0.3603	0.3257	0.3000	0.2803	0.2651	0.2534	0.2446	0.2383

Наличие конкретных верхних числовых оценок констант $C_{\text{BE}}(\delta)$ позволяет использовать нормальную аппроксимацию при решении многих прикладных задач, а точность этих верхних оценок оказывает прямое влияние на точность соответствующего решения прикладной задачи и оценку адекватности используемой нормальной модели. Таким образом, задача уточнения верхних оценок $C_{\text{BE}}(\delta)$ по сей день актуальна.

Кроме того, вычислению точного (наилучшего возможного, «правильного») значения абсолютной константы $C_{\text{BE}}(1)$ придавал большое значение А. Н. Колмогоров [6], предложивший в качестве промежуточной задачи вычислить *асимптотически правильную* константу

$$C_{\text{АП}} = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3: \ell_n = \ell} \frac{\Delta_n(F_1, \dots, F_n)}{\ell},$$

обеспечивающую справедливость асимптотической оценки

$$\Delta_n(F_1, \dots, F_n) \leq C_{\text{АП}} \cdot \ell_n + o(\ell_n) \quad (3)$$

для произвольного набора ф.р. $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3$ такого, что $\ell_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Эта оценка является в отношении множителя при ℓ_n наилучшей из возможных при условии, что $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3$. Чтобы подчеркнуть зависимость асимптотически правильной константы от соответствующего класса ф.р. (для которого ляпуновская дробь определена и может принимать бесконечно малые значения), будем использовать обозначение

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}: \ell_n = \ell} \frac{\Delta_n(F_1, \dots, F_n)}{\ell}. \quad (4)$$

В качестве $\mathcal{F}$, как правило, будут выступать $\mathcal{F}_{2+\delta}$ или $\mathcal{F}_{2+\delta, s}$ с $0 < \delta \leq 1$. Очевидно, что $C_{\text{BE}}(\delta) \geq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$. Для $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3, s})$ и $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$ Эссеев [23], [26] (см. также [24], [25]) установил упоминавшиеся выше нижние оценки: $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3, s}) \geq 1/\sqrt{2\pi} = 0.3989\dots$, $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) \geq (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4097\dots$

Развивая идеи А. Н. Колмогорова о наилучших асимптотических оценках, Х. Правитц в начале 1970-х годов догадался, что коэффициент при ляпуновской дроби в (3) можно сделать еще меньше, если единственный «главный» член разделить на два: собственно ляпуновскую дробь и величину

$$\tau_n = \frac{1}{B_n^3} \sum_{j=1}^n \sigma_j^3 \leq \ell_n,$$

которая даже в случае о.р.с.в. (тогда $\tau_n = n^{-1/2}$) может быть бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем ℓ_n , при $\ell_n \rightarrow 0$. Такая ситуация характерна для схемы серий и возникает, в частности,

при «переносе» результатов классической теории суммирования независимых случайных величин на суммы со случайным числом слагаемых (в том числе на пуассоновские случайные суммы). А именно, Правитц в [30] доказал оценку, которая может быть записана в виде

$$\Delta_n \leq \ell_n \cdot C_P(\ell_n) + \frac{\tau_n}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{4\pi B_n^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3, \quad (5)$$

где $C_P(\ell)$ — некоторая положительная невозрастающая функция аргумента $\ell > 0$ со сложной структурой такая, что

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} C_P(\ell) = \frac{1.0253}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{0.0253}{6\sqrt{2\pi}} = 0.2676 \dots$$

Поскольку $\tau_n \leq \ell_n$ и $B_n^{-4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4 \leq \ell_n^{4/3} = o(\ell_n)$ при $\ell_n \rightarrow 0$, из (5) можно вывести оценку

$$\Delta_n \leq \ell_n \cdot C_P^*(\ell_n) \quad (6)$$

с некоторой положительной невозрастающей функцией $C_P^*(\ell)$ аргумента $\ell > 0$ такой, что

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} C_P^*(\ell) = \frac{1.0253}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{0.0253}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4671 \dots$$

Как легко видеть, из (6) вытекает, что $C_{АП}(\mathcal{F}_3) < 0.4672$.

Кроме того, в работе [30] описан алгоритм, с помощью которого можно вычислять конкретные значения $C_P(\ell)$ и $C_P^*(\ell)$ при достаточно малых ℓ , что играет исключительно важную роль в задаче поиска верхних оценок абсолютной константы $C_{ВЕ}(1)$ в неравенстве Берри–Эссеена (2). Дело в том, что начиная с работ 1963–1966 гг. С. Паля [34], [35] и В.М. Золотарева [5] эта задача решалась в два этапа: константа $C_{ВЕ}(1) = C_{ВЕ}(1, \ell_n)$ оценивалась отдельно для малых значений ляпуновской дроби ℓ_n (такие оценки называются асимптотическими) и отдельно для случая, когда ℓ_n отделено от нуля, где использовались специальные численные методы. При этом после появления работы Правитца максимальная из оценок константы $C_{ВЕ}(1, \ell_n)$ достигалась на интервале значений ℓ_n , отделенном от нуля, т.е. асимптотические оценки заметно «опередили» абсолютные. Тем не менее к настоящему времени эти оценки заметно сблизились (зазор между ними не превосходит $0.4748 - 0.4671 = 0.0077$) и существенные продвижения в этой задаче уже невозможны без уточнения асимптотических оценок.

В той же работе [30] для о.р.с.в. Правитц анонсировал оценку, которая может быть записана в виде

$$\Delta_n \leq \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi n}} + \tilde{C}_P \cdot \ell_n^2, \quad F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_3, \quad (7)$$

где $\tilde{C}_P$ — некоторая абсолютная константа. Из (7) вытекает следующее уточнение верхней оценки асимптотически правильной константы $C_{AP}(\mathcal{F}_3)$ для о.р.с.в.:

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, F \in \mathcal{F}_3: \ell_n = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{\ell} \leq \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} < 0.4655.$$

Кроме того, Правитц утверждал, что коэффициент

$$\frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659 \dots$$

при ляпуновской дроби в (7) не может быть уменьшен. К сожалению, доказательство этого утверждения, так же как и самого неравенства (7), Правитцем опубликовано не было. Тем не менее оба утверждения Правитца по сути оказались верными: неравенство (7) было позже доказано В. Бенткусом [18], [19], а неулучшаемость коэффициента $2/(3\sqrt{2\pi})$ при ℓ_n в (7) показана в недавних статьях [15], [16].

В работах [18], [19] доказаны оценки

$$\Delta_n \leq \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{\tau_n}{2\sqrt{2\pi}} + C_B \cdot \ell_n^{4/3} \leq \frac{7\ell_n}{6\sqrt{2\pi}} + C_B \cdot \ell_n^{4/3}, \quad (8)$$

$$n \geq 1, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3,$$

где C_B — некоторая абсолютная константа. Ухудшение порядка остаточного члена до $O(\ell_n^{4/3})$ в (8) по сравнению с $O(\ell_n^2)$ в (7) объясняется, по-видимому, большей общностью предположения о произвольности $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3$. Из неравенства (8), как несложно убедиться, вытекает верхняя оценка $C_{AP}(\mathcal{F}_3) \leq 7/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4654 \dots$, отличающаяся от нижней $C_{AP}(\mathcal{F}_3) \geq (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4097 \dots$ менее чем на шесть сотых. В тех же работах [18], [19] имеется упоминание о том, что с использованием уточненной для симметричного случая оценки разности допредельной $\bar{f}_n(t) = \mathbf{E} e^{it(X_1 + \dots + X_n)/B_n}$ и предельной нормальной характеристических функций (х.ф.) в окрестности нуля

$$|\bar{f}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq (2\kappa_1(\ell_n - \tau_n)|t|^3 + C_B^* \ell_n^{4/3} t^4) e^{-(1-\tau_n^{2/3})t^2/2 + \kappa_1(\ell_n + \tau_n)|t|^3}, \quad (9)$$

где $\kappa_1 = \sup_{x>0} (\cos x - 1 + x^2/2)/x^3 = 0.09916 \dots$, C_B^* — некоторая абсолютная постоянная, можно получить оценку

$$\Delta_n \leq \frac{1/2 + 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \ell_n + \frac{1/2 - 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \tau_n + \tilde{C}_B \cdot \ell_n^{4/3}, \quad n \geq 1, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}, \quad (10)$$

где $\tilde{C}_B$ — некоторая абсолютная постоянная, а также — с учетом того, что $\tau_n \leq \ell_n$, — оценку

$$\Delta_n \leq \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}} + \tilde{C}_B \cdot \ell_n^{4/3}, \quad n \geq 1, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}. \quad (11)$$

Из (11) с учетом соответствующей нижней оценки Эссеена [23] вытекает, что

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989 \dots,$$

но, к сожалению, никаких идей доказательства фундаментальной оценки (9) Бенткусом в упомянутых работах не дано. В обеих своих статьях [18] и [19] за доказательством неравенств (9), (10) и (11) автор отсылает к работе *V. Bentkus and Ch. Hipp «An estimate of the constant in the Berry–Esseen inequality for symmetric random variables», to appear.*

В 1996 г. Г. П. Чистяков в своей заметке [13] анонсировал основные результаты фундаментального цикла [14], посвященного построению нового асимптотического разложения, обобщающего разложение Эссеена [24], [25] на случай разнораспределенных слагаемых, и вычислению точных значений асимптотически правильных констант в теореме Ляпунова. В качестве следствий этого нового разложения Чистяков в [14] получил асимптотические оценки с неулучшаемыми в постановке Колмогорова (3) константами при ляпуновской дроби

$$\Delta_n \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \ell_n + C \cdot \ell_n^{40/39} |\ln \ell_n|^{7/6}, \quad n \geq 1, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3, \quad (12)$$

$$\Delta_n \leq \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}} + \tilde{C} \cdot \ell_n^{40/39} |\ln \ell_n|^{7/6}, \quad n \geq 1, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}, \quad (13)$$

где C и $\tilde{C}$ — некоторые абсолютные постоянные (в [13] объявлены аналогичные результаты с более «тяжелым» остаточным членом $O(\ell_n^{56/55} |\ln \ell_n|^{3/2})$). Из (12) вытекает, что

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097 \dots,$$

тем самым Чистяков решил поставленную Колмогоровым задачу о вычислении точного значения асимптотически правильной константы $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$, а также представил строгое доказательство указанного Бенткусом соотношения $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) = 1/\sqrt{2\pi}$. При этом Чистяков отмечает, что оценка (13) уступает оценке Бенткуса (11) в отношении второго слагаемого, цитируя неравенство (11) в работе [13] со ссылкой на упомянутую выше статью Бенткуса и Хиппа с комментарием «to appear», а в [14] — уже со ссылкой на работу Бенткуса [19].

К глубочайшему сожалению, В. Бенткус скончался в 2010 г. Вопрос о судьбе статьи Бенткуса и Хиппа и, в частности, об источниках доказательства оценки (9) автор задавала К. Хиппу и Г. П. Чистякову.

Ответ К. Хиппа от 18 июля 2011 г. состоял в том, что некоторые результаты разыскиваемой статьи опубликованы в его совместной работе

с Л. Маттнером [27] в 2007 г. В этой статье для схемы суммирования н.о.р. бернуллиевских с.в. показано, что

$$\Delta_n = \begin{cases} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}, & n \text{ нечетно,} \\ \frac{n!}{2^{n+1}((n/2)!)^2}, & n \text{ четно,} \end{cases}$$

откуда, в частности, вытекает, что в рассматриваемой ситуации $\Delta_n < 1/\sqrt{2\pi n}$ при всех $n \geq 1$. Интерес к распределению Бернулли вызван тем, что двухточечные распределения являются гипотетически самыми «плохими» (экстремальными) с точки зрения скорости сходимости к нормальному закону: именно на симметричном распределении Бернулли $\mathbf{P}(X_1 = \pm 1) = 1/2$ Эссеев [23]–[25] установил нижнюю оценку

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_{3,s}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{\ell_n(F)} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Однако вопрос о точности нормальной аппроксимации для случая *произвольного* симметричного распределения слагаемых в [27] не рассматривается.

Г. П. Чистяков же сообщил, что во время их личной встречи между 1996 и 2001 гг. В. Бенткус «довольно категорично сказал, что неравенство (11) верно, но руки не доходят довести его до публикации». Этим и объясняется ссылка на статью Бенткуса [19] в работе Чистякова [14]. Таким образом, доказательство оценки (11) опубликовано не было, а на неравенство (10) нет даже и ссылок, хотя при малых ℓ_n оценка (10) может быть в $2/(1+4\kappa_1) \approx 1.43$ раз точнее, чем (11) и (13), если $\tau_n = o(\ell_n)$ при $\ell_n \rightarrow 0$. В отличие от Правитца, Бенткус ничего не сказал об оптимальности константы $(1+4\kappa_1)/(2\sqrt{2\pi})$ при ляпуновской дроби в (10).

Для проверки утверждения Правитца о неулучшаемости константы $2/(3\sqrt{2\pi})$ при ляпуновской дроби ℓ_n в (7), в недавней работе [15] (также см. [16]) было введено определение нижней асимптотически правильной константы

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3: \ell_n = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{\ell}, \quad (14)$$

которое с точностью до замены $\mathcal{F}_3$ на $\mathcal{F}_{3,s}$ также может быть использовано для нахождения минимально возможного значения коэффициента при ляпуновской дроби ℓ_n и в оценках для симметричных распределений типа (10). Как несложно видеть, коэффициент при ляпуновской дроби ℓ_n в (7), (8) не может быть меньше, чем $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$, а в (10) — чем $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s})$. В [15], [16] показано, что $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = 2/(3\sqrt{2\pi})$, что доказывает утверждение Правитца. Для $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s})$ из (10) вытекает верхняя

оценка $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \leq (1 + 4\kappa_1)/(2\sqrt{2\pi}) = 0.2785\dots$, в данной же работе будет показано, что

$$0.1994\dots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \leq \underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \leq \frac{1 + 2\kappa_1}{2\sqrt{2\pi}} = 0.2390\dots$$

Развивая идеи Правитца об уточнении структуры оценок точности нормальной аппроксимации, в 2009 г. В. Ю. Королев и автор [7] для всех $F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_3$ и $n \geq 1$ доказали оценку $\Delta_n \leq 0.345(\ell_n + \tau_n)$, в которой константа 0.345 при ляпуновской дроби строго меньше теоретически минимально возможного значения константы $C_{\text{ВЕ}}(1)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена (2) и менее чем на восемь сотых больше своего минимально возможного значения 0.2659. Позже те же авторы в [8], [28] уточнили свою оценку и окончательно доказали неравенства [28]:

$$\Delta_n \leq 0.3041(\ell_n + \tau_n), \quad \Delta_n \leq 0.33477(\ell_n + 0.429\tau_n), \\ F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_3.$$

Последнее было уточнено автором в работе [31], содержащей оценки

$$\Delta_n \leq 0.3328(\ell_n + 0.429\tau_n), \quad \Delta_n \leq 0.33554(\ell_n + 0.415\tau_n), \\ F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_3.$$

Второе неравенство влечет наилучшую на сегодняшний день верхнюю оценку 0.4748 абсолютной константы $C_{\text{ВЕ}}(1)$ в неравенстве Берри–Эссеена (2), поскольку $0.33554(\ell_n + 0.415\tau_n) \leq 0.33554 \cdot 1.415\ell_n < 0.4748\ell_n$. Для $0 < \delta < 1$ аналогичные результаты получены в [4]. Для произвольных же $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3$ при всех $n \geq 1$ в [9] доказана оценка $\Delta_n \leq 0.3197(\ell_n + \tau_n)$.

Оптимальность первого слагаемого в оценках Правитца–Бенткуса (7), (8) вызывает естественный вопрос о точности второго. Ни Правитц, ни Бенткус об этом в своих работах ничего не написали. И лишь в недавних статьях [17], [32] было показано, что константа $(2\sqrt{2\pi})^{-1} = 0.1994\dots$ является «правильной» для оценок с уточненной функцией моментов $B_n^{-3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 \leq B_n^{-3} \sum_{j=1}^n \sigma_j^3 = \tau_n$ во втором слагаемом:

$$\Delta_n \leq \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \begin{cases} 6\ell_n^{5/3}, & F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 3\ell_n^2, & F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_3, \end{cases} \quad (15)$$

а для оценок в терминах ℓ_n и τ_n типа Правитца–Бенткуса «правильным» коэффициентом при τ_n уже является $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3)/(6\pi)} = 0.1569\dots$. Этот результат в совокупности с нижними оценками из работы [16] получен в [17], [32] как следствие верхних оценок

$$\Delta_n \leq \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{3} - 3}{6\pi}} \tau_n + \begin{cases} 3\ell_n^{7/6}, & F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 2\ell_n^{3/2}, & F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_3. \end{cases} \quad (16)$$

Более того, в [32] для любого $c > 2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659\dots$ найдено минимальное значение $K(c)$, обеспечивающее справедливость оценок

$$\Delta_n \leq c\ell_n + K(c)\tau_n + \begin{cases} A^*(c)\ell_n^{4/3}, & F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ A^*(c)\ell_n^2, & F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_3, \end{cases} \quad (17)$$

где $A^*(c)$ — монотонно убывающая функция с $\lim_{c \rightarrow 2/(3\sqrt{2\pi})} A^*(c) = \infty$, но принимающая конечные значения при всех $c > 2/(3\sqrt{2\pi})$ и указанная в явном виде. При этом функция $K(c)$ непрерывна и строго монотонно убывает, изменяясь в пределах

$$0.1570 > \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{6\pi}} = K\left(\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}\right) \geq K(c) > \lim_{c \rightarrow \infty} K(c) = -\infty, \quad c \geq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}},$$

и обращается в нуль в единственной точке $c = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi})$, т.е. второе слагаемое в (17) отрицательно при $c > (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi})$. Наличие отрицательного слагаемого в главной части довольно необычно для оценок точности нормальной аппроксимации, но позволяет в качестве простого следствия получать асимптотически правильные оценки для симметричных слагаемых, имеющих распределение Бернулли (для которого $\beta_{1,j} \sigma_j^2 = \sigma_j^3 = \beta_{3,j}$ и $\ell_n = \tau_n$), а именно

$$\Delta_n \leq \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}} + R^*(\ell_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + R^*(\ell_n), \quad (18)$$

где $R^*(\ell_n) = 3.4106\ell_n^{4/3}$ в случае разнораспределенных и $R^*(\ell_n) = 2.5475\ell_n^2$ в случае о.р. случайных слагаемых с симметричным распределением Бернулли.

Отметим также, что «главный» член $\psi_1 = \inf_{c > 2/(3\sqrt{2\pi})}$ оценки (17) совпадает с «главным» членом $\psi_2 = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi})\ell_n$ оценки Чистякова (12) тогда и только тогда, когда $\ell_n/\tau_n = \sqrt{20(\sqrt{10} - 3)}/3 = 1.0401\dots$, во всех остальных случаях выполняется строгое неравенство $\psi_1 < \psi_2$, в отношении же остаточного члена оценка (17) сильнее, чем (12).

Также в [17], [32] были получены аналоги оценки (15) для случая $0 < \delta < 1$.

В данной работе будут получены уточненные для симметричного случая оценки типа (15), (16) и (17), также уточняющие оценки Бенткуса (10), (11) и Чистякова (13), а именно, во втором разделе данной работы будет показано, что

$$\Delta_n \leq \min_{c \geq 0} \left\{ \frac{1/2 + \varkappa_1 + c}{\sqrt{2\pi}} \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa_1 - c}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + R_c(\ell_n) \right\}, \quad (19)$$

где $R_c(\ell_n) = 4\ell_n^{7/6} \wedge A(c)\ell_n^{4/3}$ в случае произвольных $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$ и $R_c(\ell_n) = 2\ell_n^{3/2} \wedge A(c)\ell_n^2$ в случае $F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$, где $A(c)$ — некоторая монотонно убывающая функция с $\lim_{c \rightarrow 0} A(c) = \infty$, но принимающая конечные значения при всех $c > 0$ и указанная в явном виде. Следствиями (19) являются: при $c = \varkappa_1$ — оценка Бенткуса (10), при $c = 1/2 - \varkappa_1 = 0.4008\dots$ — оценки Бенткуса (11) и Чистякова (13). При этом неравенство (19) уточняет оценки (10), (11), (13) как в отношении главного члена, так и в отношении остаточного. Заметим, что при малых ℓ_n оценка (19) с $c = 0$ может быть в $(1 + 4\varkappa_1)/(1 + 2\varkappa_1) \approx 1.17$ раз точнее, чем (10), и в $2/(1 + 2\varkappa_1) \approx 1.67$ раз точнее, чем (11) и (13). Кроме того, будут получены аналоги (19) для случая $0 < \delta < 1$.

При доказательстве основных результатов используется комбинация метода характеристических функций, реализованного в виде неравенства сглаживания Правитца [29], с методом усечения. Отметим, что в предшествующих работах в качестве неравенства сглаживания Чистяковым использовалось неравенство Эссеена–Золотарева с нормальным сглаживающим законом распределения вероятностей, а Правитцем и Бенткусом — неравенство Правитца, в котором «сглаживающая» функция с финитным преобразованием Фурье не имеет вероятностной интерпретации.

2. Верхние оценки. Принципиальным отличием, приводящим к уточнению главной части оценок точности нормальной аппроксимации для симметричных распределений по сравнению с полученными в [17], [32] оценками (15)–(17) для общего случая, является оценка разности х.ф. произвольного распределения из $\mathcal{F}_{2+\delta,s}$ и нормальной х.ф. в окрестности нуля, приведенная в следующей лемме.

Лемма 1. Для любого $0 < \delta \leq 1$ и любой с.в. $X \in \mathcal{F}_{2+\delta,s}$ с х.ф. $f(t) = \mathbf{E} \cos(tX)$ при всех $t \in \mathbf{R}$ и $U \geq 0$ справедлива оценка

$$|f(t) - e^{-\sigma^2 t^2/2}| \leq \varkappa_\delta |t|^{2+\delta} \mathbf{E} |X|^{2+\delta} \mathbf{1}(|X| > U) + \frac{t^4}{24} \mathbf{E} X^4 \mathbf{1}(|X| \leq U) + \frac{\sigma^4 t^4}{8}, \quad (20)$$

где

$$\varkappa_\delta = \sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{|\cos x - 1 + x^2/2|}{|x|^{2+\delta}}. \quad (21)$$

Аналогичные оценки, полученные в работах [17], [32] для общего случая, содержат усеченный третий момент $\mathbf{E} X^3 \mathbf{1}(|X| \leq U)$, который в симметричном случае равняется нулю для любого $U \geq 0$, а вместо $\varkappa_\delta$ — величину

$$\gamma_\delta = \sup_{x > 0} \sqrt{\left(\frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^{2+\delta}}\right)^2 + \left(\frac{\sin x - x}{x^{2+\delta}}\right)^2} > \varkappa_\delta,$$

но зато при $\delta = 1$ не имеют последнего слагаемого $\sigma^4 t^4/8$, в результате чего в оценках из работ [17], [32] для $\delta = 1$, содержащих моменты $\beta_{1,j}$, порядок остаточного члена $O(\ell_n^{5/3})$ оказывается лучше, чем $O(\ell_n^{4/3})$ для оценок в симметричном случае, полученных в данной работе, за счет более «тяжелой» главной части с коэффициентом $\gamma_\delta > \varkappa_\delta$.

Значения величин γ_δ и $\varkappa_\delta$ при некоторых $0 < \delta \leq 1$ приведены в таблице 2 во втором и третьем столбцах. В частности, $\gamma_1 = 1/6 = 0.1666\dots$, $\varkappa_1 = 0.0991\dots$.

Таблица 2. Значения γ_δ , $\varkappa_\delta$, $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$, $t_3(\delta)$, $t_4(\delta, \ell)$, $\bar{\ell}(\delta)$ и $N(\delta) = 1 + \lfloor (\bar{\ell}(\delta))^{-2/(2+\delta)} \rfloor$ с точностью до четвертого знака для некоторых $0 < \delta \leq 1$ и $\ell = 0.1, 0.01$.

δ	γ_δ	$\varkappa_\delta$	$t_1(\delta)$	$t_2(\delta)$	$t_3(\delta)$	$t_4(\delta, 0.1)$	$t_4(\delta, 0.01)$	$\bar{\ell}(\delta)$	$N(\delta)$
0.01	0.5225	0.4909	0.9950	0.0261	0.1356	0.0000	0.3566	0.0193	51
0.05	0.4885	0.4563	0.9761	0.0673	0.1370	0.1055	0.7887	0.0886	11
0.10	0.4498	0.4170	0.9539	0.1019	0.1386	0.2990	0.8613	0.1626	6
0.15	0.4149	0.3815	0.9331	0.1302	0.1401	0.4197	0.8798	0.2265	4
0.20	0.3833	0.3494	0.9132	0.1551	0.1416	0.4944	0.8841	0.2827	4
0.25	0.3548	0.3203	0.8941	0.1778	0.1431	0.5429	0.8826	0.3327	3
0.30	0.3290	0.2940	0.8756	0.1989	0.1444	0.5758	0.8784	0.3776	3
0.35	0.3058	0.2701	0.8576	0.2187	0.1457	0.5987	0.8725	0.4181	3
0.40	0.2847	0.2484	0.8399	0.2375	0.1469	0.6147	0.8658	0.4549	2
0.45	0.2657	0.2287	0.8226	0.2556	0.1480	0.6260	0.8584	0.4884	2
0.50	0.2486	0.2108	0.8054	0.2729	0.1490	0.6338	0.8507	0.5191	2
0.55	0.2331	0.1945	0.7884	0.2896	0.1500	0.6390	0.8427	0.5474	2
0.60	0.2193	0.1796	0.7716	0.3058	0.1509	0.6422	0.8345	0.5734	2
0.65	0.2070	0.1661	0.7548	0.3214	0.1517	0.6439	0.8262	0.5975	2
0.70	0.1960	0.1537	0.7380	0.3366	0.1524	0.6442	0.8177	0.6198	2
0.75	0.1865	0.1424	0.7212	0.3514	0.1530	0.6435	0.8091	0.6405	2
0.80	0.1783	0.1321	0.7044	0.3657	0.1536	0.6420	0.8005	0.6597	2
0.85	0.1715	0.1227	0.6875	0.3797	0.1540	0.6397	0.7918	0.6776	2
0.90	0.1665	0.1142	0.6705	0.3932	0.1544	0.6369	0.7830	0.6944	2
0.95	0.1637	0.1063	0.6533	0.4064	0.1547	0.6334	0.7741	0.7100	2
1.00	0.1666	0.0991	0.6359	0.4191	0.1550	0.6296	0.7652	0.7247	2

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенство $|e^{-x} - 1 + x| \leq x^2/2$, $x \geq 0$, для всех $t \in \mathbf{R}$ получаем

$$\begin{aligned}
 |f(t) - e^{-\sigma^2 t^2/2}| &\leq \left| \mathbf{E} \left(\cos(tX) - 1 + \frac{t^2 X^2}{2} \right) \right| + \left| e^{-\sigma^2 t^2/2} - 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right| \\
 &\leq R(t) + \frac{\sigma^4 t^4}{8},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R(t) &= \left| \mathbf{E} \left(\cos(tX) - 1 + \frac{(tX)^2}{2} \right) \right| \leq R_1(t, U) + R_2(t, U), \\ R_1(t, U) &= \left| \mathbf{E} \left(\cos(tX) - 1 + \frac{(tX)^2}{2} \right) \mathbf{1}(|X| \leq U) \right|, \\ R_2(t, U) &= \left| \mathbf{E} \left(\cos(tX) - 1 + \frac{(tX)^2}{2} \right) \mathbf{1}(|X| > U) \right| \end{aligned}$$

для любого $U \geq 0$.

По определению величины $\varkappa_\delta$ имеем $|\cos x - 1 + x^2/2| \leq \varkappa_\delta |x|^{2+\delta}$, $x \in \mathbf{R}$, откуда для $R_2(t, U)$ получаем

$$R_2(t, U) \leq \varkappa_\delta |t|^{2+\delta} \mathbf{E} |X|^{2+\delta} \mathbf{1}(|X| > U).$$

Используя неравенство $|\cos x - 1 + x^2/2| \leq x^4/24$, $x \in \mathbf{R}$, для $R_1(t, U)$ получаем

$$R_1(t, U) \leq \frac{t^4}{24} \mathbf{E} X^4 \mathbf{1}(|X| \leq U).$$

Объединяя найденные оценки, приходим к утверждению леммы.

Дословно повторяя рассуждения из [32] (см. также [30], [2]) с заменой величины γ_δ на $\varkappa_\delta$ и используя оценку (20) с $U = 0$, получаем следующий аналог леммы 6 работы [32] для симметричного случая.

Лемма 2. Для $0 < \delta \leq 1$ обозначим $\theta_0(\delta)$ единственный корень уравнения

$$\delta\theta^2 + 2\theta \sin \theta + 2(2 + \delta)(\cos \theta - 1) = 0, \quad \pi < \theta < 2\pi,$$

$t_1(\delta) = \theta_0(\delta)/(2\pi)$, $t_2 = t_2(\delta)$ — единственный корень уравнения

$$t^2(1 - 2\varkappa_\delta(2\pi t)^\delta) = t_1^2(\delta)(1 - 2\varkappa_\delta(2\pi t_1(\delta))^\delta)$$

на интервале $(0, t_1(\delta))$. Положим

$$\begin{aligned} \bar{\ell}(\delta) &= \left(1 - \frac{4}{(2 + \delta)^2} \exp \left\{ -\frac{\delta(4 + \delta)}{2(2 + \delta)} \right\} \right)^{1+\delta/2}, \\ t_4(\delta, \ell) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - \ell^{2/(2+\delta)}}{2\varkappa_\delta} \right)^{1/\delta}, \quad 0 < \ell < \bar{\ell}(\delta), \\ t_3(\delta) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{(2 + \delta)^2 \varkappa_\delta} \right)^{1/\delta} \exp \left\{ -\frac{4 + \delta}{2(2 + \delta)} \right\} = t_4(\delta, \bar{\ell}(\delta)), \\ f_j(t) &= \mathbf{E} e^{itX_j} = \mathbf{E} \cos(tX_j), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\nu_n = 1 + \sum_{j=1}^n \beta_{\delta,j} \sigma_j^2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_{2+\delta,j} \right)^{-1}.$$

Тогда при всех $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}$ таких, что $\ell_n < \bar{\ell}(\delta)$, для любого t_0 из интервала

$$t_3(\delta) \leq t_0 < \min\{t_1(\delta), t_4(\delta, \ell_n)\}$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Delta_n \leq & \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \frac{1}{t} \left| f_j\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{-\sigma_j^2 t^2 / (2B_n^2)} \right| e^{-t^2/2} dt + \frac{(\nu_n \ell_n)^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} \\ & + \ell_n^{(4+\delta)/(2+\delta)} J_{11}(\ell_n, \nu_n, t_0) + \ell_n^{(1+\delta)/\delta} J_{12}(\ell_n, \nu_n) \\ & + \frac{(\nu_n \ell_n)^{2/\delta}}{4\pi^2} J\left(\frac{2\pi}{(\nu_n \ell_n)^{1/\delta}}, t_0\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_{11}(\ell, \nu, t_0) = & \frac{1.0253}{16\pi} \left(8\kappa_\delta Q(\ell, t_0, 4 + \delta) + 16\nu\kappa_\delta^2 \ell^{\delta/(2+\delta)} Q(\ell, t_0, 4 + 2\delta) \right. \\ & \left. + \ell^{(2-\delta)/(2+\delta)} Q(\ell, t_0, 6) + 2\nu\kappa_\delta \ell^{2/(2+\delta)} Q(\ell, t_0, 6 + \delta) \right), \\ & 1 \leq \nu \leq 2, \quad \ell > 0, \\ Q(\ell, t_0, r) = & \frac{2^{(r-1)/2} \Gamma((r+1)/2)}{(1 - \ell^{2/(2+\delta)} - 2\kappa_\delta (2\pi t_0)^\delta)^{(r+1)/2}}, \quad 0 < \ell < \bar{\ell}(\delta), \quad r > 0, \\ J_{12}(\ell, \nu) = & \nu^{1/\delta} \left[\frac{2^{(\delta-1)/2} \kappa_\delta}{\pi} \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right) \left(1 + \frac{3+\delta}{72} (\nu\ell)^{2/\delta}\right) \right. \\ & \left. + \frac{3\ell^{(2-\delta)/(2+\delta)}}{16\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{5}{72} (\nu\ell)^{2/\delta}\right) \right], \quad 1 \leq \nu \leq 2, \quad \ell > 0, \\ J(T, t_0) = & 0 \vee \left(J_{21}(T, t_0) + J_{22}(T, t_0) + J_3(T) \right. \\ & \left. + J_4(T, t_0) - 1 + \frac{\pi^{5/2}}{18\sqrt{2}} \frac{1}{T} \right), \\ J_{21}(T, t_0) = & \frac{1.0253}{\pi} T^2 \int_{t_0 \wedge t_2(\delta)}^{t_2(\delta)} \exp\left\{ -\frac{T^2 t^2}{2} (1 - 2\kappa_\delta (2\pi t)^\delta) \right\} \frac{dt}{t}, \\ J_{22}(T, t_0) = & \frac{1.0253}{\pi} T^2 \exp\left\{ -\frac{T^2 t_1^2(\delta)}{2} (1 - 2\kappa_\delta (2\pi t_1(\delta))^\delta) \right\} \ln \frac{t_1(\delta)}{t_0 \vee t_2(\delta)}, \\ J_3(T) = & T^2 \int_0^{1-t_1(\delta)} t \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi(t \vee 10^{-4})} - \cot \pi(t \vee 10^{-4}) \right)^2} \\ & \times \exp\left\{ -T^2 \frac{1 - \cos 2\pi t}{4\pi^2} \right\} dt, \\ J_4(T, t_0) = & 0 \vee \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{\pi t_0} - 1 + t_0 - \frac{\pi^2 t_0^2}{18} \right) e^{-T^2 t_0^2/2}, \quad T > 0. \end{aligned}$$

Если $F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}$, то при всех $n \geq (\bar{\ell}(\delta))^{-2/(2+\delta)}$ и t_0 таких, что

$$t_3(\delta) \leq t_0 < \min\{t_1(\delta), t_4(\delta, n^{-1-\delta/2})\},$$

имеет место оценка

$$\begin{aligned} \Delta_n \leq & \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \frac{1}{t} \left| f_j\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{-\sigma_j^2 t^2 / (2B_n^2)} \right| e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} + \frac{\beta_\delta}{\sigma^\delta} \right)^{1/\delta} \\ & + \ell_n^2 \hat{J}_{11}(n, \nu_n, t_0) + \ell_n^{(1+\delta)/\delta} \hat{J}_{12}(\ell_n, \nu_n, n) \\ & + \frac{(\nu_n \ell_n)^{2/\delta}}{4\pi^2} J\left(\frac{2\pi}{(\nu_n \ell_n)^{1/\delta}}, t_0\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{J}_{11}(n, \nu, t_0) = & \frac{1.0253}{16\pi} \left[\frac{8\kappa_\delta}{n^{1-\delta/2}} Q\left(\frac{1}{n^{1+\delta/2}}, t_0, 4 + \delta\right) \right. \\ & + 16\nu\kappa_\delta^2 Q\left(\frac{1}{n^{1+\delta/2}}, t_0, 4 + 2\delta\right) \\ & + n^{-2+\delta} Q\left(\frac{1}{n^{1+\delta/2}}, t_0, 6\right) \\ & \left. + \frac{2\nu\kappa_\delta}{n^{1-\delta/2}} Q\left(\frac{1}{n^{1+\delta/2}}, t_0, 6 + \delta\right) \right], \\ \hat{J}_{12}(\ell, \nu, n) = & \nu^{1/\delta} \left[\frac{2^{(\delta-1)/2} \kappa_\delta}{\pi} \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right) \left(1 + \frac{3+\delta}{72} (\nu\ell)^{2/\delta}\right) \right. \\ & \left. + \frac{3n^{-1+\delta/2}}{16\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{5}{72} (\nu\ell)^{2/\delta}\right) \right], \\ & 1 \leq \nu \leq 2, \quad \ell > 0, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

При фиксированном t_0 функции $J_{21}(T, t_0)$, $J_{22}(T)$, $J_3(T)$, $J_4(T, t_0)$ аргумента T при $T > 0$ имеют не более одного максимума и не имеют минимумов; $\hat{J}_{11}(n, \nu, t_0)$, $\hat{J}_{12}(\ell, \nu, n)$ монотонно убывают по $n \geq 1$ при фиксированных ℓ и ν ; $t_4(\delta, \ell)$ монотонно убывает по ℓ ; $J_{11}(\ell, \nu, t_0)$, $J_{12}(\ell, \nu)$, $\hat{J}_{11}(\ell^{-2/\delta}, \nu, t_0)$, $\hat{J}_{12}(\ell, \nu, \ell^{-2/\delta})$ монотонно возрастают по ℓ ; $J_{11}(\ell, \nu, t_0)$, $J_{12}(\ell, \nu)$, $\hat{J}_{11}(n, \nu, t_0)$, $\hat{J}_{12}(\ell, \nu, n)$ монотонно возрастают по $\nu \in [1, 2]$ и

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{J}_{11}(n, \nu, t_0) &= \frac{1.0253 \cdot 2^{3/2+\delta} \nu \kappa_\delta^2 \Gamma(5/2 + \delta)}{\pi(1 - 2\kappa_\delta(2\pi t_0)^\delta)^{5/2+\delta}}, \\ &1 \leq \nu \leq 2, \quad t_3(\delta) \leq t_0 \leq t_1(\delta), \\ \lim_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \geq \ell^{-2/\delta}} \hat{J}_{12}(\ell, \nu, n) &= \nu^{1/\delta} 2^{(\delta-1)/2} \pi^{-1} \kappa_\delta \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right), \quad 1 \leq \nu \leq 2, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} J(T, t_0) &= 0, \quad t_3(\delta) \leq t_0 \leq t_1(\delta). \end{aligned}$$

Значения величин κ_δ , $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$, $t_3(\delta)$, $t_4(\delta, \ell)$, $\bar{\ell}(\delta)$ и

$$N(\delta) = \inf \left\{ n \in \mathbf{N} : n > (\bar{\ell}(\delta))^{-2/(2+\delta)} \right\} = 1 + \left\lfloor (\bar{\ell}(\delta))^{-2/(2+\delta)} \right\rfloor$$

для некоторых $0 < \delta \leq 1$ и $\ell = 0.1, 0.01$ с точностью до четвертого знака приведены в таблице 2.

Для оценки интеграла

$$I_{13} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \frac{1}{t} \left| f_j\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{-\sigma_j^2 t^2 / (2B_n^2)} \right| e^{-t^2/2} dt$$

используются принципиально различные методы в зависимости от того, равняется δ единице или нет. Дело в том, что при $\delta < 1$ величина

$$\frac{(\nu_n \ell_n)^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\ell_n + \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n \beta_{\delta,j} \sigma_j^2 \right)^{1/\delta} \leq \frac{(2\ell_n)^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}},$$

фигурирующая в оценке для Δ_n из леммы 2, является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем ℓ_n , при $\ell_n \rightarrow 0$, поэтому здесь достаточно воспользоваться оценкой (20) леммы 1 с $U = 0$, а при $\delta = 1$ эта величина имеет тот же порядок малости, что и ляпуновская дробь ℓ_n , и, как мы увидим ниже, вносит определяющий вклад в соответствующую константу, поэтому здесь требуется более тонкий метод, основанный на специальном выборе параметра U в лемме 1.

Итак, используя неравенство (20) с $U = 0$ для оценивания подынтегральной функции в I_{13} , получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Для любых $0 < \delta \leq 1$ и $\ell > 0$ при всех $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}$ таких, что $\ell_n \leq \ell$, справедливы оценки: в общем случае

$$\Delta_n \leq C_s(\delta) \cdot \ell_n + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\ell_n + \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n \beta_{\delta,j} \sigma_j^2 \right)^{1/\delta} + \tilde{C}_\delta(\ell \wedge \tilde{\ell}(\delta)) \cdot \ell_n^{4/(2+\delta)},$$

в случае $F_1 = \dots = F_n$

$$\Delta_n \leq C_s(\delta) \cdot \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} n^{\delta/2}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} + \frac{\beta_\delta}{\sigma^\delta} \right)^{1/\delta} + \hat{C}_\delta(\ell \wedge \hat{\ell}(\delta)) \cdot \ell_n^2,$$

а также для любого $\ell > 0$ и произвольной бесконечно малой последовательности неотрицательных чисел $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}: |\ell_n - \ell| \leq \theta_n} \Delta_n(F) \leq C_s(\delta) \cdot \ell + \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + C'_\delta(\ell \wedge \ell'(\delta)) \cdot \ell^2,$$

где

$$\begin{aligned} C_s(\delta) &= \frac{\varkappa_\delta 2^{\delta/2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right), \\ \tilde{C}_\delta(\ell) &= \frac{1}{4\pi} + \ell^{\frac{2-\delta(1-\delta)}{\delta(2+\delta)}} J_{12}(\ell, 2) + \inf \left\{ \ell^{\delta/(2+\delta)} J_{11}(\ell, 2, t_0) \right. \\ &\quad \left. + \ell^{\frac{2(2-\delta)}{\delta(2+\delta)}} \cdot \frac{2^{2/\delta}}{4\pi^2} \sup_{0 < \varepsilon \leq 2\ell} J(2\pi\varepsilon^{-1/\delta}, t_0): t_3(\delta) \leq t_0 \leq t_1(\delta) \wedge t_4(\delta, \ell) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_\delta(\ell) &= \frac{1}{4\pi} + \ell^{(1-\delta)/\delta} \widehat{J}_{12}(\ell, 2, \ell^{-2/\delta}) \\
&\quad + \inf \left\{ \ell^{2(1-\delta)/\delta} \cdot \frac{2^{2/\delta}}{4\pi^2} \sup_{0 < \varepsilon \leq 2\ell} J(2\pi\varepsilon^{-1/\delta}, t_0) \right. \\
&\quad \left. + \widehat{J}_{11}(\ell^{-2/\delta}, 2, t_0) : t_3(\delta) \leq t_0 \leq t_1(\delta) \wedge t_4(\delta, \ell^{1+2/\delta}) \right\}, \\
C'_\delta(\ell) &= \ell^{(1-\delta)/\delta} \cdot 2^{(\delta-1)/2} \pi^{-1} \varkappa_\delta \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right) \left(1 + \frac{(3+\delta)\ell^{2/\delta}}{72}\right) \\
&\quad + \inf_{t_3(\delta) \leq t_0 < t_1(\delta)} \left(1.0253 \frac{2^{3/2+\delta} \varkappa_\delta^2 \Gamma(5/2 + \delta)}{\pi(1 - 2\varkappa_\delta(2\pi t_0)^\delta)^{5/2+\delta}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\ell^{2(1-\delta)/\delta}}{4\pi^2} \sup_{0 < \varepsilon \leq \ell} J\left(\frac{2\pi}{\varepsilon^{1/\delta}}, t_0\right) \right),
\end{aligned}$$

$\bar{\ell}(\delta)$, $\widehat{\ell}(\delta)$, $\ell'(\delta)$ — соответственно единственные корни уравнений

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_\delta(\ell) \cdot \ell^{4/(2+\delta)} &= \kappa - C_s(\delta) \cdot \ell - \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}}, \quad 0 < \ell < \bar{\ell}(\delta), \\
\widehat{C}_\delta(\ell) \cdot \ell^2 &= \kappa - C_s(\delta) \cdot \ell - \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}}, \quad 0 < \ell < (\bar{\ell}(\delta))^{\delta/(2+\delta)}, \\
C'_\delta(\ell) \cdot \ell^2 &= \kappa - C_s(\delta) \cdot \ell - \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}}, \quad 0 < \ell < (2\sqrt{2\pi}\kappa)^\delta,
\end{aligned}$$

на указанных интервалах;

$$\kappa \equiv \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \sup_x |F(x) - \Phi(x)| = \sup_{b>0} \left(\frac{1}{1+b^2} - \Phi(-b) \right) = 0.54093\dots; \quad (22)$$

$\varkappa_\delta$, $t_1(\delta)$, $t_3(\delta)$, $t_4(\delta, \ell)$, $\bar{\ell}(\delta)$, $J_{11}(\ell, \nu, t_0)$, $\widehat{J}_{11}(n, \nu, t_0)$, $J_{12}(\ell, \nu)$, $\widehat{J}_{12}(\ell, \nu, n)$, $J(T, t_0)$, $T > 0$, определены в формулировке леммы 2. При этом функции $\widetilde{C}_\delta(\ell)$, $\widehat{C}_\delta(\ell)$, $C'_\delta(\ell)$ монотонно возрастают по $\ell > 0$ и имеют пределы

$$\begin{aligned}
\lim_{\ell \rightarrow 0} \widetilde{C}_\delta(\ell) &= \frac{1}{4\pi} = 0.0795\dots, \\
\lim_{\ell \rightarrow 0} \widehat{C}_\delta(\ell) &= \begin{cases} \frac{1.0253 \cdot 2^{5/2+\delta} \varkappa_\delta^2 \Gamma(5/2 + \delta)}{\pi(1 - 2\varkappa_\delta(2\pi t_3(\delta))^\delta)^{5/2+\delta}} + \frac{1}{4\pi}, & 0 < \delta < 1, \\ \frac{1.0253 \cdot 30\varkappa_1^2}{\sqrt{2\pi}(1 - (4/9)e^{-5/6})^{7/2}} + \frac{1}{4\pi} + \frac{2\varkappa_1}{\pi} = 0.3984\dots, & \delta = 1, \end{cases} \\
\lim_{\ell \rightarrow 0} C'_\delta(\ell) &= \begin{cases} \frac{1.0253 \cdot 2^{3/2+\delta} \varkappa_\delta^2 \Gamma(5/2 + \delta)}{\pi(1 - (4/((2+\delta)^2) \exp\{-\delta(4+\delta)/(2(2+\delta))\})^{5/2+\delta}}}, & 0 < \delta < 1, \\ \frac{1.0253 \cdot 15\varkappa_1^2}{\sqrt{2\pi}(1 - (4/9)e^{-5/6})^{7/2}} + \frac{\varkappa_1}{\pi} = 0.1594\dots, & \delta = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Таблица 3. Значения величины $C_s(\delta)$ из теоремы 1, мажорирующей асимптотически правильную константу $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s})$ (см. теорему 2), рядом — значения соответствующей миноранты нижней асимптотически правильной константы $\underline{C}_{\text{АП}} = \underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ (см. (23)) при некоторых $0 < \delta \leq 1$. По определению, $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq C_s(\delta)$ для всех $0 < \delta \leq 1$.

$\delta =$	$C_s(\delta) \leq$	$\underline{C}_{\text{АП}} \geq$	$\delta =$	$C_s(\delta) \leq$	$\underline{C}_{\text{АП}} \geq$	$\delta =$	$C_s(\delta) \leq$	$\underline{C}_{\text{АП}} \geq$
0+	0.1592	0.0883	0.35	0.0899	0.0422	0.70	0.0556	0.0253
0.05	0.1458	0.0759	0.40	0.0835	0.0390	0.75	0.0523	0.0237
0.10	0.1338	0.0674	0.45	0.0777	0.0361	0.80	0.0493	0.0223
0.15	0.1231	0.0606	0.50	0.0724	0.0334	0.85	0.0466	0.0210
0.20	0.1135	0.0550	0.55	0.0676	0.0311	0.90	0.0440	0.0198
0.25	0.1048	0.0501	0.60	0.0632	0.0290	0.95	0.0417	0.0187
0.30	0.0969	0.0459	0.65	0.0593	0.0271	1—	0.0396	0.0177

Таблица 4. Значения величин $\tilde{\ell}(\delta)$ и $\tilde{C}_\delta(\ell)$ из теоремы 1 для $\ell = \tilde{\ell}(\delta)$, $0.1 \wedge \tilde{\ell}(\delta)$, 0.01, 0.001, 0.0001 и некоторых $0 < \delta \leq 1$, в четвертом столбце даны значения $\tilde{C}_\delta(0.1 \wedge \tilde{\ell}(\delta))$. Оптимальные значения t_0 совпадают с $t_3(\delta)$ (см. таблицу 2).

δ	$\tilde{\ell}(\delta) \leq$	$\tilde{C}_\delta(\tilde{\ell}(\delta)) \leq$	$\tilde{C}_\delta(0.1) \leq$	$\tilde{C}_\delta(0.01) \leq$	$\tilde{C}_\delta(10^{-3}) \leq$	$\tilde{C}_\delta(10^{-4}) \leq$
0.05	0.0221	917.4399	917.4399	464.4418	271.8285	237.1443
0.10	0.0443	202.7972	202.7972	63.1985	40.5987	33.1663
0.15	0.0645	87.6344	87.6344	20.1941	12.6604	9.6746
0.20	0.0824	49.7489	49.7489	8.9906	5.3834	3.8780
0.25	0.0984	32.7615	32.7615	4.8021	2.7382	1.8782
0.30	0.1126	23.6774	18.8736	2.8870	1.5731	1.0392
0.35	0.1250	18.2312	11.9541	1.8896	0.9904	0.6377
0.40	0.1360	14.6909	8.2613	1.3204	0.6709	0.4264
0.45	0.1456	12.2476	6.0850	0.9725	0.4832	0.3067
0.50	0.1540	10.4817	4.7064	0.7484	0.3667	0.2348
0.55	0.1612	9.1584	3.7842	0.5977	0.2910	0.1896
0.60	0.1674	8.1375	3.1403	0.4928	0.2400	0.1599
0.65	0.1727	7.3308	2.6753	0.4177	0.2046	0.1399
0.70	0.1772	6.6814	2.3301	0.3626	0.1793	0.1259
0.75	0.1809	6.1501	2.0681	0.3213	0.1609	0.1159
0.80	0.1839	5.7099	1.8657	0.2900	0.1472	0.1086
0.85	0.1862	5.3412	1.7070	0.2658	0.1369	0.1032
0.90	0.1880	5.0296	1.5812	0.2468	0.1290	0.0992
0.95	0.1893	4.7638	1.4806	0.2319	0.1229	0.0961
1.00	0.1901	4.5354	1.3998	0.2201	0.1181	0.0937

Значения величин $C_s(\delta)$, $\widehat{\ell}(\delta)$, $\widehat{\ell}(\delta)$, $\ell'(\delta)$, $\widetilde{C}_\delta(\ell)$, $\widehat{C}_\delta(\ell)$, $C'_\delta(\ell)$, округленные в большую сторону с точностью до четвертого знака, при некоторых $0 < \delta \leq 1$ и $\ell \geq 0$ приведены в таблицах 3–6. Вычисления были произведены в среде Matlab R2011a.

Таблица 5. Значения величин $\widehat{\ell}(\delta)$ и $\widehat{C}_\delta(\ell)$ из теоремы 1 для $\ell = \widehat{\ell}(\delta)$, $0.1 \wedge \widehat{\ell}(\delta)$, 0.01 , 0.001 и $\ell \rightarrow 0+$ при некоторых $0 < \delta \leq 1$. В третьем столбце указаны оптимальные значения t_0 , доставляющие инфимум в выражении для $\widehat{C}_\delta(\widehat{\ell}(\delta))$, при других ℓ оптимальные значения t_0 совпадают с $t_3(\delta)$ (см. таблицу 2).

δ	$\widehat{\ell}(\delta) \leq$	$t_0 =$	$\widehat{C}_\delta(\widehat{\ell}(\delta)) \leq$	$\widehat{C}_\delta(0.1) \leq$	$\widehat{C}_\delta(0.01) \leq$	$\widehat{C}_\delta(10^{-3}) \leq$	$\widehat{C}_\delta(0+) \leq$
0.05	0.0485	0.1370	227.6095	227.6095	227.6095	227.6095	227.6095
0.10	0.1091	0.1386	44.2527	44.2527	44.2527	44.2527	44.2527
0.15	0.1734	0.1401	17.2919	17.2915	17.2915	17.2915	17.2915
0.20	0.2393	0.1416	8.9702	8.9624	8.9621	8.9621	8.9621
0.25	0.3049	0.1431	5.4583	5.4183	5.4172	5.4172	5.4172
0.30	0.3529	0.1444	4.0210	3.6113	3.6082	3.6082	3.6082
0.35	0.3748	0.1457	3.5257	2.5766	2.5702	2.5701	2.5701
0.40	0.3886	0.1469	3.2448	1.9348	1.9238	1.9235	1.9235
0.45	0.3978	0.1480	3.0615	1.5132	1.4965	1.4956	1.4955
0.50	0.4040	0.1524	2.9368	1.2246	1.2009	1.1990	1.1988
0.55	0.4081	0.1576	2.8492	1.0211	0.9893	0.9859	0.9853
0.60	0.4103	0.1608	2.7918	0.8748	0.8340	0.8286	0.8271
0.65	0.4109	0.1628	2.7592	0.7686	0.7178	0.7100	0.7069
0.70	0.4103	0.1640	2.7468	0.6914	0.6298	0.6195	0.6137
0.75	0.4085	0.1647	2.7514	0.6361	0.5627	0.5502	0.5402
0.80	0.4059	0.1651	2.7704	0.5977	0.5116	0.4974	0.4814
0.85	0.4025	0.1653	2.8020	0.5728	0.4730	0.4579	0.4337
0.90	0.3985	0.1653	2.8449	0.5591	0.4445	0.4294	0.3946
0.95	0.3940	0.1654	2.8981	0.5549	0.4245	0.4104	0.3623
1.00	0.3890	0.1654	2.9610	0.5593	0.4118	0.3998	0.3985

Поскольку $C_s(1) = \varkappa_1/\sqrt{2\pi}$, из теоремы 1 при $\delta = 1$ получаем следующие утверждения.

Следствие 1. Для всех $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$

$$\Delta_n \leq \frac{1 + 2\varkappa_1}{2\sqrt{2\pi}} \ell_n + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + 4.5354 \cdot \ell_n^{4/3}$$

в общем случае и

$$\Delta_n \leq \frac{1 + 2\varkappa_1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_1}{\sigma \sqrt{n}} + 2.9610 \cdot \ell_n^2$$

в случае $F_1 = \dots = F_n$.

Таблица 6. Значения величин $\ell'(\delta)$ и $C'_\delta(\ell)$ из теоремы 1 для $\ell = \ell'(\delta)$, $0.5 \wedge \ell'(\delta)$, $0.1 \wedge \ell'(\delta)$ и $\ell \rightarrow 0+$ при некоторых $0 < \delta \leq 1$. В третьем столбце указаны оптимальные значения t_0 , доставляющие инфимум в $C'_\delta(\ell'(\delta))$, при других ℓ оптимальные значения t_0 совпадают с $t_3(\delta)$ (см. таблицу 2).

δ	$\ell'(\delta)$	$t_0 =$	$C'_\delta(\ell'(\delta)) \leq$	$C'_\delta(0.5) \leq$	$C'_\delta(0.1) \leq$	$C'_\delta(0+) \leq$
0.05	0.0684	0.1370	113.7650	113.7650	113.7650	113.7650
0.10	0.1535	0.1386	22.0866	22.0866	22.0866	22.0866
0.15	0.2437	0.1401	8.6060	8.6060	8.6060	8.6060
0.20	0.3362	0.1416	4.4423	4.4423	4.4413	4.4413
0.25	0.4279	0.1431	2.6743	2.6743	2.6689	2.6688
0.30	0.5139	0.1444	1.7783	1.7775	1.7646	1.7643
0.35	0.5907	0.1457	1.2716	1.2625	1.2462	1.2453
0.40	0.6486	0.1469	0.9967	0.9428	0.9238	0.9220
0.45	0.6870	0.1480	0.8499	0.7325	0.7113	0.7080
0.50	0.7156	0.1490	0.7559	0.5886	0.5648	0.5596
0.55	0.7392	0.1500	0.6879	0.4877	0.4603	0.4529
0.60	0.7611	0.1616	0.6325	0.4160	0.3838	0.3738
0.65	0.7838	0.1735	0.5820	0.3650	0.3264	0.3137
0.70	0.8071	0.1842	0.5362	0.3289	0.2827	0.2671
0.75	0.8310	0.1939	0.4949	0.3037	0.2488	0.2303
0.80	0.8553	0.2025	0.4577	0.2845	0.2222	0.2009
0.85	0.8799	0.2102	0.4243	0.2679	0.2012	0.1771
0.90	0.9046	0.2171	0.3945	0.2534	0.1843	0.1575
0.95	0.9292	0.2232	0.3679	0.2408	0.1708	0.1414
1.00	0.9537	0.2286	0.3442	0.2299	0.1599	0.1595

Следствие 1 еще не уточняет неравенства Бенткуса (11) и Чистякова (13) при *всех* возможных значениях параметров $\beta_{1,j}$, σ_j^2 , $\beta_{3,j}$, однако если

$$\sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 \leq (1 - 2\kappa_1) \sum_{j=1}^n \beta_{3,j},$$

то оценки следствия 1 точнее, чем (11) и (13).

Следствие 2. Для любого $\ell > 0$ и произвольной бесконечно малой последовательности неотрицательных чисел $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3, s: |\ell_n - \ell| \leq \theta_n} \Delta_n(F) &\leq \frac{1 + 2\kappa_1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \ell + C'_1(\ell \wedge 0.9537) \cdot \ell^2 \\ &< 0.2391 \cdot \ell + 0.3442 \cdot \ell^2, \end{aligned}$$

где $C'_1(\ell)$ определена в формулировке теоремы 1. В частности, $C'_1(0.1) \leq 0.1599$, и при всех $0 < \ell \leq 0.1$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{3,s}: |\ell_n - \ell| \leq \theta_n} \Delta_n(F) \leq \frac{1 + 2\kappa_1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \ell + 0.1599 \cdot \ell^2$$

$$< \begin{cases} 0.2551 \cdot \ell, & \ell \leq 0.1, \\ 0.2407 \cdot \ell, & \ell \leq 0.01, \\ 0.2392 \cdot \ell, & \ell \leq 0.001, \\ 0.2391 \cdot \ell, & \ell \leq 0.0004. \end{cases}$$

Устремляя ℓ к 0, из теоремы 1 можно получить верхнюю оценку асимптотически правильной константы для симметричных распределений $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$, определенной в (4).

Теорема 2. Для всех $0 < \delta < 1$ справедлива оценка

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq C_s(\delta) = \frac{2^{\delta/2} \Gamma(1 + \delta/2)}{\pi} \sup_{x>0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^{2+\delta}}.$$

В частности,

$$\lim_{\delta \rightarrow 1-} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq \frac{\kappa_1}{\sqrt{2\pi}} < 0.0396,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq \frac{\kappa_0}{\pi} = \frac{1}{2\pi} < 0.1592.$$

Значения $C_s(\delta)$ для других $0 < \delta < 1$ приведены в таблице 3.

Для схемы суммирования о.р.с.в. теорема 2 была доказана в работе [2].

Нижняя оценка асимптотически правильной константы $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ для $0 < \delta < 1$ получена в работе [16] в терминах нижней асимптотически правильной константы $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ (которая определяется аналогично (14) с заменой $\mathcal{F}_3$ на $\mathcal{F}_{2+\delta,s}$) и имеет вид

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \geq \underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(9+\delta)/2} \Gamma((3+\delta)/2)}$$

$$\times \sup_{a \geq 0, b > 0} \frac{4/(\sqrt{1+b^2/2}) \exp\{-a^2/(2(2+b^2))\} + a^2 + b^2 - 4}{b^{2+\delta} e^{-a^2/(2b^2)} {}_1F_1((3+\delta)/2, 1/2, a^2/(2b^2))}, \quad (23)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — эйлерова гамма-функция, ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Значения миноранты в (23) при некоторых $0 < \delta < 1$ приведены в таблице 3 рядом со значениями соответствующей мажоранты $C_s(\delta) \geq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$.

Для $\delta = 1$ из теоремы 1 можно получить лишь оценку

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \leq \frac{1 + \kappa_1}{\sqrt{2\pi}} = 0.4385 \dots,$$

тогда как из (11), (13) вытекает, что на самом деле

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989 \dots$$

Для получения оценок с асимптотически правильной константой и их структурных уточнений при оценивании интеграла I_{13} используем неравенство (20) со специальным значением параметра U , которое выберем позже. Учитывая, что $\mathbf{E}|X_j|^4 \mathbf{1}(|X_j| \leq U) \leq U\beta_{3,j}$, $j = 1, \dots, n$, для любого $U \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} I_{13} &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \left(\frac{\kappa_1 t^2}{B_n^3} \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) + \frac{U\beta_{3,j} t^3}{24B_n^4} + \frac{\sigma_j^4 t^3}{8B_n^4} \right) e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{\kappa_1}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) + \frac{U\ell_n}{12\pi B_n} + \frac{1}{4\pi B_n^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} I_{13} + \frac{\nu_n \ell_n}{2\sqrt{2\pi}} &= I_{13} + \frac{\kappa_1}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \frac{1/2 - \kappa_1}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \frac{\ell_n}{2\sqrt{2\pi}} \\ &\leq \frac{I_{14}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1/2 - \kappa_1}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \frac{\ell_n}{2\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_{14} &= \frac{\kappa_1}{B_n^3} \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) + \beta_{1,j} \sigma_j^2 \right) + \frac{U\ell_n}{6\sqrt{2\pi}B_n} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}B_n^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4, \quad U \geq 0. \end{aligned}$$

Обозначим $Y_j = X_j \mathbf{1}(|X_j| \leq U)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $X_j^k = Y_j^k + X_j^k \mathbf{1}(|X_j| > U)$ почти наверное, $\mathbf{E}|Y_j|^k \leq \mathbf{E}|X_j|^k$, $k = 1, 2, 3$, и для всех $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \beta_{1,j} \sigma_j^2 &= \mathbf{E}|X_j| \mathbf{E}X_j^2 \leq \mathbf{E}|Y_j| \mathbf{E}Y_j^2 + \mathbf{E}|Y_j| \mathbf{E}X_j^2 \mathbf{1}(|X_j| > U) \\ &\quad + \mathbf{E}|X_j| \mathbf{1}(|X_j| > U) \mathbf{E}X_j^2 \\ &\leq \mathbf{E}|Y_j| \mathbf{E}Y_j^2 + U^{-1} (\mathbf{E}|Y_j|^3)^{1/3} \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) \\ &\quad + U^{-2} \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) (\mathbf{E}|X_j|^3)^{2/3} \\ &\leq \mathbf{E}|Y_j|^3 + \left(\frac{\beta_{3,j}^{1/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{2/3}}{U^2} \right) \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) \\ &\leq \mathbf{E}|Y_j|^3 + \frac{\beta_{3,j}^{4/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{5/3}}{U^2}, \end{aligned} \tag{24}$$

и, так как $\mathbf{E}|Y_j|^3 + \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) = \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| \leq U) + \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) = \beta_{3,j}$, имеем

$$\beta_{1,j} \sigma_j^2 + \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) \leq \beta_{3,j} + \frac{\beta_{3,j}^{4/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{5/3}}{U^2}.$$

Таким образом, для I_{14} при всех $U \geq 0$ получаем оценку $I_{14} \leq \kappa_1 \ell_n + R$, где

$$R = \frac{\kappa_1}{B_n^3} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\beta_{3,j}^{4/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{5/3}}{U^2} \right) + \frac{U \ell_n}{6\sqrt{2\pi} B_n} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi} B_n^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4.$$

С помощью неравенства

$$\sum_{j=1}^n \beta_{3,j}^r \leq \left(\sum_{j=1}^n \beta_{3,j} \right)^r = (B_n^3 \ell_n)^r, \quad r \geq 1, \quad (25)$$

доказанного в [30], и соотношений

$$\frac{1}{B_n^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4 = \frac{1}{n} \leq \frac{\ell_n^{4/3}}{n^{1/3}},$$

справедливых в случае о.р.с.в., для R получаем

$$R \leq \begin{cases} \frac{\kappa_1 B_n \ell_n^{4/3}}{U} + \frac{\kappa_1 B_n^2 \ell_n^{5/3}}{U^2} + \frac{U \ell_n}{6\sqrt{2\pi} B_n} + \frac{\ell_n^{4/3}}{2\sqrt{2\pi} B_n^4} & \text{в общем случае,} \\ \frac{\kappa_1 B_n \ell_n^{4/3}}{U n^{1/3}} + \frac{\kappa_1 B_n^2 \ell_n^{5/3}}{U^2 n^{2/3}} + \frac{U \ell_n}{6\sqrt{2\pi} B_n} + \frac{\ell_n^{4/3}}{2\sqrt{2\pi} n^{1/3}} & \text{в случае о.р.с.в.} \end{cases}$$

Выберем теперь значение параметра U , исходя из соображений уравнивания порядков «наихудших», т.е. первого и третьего, слагаемых в полученной оценке для R , а именно, положим $U = u B_n \ell_n^{1/6}$ в общем случае и $U = u B_n (\ell_n/n)^{1/6}$ в случае о.р.с.в., где $u > 0$ — свободный параметр. Тогда получим оценки

$$R \leq \begin{cases} \sqrt{2\pi} \ell_n^{7/6} J_{13}(\ell_n) & \text{в общем случае,} \\ \sqrt{2\pi} \ell_n^{7/6} n^{-1/6} J_{13}\left(\frac{\ell_n}{n}\right) & \text{в случае о.р.с.в.,} \end{cases}$$

где

$$J_{13}(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \inf_{u>0} \left(\frac{u}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{\kappa_1}{u} + \ell^{1/6} \left(\frac{\kappa_1}{u^2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \right) \right).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} I_{13} + \frac{\nu_n \ell_n}{2\sqrt{2\pi}} &\leq \frac{1/2 + \kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - \kappa_1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 \\ &\quad + \begin{cases} \ell_n^{7/6} J_{13}(\ell_n) & \text{в общем случае,} \\ \ell_n^{7/6} n^{-1/6} J_{13}\left(\frac{\ell_n}{n}\right) & \text{в случае о.р.с.в.} \end{cases} \end{aligned}$$

С помощью неравенства Ляпунова легко убедиться, что главная часть последней оценки не превосходит главных частей

$$\frac{1/2 + 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 \leq \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}}$$

оценок Бенткуса (10), (11) и Чистякова (13), однако порядок остаточного члена $O(\ell_n^{7/6})$ хуже, чем $O(\ell_n^{4/3})$ в оценках Бенткуса (10), (11). Этот недостаток можно исправить переносом «наихудших» слагаемых из остаточного члена в главную часть, если коэффициент при ℓ_n строго больше, чем $(1/2 + \kappa_1)/\sqrt{2\pi}$, и более аккуратной оценкой последнего. Проведем подробные рассуждения.

Как и выше, используя оценку (20) и учитывая, что $\mathbf{E}|X_j|^4 \mathbf{1}(|X_j| \leq U) \leq U\beta_{3,j}$, $j = 1, \dots, n$, для любого $U \geq 0$, при всех $c > 0$ получаем

$$\begin{aligned} I_{13} + \frac{\nu_n \ell_n}{2\sqrt{2\pi}} &\leq \frac{\kappa_1}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) + \frac{U\ell_n}{12\pi B_n} + \frac{1}{4\pi B_n^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4 \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \frac{\ell_n}{2\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{I'_{14}}{\sqrt{2\pi}} + R' + \frac{1/2 - \kappa_1 - c}{\sqrt{2\pi}B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \frac{\ell_n}{2\sqrt{2\pi}}, \\ I'_{14} &= \frac{1}{B_n^3} \sum_{j=1}^n \left(\kappa_1 \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) + (\kappa_1 + c)\beta_{1,j} \sigma_j^2 \right), \\ R' &= \frac{U\ell_n}{12\pi B_n} + \frac{1}{4\pi B_n^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4. \end{aligned}$$

Величины $\beta_{1,j}\sigma_j^2$ оценим при каждом $j = 1, \dots, n$ с помощью предпоследней, более тонкой, оценки в цепочке неравенств (24). Имеем

$$\begin{aligned} &\kappa_1 \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) + (\kappa_1 + c)\beta_{1,j} \sigma_j^2 \\ &\leq \kappa_1 \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) + (\kappa_1 + c) \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| \leq U) \\ &\quad + (\kappa_1 + c) \left(\frac{\beta_{3,j}^{1/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{2/3}}{U^2} \right) \mathbf{E}|X_j|^3 \mathbf{1}(|X_j| > U) \\ &\leq \beta_{3,j} \max \left\{ \kappa_1 + (\kappa_1 + c) \left(\frac{\beta_{3,j}^{1/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{2/3}}{U^2} \right), \kappa_1 + c \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$I'_{14} \leq \ell_n \left(\kappa_1 + \max \left\{ c, (\kappa_1 + c) \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\beta_{3,j}^{1/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{2/3}}{U^2} \right) \right\} \right).$$

Выбирая теперь $U = uB_n\ell_n^{1/3}$ в общем случае и $U = uB_n(\ell_n/n)^{1/3}$ в случае о.р.с.в., где $u > 0$ — свободный параметр, получаем

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\beta_{3,j}^{1/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{2/3}}{U^2} \right) \leq \begin{cases} \frac{B_n}{U} \ell_n^{1/3} + \frac{B_n^2}{U^2} \ell_n^{2/3} = u^{-1} + u^{-2} & \text{в общем случае} \\ \frac{B_n}{U} \left(\frac{\ell_n}{n} \right)^{1/3} + \frac{B_n^2}{U^2} \left(\frac{\ell_n}{n} \right)^{2/3} = u^{-1} + u^{-2} & \text{в случае о.р.с.в.,} \end{cases}$$

$\max \left\{ c, (\varkappa_1 + c) \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\beta_{3,j}^{1/3}}{U} + \frac{\beta_{3,j}^{2/3}}{U^2} \right) \right\} \leq \max \{ c, (\varkappa_1 + c)(u^{-1} + u^{-2}) \} = c$,
если

$$u = \frac{\varkappa_1 + c}{2c} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4c}{\varkappa_1 + c}} \right).$$

Таким образом, заключаем, что для указанного u и для любого $c > 0$ справедливы оценки: $I'_{14} \leq (\varkappa_1 + c) \cdot \ell_n$,

$$R' \leq R_n(\ell_n, u) \equiv \begin{cases} \frac{U\ell_n}{12\pi B_n} + \frac{\ell_n^{4/3}}{4\pi} = \frac{u+3}{12\pi} \ell_n^{4/3} & \text{в общем случае} \\ \frac{U\ell_n}{12\pi B_n} + \frac{\ell_n^{4/3}}{4\pi n^{1/3}} = \frac{u+3}{12\pi} \cdot \frac{\ell_n^{4/3}}{n^{1/3}} & \text{в случае о.р.с.в.,} \end{cases}$$

$$I_{13} + \frac{\nu_n \ell_n}{2\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1/2 + \varkappa_1 + c}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa_1 - c}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + R_n(\ell_n, u).$$

Теперь, замечая, что для любого $c \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1/2 + \varkappa_1 + c}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa_1 - c}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 \\ & \geq \begin{cases} \frac{1/2 + \varkappa_1 + c}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n, & 0 \leq c \leq \frac{1}{2} - \varkappa_1, \\ \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}}, & c > \frac{1}{2} - \varkappa_1, \end{cases} \end{aligned}$$

и дополнительно используя в случае о.р.с.в. оценку $n \geq \ell_n^{-2}$, а также свойство монотонного убывания оценок остаточных членов R и R' по n , с помощью леммы 2 приходим к следующим двум теоремам.

Теорема 3. Для любого $\ell > 0$ при всех $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$ таких, что $\ell_n \leq \ell$, справедливы оценки:

$$\Delta_n \leq \frac{1/2 + \varkappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa_1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \tilde{C}(\tilde{\ell} \wedge \ell) \cdot \ell_n^{7/6},$$

в общем случае и

$$\Delta_n \leq \frac{1/2 + \kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} + \frac{1/2 - \kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_1}{\sigma \sqrt{n}} + \widehat{C}(\widehat{\ell} \wedge \ell) \cdot \ell_n^{3/2}$$

в случае $F_1 = \dots = F_n$, где

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\ell) &= J_{13}(\ell) + \ell^{5/6} J_{12}(\ell, 2) \\ &\quad + \min_{t_3 \leq t_0 \leq t_1 \wedge t_4(\ell)} \left\{ \ell^{1/2} J_{11}(\ell, 2, t_0) + \ell^{5/6} \pi^{-2} \max_{T \geq \pi/\ell} J(T, t_0) \right\}; \\ \widehat{C}(\ell) &= J_{13}(\ell^3) + \ell^{1/2} \left(\widehat{J}_{12}(\ell, 2, \ell^{-2}) \right. \\ &\quad \left. + \min_{t_3 \leq t_0 \leq t_1 \wedge t_4(\ell^3)} \left\{ \widehat{J}_{11}(\ell^{-2}, 2, t_0) + \pi^{-2} \max_{T \geq \pi/\ell} J(T, t_0) \right\} \right); \end{aligned}$$

$\widetilde{\ell} = 0.188360325\dots$, $\widehat{\ell} = 0.382956\dots$ — соответственно единственные корни уравнений

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\ell) \cdot \ell^{7/6} &= \kappa - \frac{1/2 + \kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell, \\ 0 < \ell < \bar{\ell} &= \left(1 - \frac{4}{9} e^{-5/6} \right)^{3/2} = 0.7247\dots, \\ \widehat{C}(\ell) \cdot \ell^{3/2} &= \kappa - \frac{1/2 + \kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell, \\ 0 < \ell < (\bar{\ell})^{1/3} &= \sqrt{1 - \frac{4}{9} e^{-5/6}} = 0.8982\dots, \end{aligned}$$

на указанных интервалах; $\kappa = 0.5409\dots$ определена в (22);

$$\begin{aligned} J_{13}(\ell) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \inf_{u > 0} \left(\frac{u}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{\kappa_1}{u} + \ell^{1/6} \left(\frac{\kappa_1}{u^2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \right) \right), \\ t_3 = \frac{e^{-5/6}}{9\pi\kappa_1} &= 0.1550\dots, \quad t_1 = \frac{\theta_0(1)}{2\pi} = 0.6359\dots, \quad t_4(\ell) = \frac{1 - \ell^{2/3}}{4\pi\kappa_1}, \end{aligned}$$

$J_{11}(\ell, \nu, t_0)$, $J_{12}(\ell, \nu)$, $\widehat{J}_{11}(n, \nu, t_0)$, $\widehat{J}_{12}(\ell, \nu, n)$, $J(T, t_0)$, $\theta_0(1)$ определены в формулировке леммы 2; $\kappa_1 = 0.0991\dots$ определена в (21). В частности,

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\widetilde{\ell}) &\leq 3.4418 \quad (\text{при } t_0 = t_3 = 0.1550\dots, u = 1.6831\dots), \\ \widehat{C}(\widehat{\ell}) &\leq 1.8528 \quad (\text{при } t_0 = 0.1668\dots, u = 1.6216\dots), \\ \widetilde{C}(0+) &= \widehat{C}(0+) = \frac{\sqrt{6\kappa_1}}{3(2\pi)^{3/4}} = 0.0647\dots \\ &(\text{при } t_0 = t_3, u = \sqrt{6\kappa_1\sqrt{2\pi}} = 1.2212\dots). \end{aligned}$$

Значения величин $\widetilde{C}(\ell)$, $\widehat{C}(\ell)$ при других ℓ указаны в таблице 7.

Таблица 7. Значения величин $\tilde{C}(\ell)$, $\hat{C}(\ell)$ при некоторых ℓ из теоремы 3. Оптимальные значения t_0 совпадают с $t_3 = 0.1550\dots$.

ℓ	0.1	0.01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-7}	10^{-19}
$\tilde{u}(\ell) =$	1.6501	1.5451	1.4617	1.3969	1.2843	1.2216
$\hat{u}(\ell) =$	1.4617	1.3110	1.2516	1.2310	1.2215	1.2212
$\tilde{C}(\ell) \leq$	1.0314	0.1765	0.1091	0.0900	0.0721	0.0649
$\hat{C}(\ell) \leq$	0.2486	0.1085	0.0783	0.0691	0.0650	0.0648

Теорема 4. Для любого $\ell > 0$ при всех $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$ таких, что $\ell_n \leq \ell$ справедливы оценки

$$\Delta_n \leq \inf_{c>0} \left\{ \frac{1/2 + \varkappa_1 + c}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa_1 - c}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + \tilde{A}_c(\ell \wedge \tilde{\ell}_c) \cdot \ell_n^{4/3} \right\}$$

в общем случае и

$$\Delta_n \leq \inf_{c>0} \left\{ \frac{1/2 + \varkappa_1 + c}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa_1 - c}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_1}{\sigma \sqrt{n}} + \hat{A}_c(\ell \wedge \hat{\ell}_c) \cdot \ell_n^2 \right\}$$

в случае $F_1 = \dots = F_n$, где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_c(\ell) &= \frac{3 + u_c}{12\pi} + \tilde{C}_1(\ell) \cdot \ell^{1/3}, \quad \hat{A}_c(\ell) = \frac{3 + u_c}{12\pi} + \hat{C}_1(\ell), \\ u_c &= \frac{\varkappa_1 + c}{2c} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4c}{\varkappa_1 + c}} \right), \end{aligned}$$

$\tilde{C}_1(\ell)$, $\hat{C}_1(\ell)$ определены в формулировке теоремы 1; $\tilde{\ell}_c$, $\hat{\ell}_c$ — соответственно единственные корни уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{A}_c(\ell) \cdot \ell^{4/3} &= \kappa - \frac{1 - (1/2 - \varkappa_1 - c)^+}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell, \\ 0 < \ell < \bar{\ell} &= \left(1 - \frac{4}{9} e^{-5/6} \right)^{3/2} = 0.7247\dots, \\ \hat{A}_c(\ell) \cdot \ell^2 &= \kappa - \frac{1 - (1/2 - \varkappa_1 - c)^+}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell, \\ 0 < \ell < (\bar{\ell})^{1/3} &= \sqrt{1 - \frac{4}{9} e^{-5/6}} = 0.8982\dots, \end{aligned}$$

на указанных интервалах, $x^+ \equiv \max\{x, 0\}$, $x \in \mathbf{R}$; $\kappa = 0.5409\dots$ определена в (22). Функции $\tilde{A}_c(\ell)$, $\hat{A}_c(\ell)$ монотонно возрастают по $\ell > 0$ и

монотонно убывают по c , при этом

$$\begin{aligned}\liminf_{c \rightarrow 0} \tilde{A}_c(\ell) &= \liminf_{c \rightarrow 0} \hat{A}_c(\ell) = +\infty, \\ \lim_{\ell \rightarrow 0} \tilde{A}_c(\ell) &= \frac{3+u_c}{12\pi} \rightarrow \frac{7+\sqrt{5}}{24\pi} = 0.1224\dots, \quad c \rightarrow \infty, \\ \lim_{\ell \rightarrow 0} \hat{A}_c(\ell) - \frac{3+u_c}{12\pi} &= \hat{C}_1(0) = \frac{1.0253 \cdot 30\kappa_1^2}{\sqrt{2\pi}(1-(4/9)e^{-5/6})^{7/2}} + \frac{1}{4\pi} + \frac{2\kappa_1}{\pi} \\ &= 0.3984\dots\end{aligned}$$

Значения $\tilde{A}_c(\ell)$, $\hat{A}_c(\ell)$ при некоторых ℓ и c приведены в таблице 8.

Таблица 8. Верхние оценки коэффициентов $K_1(c) = (1/2 + \kappa_1 + c)/\sqrt{2\pi}$ при ляпуновской дроби, $K_2(c) = (1/2 - \kappa_1 - c)/\sqrt{2\pi}$ при $B_n^{-3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2$ в теореме 4, а также величин u_c , $\tilde{\ell}_c$, $\tilde{A}_c(\ell)$, $\hat{\ell}_c$, $\hat{A}_c(\ell)$ при некоторых c и ℓ .

c	0.001	0.01	0.05	κ_1	$0.5 - \kappa_1$	∞
$K_1(c)$	0.2395	0.2431	0.2590	0.2786	0.3990	∞
$K_2(c)$	0.1596	0.1560	0.1400	0.1204	0	$-\infty$
u_c	60.0891	8.7621	3.2189	2.4143	1.7406	1.6181
$\tilde{\ell}_c$	0.1937	0.2122	0.2138	0.2137	0.2112	0.2113
$\tilde{A}_c(\tilde{\ell}_c)$	4.4160	3.8672	3.7993	3.7703	3.6319	3.6307
$\tilde{A}_c(0.1)$	2.3233	0.9618	0.8147	0.7934	0.7755	0.7723
$\tilde{A}_c(0.01)$	1.7210	0.3595	0.2124	0.1911	0.1732	0.1700
$\tilde{A}_c(10^{-3})$	1.6853	0.3239	0.1768	0.1555	0.1376	0.1344
$\tilde{A}_c(0+)$	1.6735	0.3120	0.1650	0.1437	0.1258	0.1225
$\hat{\ell}_c$	0.3406	0.3791	0.3823	0.3814	0.3721	0.3722
$\hat{A}_c(\hat{\ell}_c)$	3.9618	3.1240	3.0246	2.9895	2.8361	2.8343
$\hat{A}_c(0.07)$	2.1777	0.8162	0.6692	0.6478	0.6300	0.6267
$\hat{A}_c(0.05)$	2.1447	0.7832	0.6361	0.6148	0.5969	0.5937
$\hat{A}_c(0.03)$	2.1141	0.7526	0.6055	0.5842	0.5663	0.5631
$\hat{A}_c(0.01)$	2.0853	0.7238	0.5768	0.5554	0.5376	0.5343
$\hat{A}_c(10^{-3})$	2.0733	0.7118	0.5648	0.5434	0.5256	0.5223
$\hat{A}_c(0+)$	2.0720	0.7105	0.5635	0.5421	0.5242	0.5210

З а м е ч а н и е 1. Оценки, приведенные в теоремах 3 и 4, оптимальны в том смысле, что ни при каком $c \geq 0$ коэффициент $(1/2 - \kappa_1 - c)/\sqrt{2\pi}$ во втором слагаемом не может быть уменьшен. Действительно, как несложно убедиться, значение указанного коэффициента не может быть меньше, чем

$$K_c \equiv \sup_{X \in \mathcal{F}_{3,s}: \mathbf{E} X^2=1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \Delta_n(F_X) - (1/2 + \kappa_1 + c) \mathbf{E} |X|^3}{\sqrt{2\pi} \mathbf{E} |X|},$$

где F_X — ф.р. с.в. X . Обозначим $\mathcal{F}_{3,s}^h$ множество всех решетчатых ф.р. из $\mathcal{F}_{3,s}$ с максимальным шагом $h > 0$. Как показано в [24], $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Delta_n(F) = h/(2\sqrt{2\pi})$ для любой ф.р. $F \in \mathcal{F}_{3,s}^h$. Учитывая этот факт, заключаем, что

$$K_c = \sup_{h>0, X \in \mathcal{F}_{3,s}^h: \mathbf{E} X^2=1} \frac{h/2 - (1/2 + \kappa_1 + c) \mathbf{E} |X|^3}{\sqrt{2\pi} \mathbf{E} |X|}.$$

Выбирая теперь с.в. X с симметричным распределением Бернулли: $\mathbf{P}(X = \pm 1) = 1/2$, и замечая, что в этом случае $h = 2$, $\mathbf{E} |X|^3 = \mathbf{E} X^2 = \mathbf{E} |X| = 1$, получаем требуемое:

$$K_c \geq \frac{1 - (1/2 + \kappa_1 + c)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1/2 - \kappa_1 - c}{\sqrt{2\pi}}.$$

Из теоремы 4 при разных c вытекает несколько следствий. Например, при $c = \kappa_1$ получаем следующее утверждение.

Следствие 3. Для всех $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$ справедливы оценки

$$\Delta_n \leq \frac{1/2 + 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2 + 3.7703 \cdot \ell_n^{4/3}$$

в общем случае и

$$\Delta_n \leq \frac{1/2 + 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell_n + \frac{1/2 - 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_1}{\sigma \sqrt{n}} + 2.9895 \cdot \ell_n^2$$

в случае $F_1 = \dots = F_n$.

Данное следствие улучшает неравенство Бенткуса (10) в отношении остаточного члена: уточнен порядок для о.р.с.в., указаны значения констант.

При $c = 1/2 - \kappa_1 = 0.4008 \dots$ получаем следующее утверждение.

Следствие 4. Для всех $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 3.6319 \cdot \ell_n^{4/3} \quad \text{при любых } \ell_n, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.2530 \cdot \ell_n^{4/3} < 0.4776 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 0.03, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.1732 \cdot \ell_n^{4/3} < 0.4363 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 0.01, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.1376 \cdot \ell_n^{4/3} < 0.4128 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 10^{-3}, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.1258 \cdot \ell_n^{4/3} < 0.3990 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 10^{-11}, \end{aligned}$$

в общем случае и

$$\begin{aligned}\Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 2.8361 \cdot \ell_n^2 \quad \text{при любых } \ell_n, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.6300 \cdot \ell_n^2 < 0.4431 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 0.07, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.5663 \cdot \ell_n^2 < 0.4160 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 0.03, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.5376 \cdot \ell_n^2 < 0.4044 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 0.01, \\ \Delta_n &\leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \cdot \ell_n + 0.5244 \cdot \ell_n^2 < 0.3990 \cdot \ell_n, \quad \ell_n \leq 10^{-4},\end{aligned}$$

в случае $F_1 = \dots = F_n$, где

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989 \dots$$

Следствие 4 уточняет неравенства Бенткуса (11) и Чистякова (13) в отношении остаточного члена: уточнен порядок для о.р.с.в. (по сравнению с неравенством Чистякова — и для разнораспределенных с.в.), указаны значения констант. Сравнивая же главные члены оценок Чистякова (13)

$$\psi_1(F_1, \dots, F_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{3,j},$$

Бенткуса (10)

$$\psi_2(F_1, \dots, F_n) = \frac{1/2 + 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{3,j} + \frac{1/2 - 2\kappa_1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \sigma_j^3$$

и оценок из теоремы 3

$$\psi_3(F_1, \dots, F_n) = \frac{1/2 + \kappa_1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{3,j} + \frac{1/2 - \kappa_1}{\sqrt{2\pi} B_n^3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j} \sigma_j^2,$$

замечаем, что их значения совпадают тогда и только тогда, когда $\beta_{1,j} \sigma_j^2 = \sigma_j^3 = \beta_{3,j}$ для всех $j = 1, \dots, n$; если же найдется j , при котором хотя бы одно из указанных равенств не выполняется, то имеют место строгие неравенства $\psi_3 < \psi_2 < \psi_1$, т.е. оценки из теоремы 3 точнее.

И наконец, заметим, что если случайные слагаемые $X_1, \dots, X_n$ имеют симметричные распределения Бернулли (т.е. если $\beta_{3,j} = \beta_{1,j} \sigma_j^2$ для всех $j = 1, \dots, n$), то в теореме 4 можно устремить s к ∞ и получить следующие оценки.

Следствие 5. Для любых $n \geq 1$ и $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$ таких, что $\beta_{3,j} = \beta_{1,j} \sigma_j^2$ при всех $j = 1, \dots, n$, справедлива оценка

$$\Delta_n \leq \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}} + 3.6307 \cdot \ell_n^{4/3}.$$

Если $F_1 = \dots = F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$ и $\mathbf{E}|X_1|^3 = \mathbf{E}|X_1| \mathbf{E}X_1^2$, то для всех $n \geq 1$

$$\Delta_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{2.8343}{n} = \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}} + 2.8343 \cdot \ell_n^2.$$

Следствие 5 несколько слабее аналогичной оценки для симметричных бернуллиевских слагаемых, полученной в [32] (см. (18)), в которой константы 3.6307 и 2.8343 в остаточном члене снижены до 3.4106 и 2.5475 соответственно. Но это замечание касается лишь абсолютных оценок, т.е. оценок для распределений с произвольным значением ляпуновской дроби ℓ_n . Если же, например, распределения слагаемых таковы, что $\ell_n \leq 0.01$, то константы в остаточных членах следствия 5 уменьшаются до 0.1700 и 0.5343, тогда как в [32] — всего лишь до 0.2880 и 0.6922 соответственно.

3. Нижние оценки. Нижние оценки нижней асимптотически правильной константы $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ для $0 < \delta < 1$ были найдены в [16] (см. (23) и таблицу 3), для случая же $\delta = 1$ они устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 5. Для нижней асимптотически правильной константы

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{3,s}: \ell_n = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{\ell}$$

имеет место нижняя оценка

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = 0.1994\dots$$

Доказательство. Предлагаемый метод повторяет основные идеи доказательства теоремы 3 работы [16], устанавливающей миноранту верхней асимптотически правильной константы.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots$ с симметричным распределением $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = p \in (0, 1/2]$, $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - 2p$. Имеем

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \sigma^2 = \beta_3 = 2p, \quad \ell_n = \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2np}}.$$

Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. В силу симметрии $2\mathbf{P}(S_n < 0) + \mathbf{P}(S_n = 0) = 1$, следовательно, $\mathbf{P}(S_n < 0) = (1 - \mathbf{P}(S_n = 0))/2$, откуда при четных n для рассматриваемой функции распределения $F(x) = \mathbf{P}(X_1 < x)$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta_n(F) &\geq \Phi(0) - \mathbf{P}(S_n < 0) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(S_n = 0) \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2p)^n \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{(n-2k)! (k!)^2} \left(\frac{p}{1-2p} \right)^{2k}. \end{aligned}$$

Из условия $\ell_n = \ell$ находим, что $p = 1/(2n\ell^2)$, $n \geq \ell^{-2}$. Таким образом, для нижней асимптотически правильной константы получаем оценку

$$\begin{aligned} \underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) &\geq \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\ell} \left(1 - \frac{1}{n\ell^2}\right)^n \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{(n-2k)!(k!)^2} \left(\frac{1/2}{n\ell^2 - 1}\right)^{2k} \\ &= \limsup_{\ell \rightarrow 0} \frac{e^{-1/\ell^2}}{2\ell} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n}(\ell), \end{aligned}$$

где

$$u_{k,n}(\ell) = \frac{n!}{(n-2k)!(k!)^2} \left(\frac{1/2}{n\ell^2 - 1}\right)^{2k},$$

а верхний предел при $n \rightarrow \infty$ берется по четным n .

Заметим, что для любых фиксированных k и ℓ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}(\ell) = (k!)^{-2}(2\ell^2)^{-2k} \equiv u_k(\ell)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\ell^2)^{-2k}}{(k!)^2} \equiv I_0(\ell^{-2}),$$

(символом $I_0(\cdot)$ обозначена модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, см., например, [1]). Зафиксируем произвольное $\ell > 0$ и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех четных $n \geq N$ выполняется неравенство $\sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n}(\ell) \geq I_0(\ell^{-2}) - \varepsilon$. Поскольку ℓ фиксировано, аргумент у функций $u_k(\ell)$ и $u_{k,n}(\ell)$ будем для краткости опускать.

Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится (к $I_0(\ell^{-2})$), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такой, что $\left| \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq n_1$, а следовательно, $\sum_{k=0}^{n_1} u_k > I_0(\ell^{-2}) - \varepsilon/2$. С другой стороны, поскольку $u_{k,n} \rightarrow u_k$ при $n \rightarrow \infty$, найдется номер $n_2 = n_2(\varepsilon, n_1)$ такой, что $|u_{k,n} - u_k| < \varepsilon/[2(n_1 + 1)]$ для всех $n \geq n_2$. Следовательно, при всех четных $n \geq N \equiv \max\{2n_1, n_2\}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n} &\geq \sum_{k=0}^{n_1} u_{k,n} \geq \sum_{k=0}^{n_1} u_k - \sum_{k=0}^{n_1} |u_{k,n} - u_k| \\ &> I_0(\ell^{-2}) - \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{k=0}^{n_1} \frac{\varepsilon}{2(n_1 + 1)} = I_0(\ell^{-2}) - \varepsilon \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$, откуда вытекает, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n}(\ell) \geq I_0(\ell^{-2})$ для любого $\ell > 0$. Используя асимптотические свойства модифицированной функции Бесселя (см., например, [1]), теперь уже несложно заключить, что

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \geq \limsup_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{2\ell} e^{-1/\ell^2} I_0(\ell^{-2}) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{I_0(z) e^{-z}}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}},$$

что и требовалось доказать. Теорема 5 доказана.

Из теорем 3 и 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. Для нижней асимптотически правильной константы $\underline{C}_{АП}(\mathcal{F}_{3,s})$ справедлива двусторонняя оценка

$$0.1994\dots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \leq \underline{C}_{АП}(\mathcal{F}_{3,s}) \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{\varkappa_1}{\sqrt{2\pi}} = 0.2390\dots$$

К сожалению, вопрос о точном значении нижней асимптотически правильной константы $\underline{C}_{АП}(\mathcal{F}_{3,s})$, а следовательно, и о наименьшем возможном значении коэффициента при ляпуновской дроби в оценках с уточненной структурой типа (10), (19) на данный момент остается открытым.

В заключение автор выражает свою искреннюю признательность В. Ю. Королеву за плодотворные дискуссии и постоянное внимание к работе, а также Г. П. Чистякову за библиографическую помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 832 с.
2. Гапонова М. О., Шевцова И. Г. Асимптотические оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для распределений, не имеющих третьего момента. — Информ. и ее примен., 2009, т. 3, в. 4, с. 41–56.
3. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, 264 с.
4. Григорьева М. Е., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена. — Информ. и ее примен., 2010, т. 4, в. 2, с. 78–85.
5. Золотарев В. М. Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
6. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестн. Моск. ун-та, 1953, т. 10, с. 29–38.
7. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 6, с. 738–742.
8. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 671–695.
9. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Новая моментная оценка скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 3, с. 577–582.
10. Ляпунов А. М. Об одной теореме теории вероятностей. — Изв. Акад. наук, V сер., 1900, т. 13, в. 4, с. 359–386.
11. Ляпунов А. М. Новая форма теоремы о пределе вероятности. — Записки Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII сер., 1901, т. 12, № 5, с. 1–24.
12. Тюрин И. С. Уточнение остаточного члена в теореме Ляпунова. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 4, с. 808–811.
13. Чистяков Г. П. Асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 1996, т. 228, с. 349–355.
14. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I, II, III. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344; т. 46, вып. 3, с. 573–579; 2002, т. 47, в. 3, с. 475–497.

15. Шевцова И. Г. Нижняя асимптотически правильная постоянная в центральной предельной теореме. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 4, с. 466–469.
16. Шевцова И. Г. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 2, с. 271–304.
17. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин. — Докл. РАН, 2012, т. 443, № 5, с. 555–560.
18. Bentkus V. On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality. Preprint № 91-078, Universität Bielefeld, 1991.
19. Bentkus V. On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
20. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–139.
21. Cramér H. Das Gesetz von Gauss und die Theorie des Risikos. — Skand. Aktuarietidskr., 1923, v. 6, p. 209–237.
22. Cramér H. On the composition of elementary errors. — Skand. Aktuarietidskr., 1928, v. 11, p. 141–180.
23. Esseen C.-G. On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
24. Esseen C.-G. Determination of the maximum deviation from the Gaussian law. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1943, v. A29, № 20, p. 1–10.
25. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, № 1, p. 1–125.
26. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
27. Hipp Ch., Mattner L. On the normal approximation to symmetric binomial distributions. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 610–617.
28. Korolev V., Shevtsova I. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. — Scand. Actuarial J., 2012, v. 2012, № 2, p. 81–105.
29. Prawitz H. Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. — Skand. Aktuarietidskr., 1972, p. 138–154.
30. Prawitz H. On the remainder in the central limit theorem. I. One-dimensional independent variables with finite absolute moments of third order. — Scand. Actuarial J., 1975, № 3, p. 145–156.
31. Shevtsova I. On the absolute constants in the Berry–Esseen type inequalities for identically distributed summands. — arXiv:1111.6554v1 [math.PR], 2011.
32. Shevtsova I. Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation. — Ann. Math. Inform., 2012, v. 39, p. 241–307.
33. Tysiak W. Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen-Abschätzungen. Dissertation, Wuppertal, 1983.
34. Zahl S. Bounds for the central limit theorem error. Ph.D. Thesis. Cambridge: Harvard University, 1963.
35. Zahl S. Bounds for the central limit theorem error. — SIAM J. Appl. Math., 1966, v. 14, № 6, p. 1225–1245.

Поступила в редакцию
14.III.2012