Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Алиев, К задаче об обнаружении разладки самовозбуждающегося процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 588–597

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:01:24

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2012 г.

АЛИЕВ А. Ф.*

К ЗАДАЧЕ ОБ ОБНАРУЖЕНИИ РАЗЛАДКИ САМОВОЗБУЖДАЮЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА

В задачах о разладке наблюдаемый процесс претерпевает изменение своих свойств (по распределению) в момент времени θ . Скрытый от наблюдателя момент разладки традиционно либо детерминирован, либо имеет некоторое (заранее известное) распределение, но при этом не зависит от наблюдаемого процесса. Задача состоит в выборе, в рамках последовательного наблюдения над процессом $(X_t)_{t \geq 0}$, марковского момента остановки τ (момента «подачи тревоги»), минимизирующего некоторую заранее заданную функцию риска. Мы изучаем класс задач, в которых присутствует зависимость между θ и наблюдаемым процессом, и предлагаем описание оптимальных стратегий подачи тревоги для наблюдателя в этом случае.

В первой части работы мы даем общее описание модели и достаточных статистик для принятия решений о подаче тревоги как в дискретном, так и в непрерывном случае. Затем мы рассматриваем конкретный пример с самовозбуждением и, перейдя для него к задаче оптимальной остановки двумерного марковского процесса, с помощью численных методов приближенно находим оптимальную стратегию.

Ключевые слова и фразы: оптимальная остановка, разладка, самовозбуждающийся процесс.

1. Дискретный случай. Мы хотим описать общую задачу разладки дискретного случайного процесса $(X_n)_{n \geq 0}$ в случае перехода в случайный момент времени от меры $\mathbf{P}^\infty$ на сигма-алгебре $\mathcal{F}$ к мере $\mathbf{P}^0$. Наше изложение будет следовать работе [6], где такое описание дается для момента разладки независимого от реализации процесса. Обозначая $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n) \subseteq \mathcal{F}$, мы будем считать в дальнейшем, что меры $\mathbf{P}^\infty, \mathbf{P}^0$ абсолютно непрерывны относительно третьей меры $\mathbf{P}$ (без ограничения общности можно положить $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^\infty + \mathbf{P}^0)/2$). Обозначим $\mathbf{P}_n^0 = \mathbf{P}^0 | \mathcal{F}_n$, $\mathbf{P}_n^\infty = \mathbf{P}^\infty | \mathcal{F}_n$, $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} | \mathcal{F}_n$ и

$$L_n^0 = \frac{d\mathbf{P}_n^0}{d\mathbf{P}_n}, \quad L_n^\infty = \frac{d\mathbf{P}_n^\infty}{d\mathbf{P}_n}, \quad M_n^0 = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta L_k^0}{L_{k-1}^0}, \quad M_n^\infty = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta L_k^\infty}{L_{k-1}^\infty}.$$

Введя стохастическую экспоненту $\mathcal{E}(M)_n = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta M_k)$, мы можем вывести формулы $L_n^0 = \mathcal{E}(M^0)_n$ и $L_n^\infty = \mathcal{E}(M^\infty)_n$. Также введем

$$M_n^k = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta M_i^\infty + \sum_{i=k}^n \Delta M_i^0, \quad d\mathbf{P}_n^k = \mathcal{E}(M^k)_n d\mathbf{P}_n.$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: amiraliiev@gmail.com

Меры $\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^\infty, \mathbf{P}$ заданы на $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathcal{F})$. Для описания момента разладки нам понадобится дополнительный источник случайности, для чего мы введем дополнительное вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{G}, \mu)$ и перейдем к рассмотрению $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n \geq 0}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}^0, \tilde{\mathbf{P}}^\infty)$, где $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, а меры расширяются единообразно: $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \mu$, $\tilde{\mathbf{P}}^0 = \mathbf{P}^0 \times \mu$, $\tilde{\mathbf{P}}^\infty = \mathbf{P}^\infty \times \mu$. На этом вероятностном пространстве зададим θ как произвольный предсказуемый марковский момент по фильтрации $(\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n \geq 0}$. Отметим, что наблюдаемым является только поток информации $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, относительно которого момент θ в общем случае не будет предсказуемым (и даже марковским). Чтобы правильно задать меру процесса с разладкой, обратимся к примеру случая последовательности независимых случайных величин.

Теорема 1.1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega \times \Omega', (\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{G})_{n \geq 0}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbf{Q} \times \mu)$ заданы две последовательности, $(X_n)_{n \geq 0}$ и $(Y_n)_{n \geq 0}$, независимых случайных величин, измеримых относительно потока сигма-алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Пусть $\text{Law}(X_n, n \geq 0) = \mathbf{P}^\infty$, $\text{Law}(Y_n, n \geq 0) = \mathbf{P}^0$, где меры $\mathbf{P}^\infty, \mathbf{P}^0$ определены на борелевской сигма-алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ вместе с доминирующей их мерой $\mathbf{P}$ (по которой величины также независимы), и θ — предсказуемый марковский момент по фильтрации $(\sigma(X_1, \dots, X_n) \otimes \mathcal{G})_{n \geq 0}$. Зададим процесс $Z_n = X_n I\{n < \theta\} + Y_n I\{n \geq \theta\}$ и обозначим $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \mu$, $\tilde{\mathbf{P}}^\theta = \text{Law}((Z_n)_{n \geq 0}, \theta)$, $\mathbf{P}^\theta = \text{Law}((Z_n)_{n \geq 0})$. Тогда

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}_n^\theta}{d\tilde{\mathbf{P}}_n} = \mathcal{E}(M^\theta)_n, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_n^\theta}{d\mathbf{P}_n} = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}(M^k)_n \Delta G_k + \mathcal{E}(M^\infty)_n (1 - G_n), \quad (2)$$

где $G_n(x_1, \dots, x_{n-1}) = \tilde{\mathbf{P}}(\theta \leq n | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$.

Доказательство. Расширительно толкуя запись, мы будем использовать обозначение θ и для (предсказуемого) момента по фильтрации $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{G})_{n \geq 0}$, соответствующего исходному. Найдем вероятности для порождающих множеств сигма-алгебры (здесь $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \times \mu$ обозначает меру на расширенном вероятностном пространстве):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^\theta((-\infty; z_1], \dots, (-\infty; z_n], k) &= \tilde{\mathbf{Q}}(Z_1 \leq z_1, \dots, Z_n \leq z_n, \theta = k) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}(X_1 \leq z_1, \dots, X_{k-1} \leq z_{k-1}, \theta = k, Y_k \leq z_k, \dots, Y_n \leq z_n) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}(X_1 \leq z_1, \dots, X_{k-1} \leq z_{k-1}, \theta = k) \tilde{\mathbf{Q}}(Y_k \leq z_k, \dots, Y_n \leq z_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}(Y_k \leq z_k, \dots, Y_n \leq z_n) &= \tilde{\mathbf{P}}^0((-\infty; z_k], \dots, (-\infty; z_n]) \\ &= \tilde{\mathbf{E}} \left(I\{(-\infty; z_k], \dots, (-\infty; z_n]\} \prod_{i=k}^n (1 + \Delta M_i^0) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что здесь (и далее), поскольку элементы каждой из последовательностей X и Y независимы, $(1 + M_i^0)$, $(1 + M_i^\infty)$ суть плотности распределений i -х элементов последовательностей X и Y соответственно по распределению тех же элементов относительно меры $\mathbf{P}$, но мы оставим выражения в этом виде для дальнейших обобщений. Из того, что $d\tilde{\mathbf{P}}^k/d\tilde{\mathbf{P}} = d(\mathbf{P}^k \times \mu)/d(\mathbf{P} \times \mu) = d\mathbf{P}^k/d\mathbf{P}$, выводим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}(X_1 \leq z_1, \dots, X_{k-1} \leq z_{k-1}, \theta = k) &= \tilde{\mathbf{P}}^\infty((-\infty; z_1], \dots, (-\infty; z_{k-1}]; \theta = k) \\ &= \tilde{\mathbf{E}} \left(I\{(-\infty; z_1], \dots, (-\infty; z_{k-1}]\} I\{\theta = k\} \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \Delta M_i^\infty) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив эти выражения в (3), получаем в итоге

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbf{Q}}(X_1 \leq z_1, \dots, X_{k-1} \leq z_{k-1}, \theta = k) \tilde{\mathbf{Q}}(Y_k \leq z_k, \dots, Y_n \leq z_n) \\
&= \tilde{\mathbf{E}} \left[\tilde{\mathbf{E}} \left(I\{(-\infty; z_k], \dots, (-\infty; z_n]\} \prod_{i=k}^n (1 + \Delta M_i^0) \middle| \mathcal{B}(\mathbf{R}^{k-1}) \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(I\{(-\infty; z_1], \dots, (-\infty; z_{k-1}]\} I\{\theta = k\} \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \Delta M_i^\infty) \right) \right] \\
&= \tilde{\mathbf{E}} \left(I\{(-\infty; z_1], \dots, (-\infty; z_n]\} I\{\theta = k\} \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \Delta M_i^\infty) \prod_{i=k}^n (1 + \Delta M_i^0) \right) \\
&= \tilde{\mathbf{E}} \left(I\{(-\infty; z_1], \dots, (-\infty; z_n]\} I\{\theta = k\} \mathcal{E}(M^\theta)_n \right), \tag{6}
\end{aligned}$$

где мы учли явный вид M_i^0 , M_i^∞ и воспользовались тем, что выбор меры $\mathbf{P}$ гарантирует сохранение независимости последовательности случайных величин. Таким образом, доказано первое равенство в формулировке теоремы. Докажем второе: для $A \in \mathcal{F}_n$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^\theta(A) &= \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{E}}^\theta(I_A I\{\theta = k\}) + \tilde{\mathbf{E}}^\theta(I_A I\{\theta > n\}) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left(I_A \mathcal{E}(M^k)_n \tilde{\mathbf{E}}(I\{\theta = k\} | \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)) \right) \\
&\quad + \mathbf{E} \left(I_A \mathcal{E}(M^\infty)_n \tilde{\mathbf{E}}(I\{\theta > n\} | \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)) \right) \\
&= \mathbf{E} \left[I_A \left(\sum_{k=1}^n \mathcal{E}(M^k)_n \Delta G_k + \mathcal{E}(M^\infty)_n (1 - G_n) \right) \right], \tag{7}
\end{aligned}$$

так как в силу предсказуемости момента θ по фильтрации $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{G})_{n \geq 0}$

$$\mathbf{P}(\theta = k | \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)) = \mathbf{P}(\theta = k | \mathcal{B}(\mathbf{R}^{k-1})) = G_k - G_{k-1} = \Delta G_k.$$

Теорема доказана.

Результат этой теоремы подсказывает, как следует определить меру процесса с разладкой в общем случае. Именно, следует описать (условное) распределение момента разладки набором функций $(G_k(x_1, \dots, x_{k-1}))_{k \geq 1}$ и определить меры $\tilde{\mathbf{P}}_n^\theta$ в соответствии с (1). Представление (2) для мер $\mathbf{P}_n^\theta$ следует из (7) (так как во второй части теоремы мы не использовали конкретную структуру мер $\mathbf{P}^\infty, \mathbf{P}^0$). В рамках этого определения стандартными методами ищем рекуррентное выражение для статистики

$$\pi_n = \tilde{\mathbf{P}}^\theta(\theta \leq n | \mathcal{F}_n).$$

Имеем для $A \in \mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}}^\theta(I\{\theta > n\} I_A) &= \tilde{\mathbf{E}}[\mathcal{E}(M^\theta)_n I\{\theta > n\} I_A] \\
&= \tilde{\mathbf{E}}[\mathcal{E}(M^\infty)_n I\{\theta > n\} I_A] = \tilde{\mathbf{P}}^\infty(\theta > n, A) \\
&= \mathbf{E}^\infty(\tilde{\mathbf{P}}^\infty(\theta > n | \mathcal{F}_n) I_A) = \mathbf{E}^\infty((1 - G_n) I_A) \\
&= \tilde{\mathbf{E}}^\theta \left(\frac{d\mathbf{P}_n^\infty}{d\mathbf{P}_n^\theta} (1 - G_n) I_A \right), \tag{8}
\end{aligned}$$

а это означает, что

$$\tilde{\mathbf{P}}^\theta(\theta > n | \mathcal{F}_n) = (d\mathbf{P}_n^\infty / d\mathbf{P}_n^\theta) (1 - G_n).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}^\theta(I\{\theta \leq n\}I_A) &= \tilde{\mathbf{E}}[\mathcal{E}(M^\theta)_n I\{\theta \leq n\}I_A] \\ &= \tilde{\mathbf{E}}\left[\sum_{k=1}^n \mathcal{E}(M^k)_n I\{\theta = k\}I_A\right] = \tilde{\mathbf{E}}\left[\sum_{k=1}^n \mathcal{E}(M^k)_n \tilde{\mathbf{P}}(I\{\theta = k\} | \mathcal{F}_n)I_A\right] \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}^k(\tilde{\mathbf{P}}(\theta = k | \mathcal{F}_k)I_A) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}^k(\Delta G_k I_A) \\ &= \tilde{\mathbf{E}}^\theta\left(\sum_{k=1}^n \frac{d\mathbf{P}_n^k}{d\mathbf{P}_n^\theta} \Delta G_k I_A\right),\end{aligned}\quad (9)$$

что влечет равенство

$$\tilde{\mathbf{P}}^\theta(\theta \leq n | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^n \frac{d\mathbf{P}_n^k}{d\mathbf{P}_n^\theta} \Delta G_k.$$

Если предположить, что $\mathbf{P}^0 \ll^{\text{loc}} \mathbf{P}^\infty$, то для $\phi_n = \pi_n/(1 - \pi_n)$ получаем выражение

$$\phi_n = \sum_{k=1}^n \frac{d\mathbf{P}_n^k}{d\mathbf{P}_n^\infty} \frac{\Delta G_k}{1 - G_n},$$

откуда, обозначая $L_n = d\mathbf{P}_n^0/d\mathbf{P}_n^\infty$ и вспоминая стандартное (и легко проверяемое) тождество

$$\frac{d\mathbf{P}_{n+1}^0}{d\mathbf{P}_{n+1}^k} = \frac{d\mathbf{P}_n^0}{d\mathbf{P}_n^k},$$

выводим рекуррентное соотношение

$$\phi_{n+1} = \left[\frac{1 - G_n}{1 - G_{n+1}} \phi_n + \frac{\Delta G_{n+1}}{1 - G_{n+1}} \right] \frac{L_{n+1}}{L_n}.$$

Это выражение совпадает с выражением при независимом от наблюдений моменте разладки θ , когда величины G_n неслучайны.

2. Непрерывный случай. Наша дальнейшая цель состоит в переносе модели разладки, предложенной в п. 1, на непрерывный случай. Для независимого от процесса момента разладки соответствующие результаты получены в работе [2], и наше изложение можно рассматривать как расширение полученных в ней результатов.

Как и ранее, $(\Omega, (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}, \mathcal{F}^X, \mathbf{P}, \mathbf{P}^\infty, \mathbf{P}^0)$ — вероятностное пространство с фильтрацией, порожденной заданным на нем процессом $(X_t)_{t \geq 0}$, и мерами $\mathbf{P}^\infty$, $\mathbf{P}^0$, абсолютно непрерывными относительно меры $\mathbf{P}$ (можно считать изначально, что $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^\infty + \mathbf{P}^0)/2$). Расширим это пространство с помощью дополнительного вероятностного пространства $(\Omega', (\mathcal{F}'_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}', \tilde{\mathbf{P}})$ (как прямое произведение вероятностных пространств, т.е. здесь $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$ и аналогично для сигма-алгебр и мер). В дальнейшем изложении мы будем иногда отождествлять $\mathcal{F}^X$ и $\tilde{\mathcal{F}}^X = \mathcal{F}^X \times \Omega'$. На этом вероятностном пространстве рассмотрим произвольный марковский момент θ . Мы будем предполагать в дальнейшем, что условная вероятность $\tilde{\mathbf{P}}(B | \mathcal{F}^X)(\omega)$ регулярна на $\mathcal{F}^\theta$ и при каждом $\omega \in \Omega$ абсолютно непрерывна по мере $\tilde{\mathbf{P}}$. Это означает, что найдется функция $g(\omega, \tilde{\omega})$ такая, что

$$\tilde{\mathbf{P}}(B | \mathcal{F}^X)(\omega) = \tilde{\mathbf{E}}[I_B(\tilde{\omega})g(\omega, \tilde{\omega})],$$

и при каждом ω функция

$$G(\omega, u) = \tilde{\mathbf{P}}(\theta \leq u | \mathcal{F}^X)(\omega) = \tilde{\mathbf{E}}[I\{\theta(\tilde{\omega}) \leq u\}(\tilde{\omega})g(\omega, \tilde{\omega})]$$

задает распределение на борелевской сигма-алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Так как $\{\theta \leq t\} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ в силу марковского свойства θ , то процесс $G(\omega, t) = \tilde{\mathbf{P}}(\theta \leq t | \mathcal{F}^X)$ согласован с $\mathcal{F}_t^X$

(справедливость этого утверждения достаточно проверить на порождающих множествах $A \times A' \in \widetilde{\mathcal{F}}$, где $A \in \mathcal{F}_t^X$, $A' \in \mathcal{F}'$, для которых оно очевидно). Имея это в виду, мы будем далее иногда писать $G(\{X_s, s \leq t\}, t)$. Отсюда следует и измеримость случайной меры $G(\{X_s, s \leq t\}, du)$ на отрезке $[0; t]$ относительно $\mathcal{F}_t^X$. Мы будем дополнительно требовать, чтобы процесс $G(t, \omega)$ был предсказуемым.

Связь момента θ и процесса X несколько проясняется следующим рассуждением. Обозначим $\mathcal{I}_t = I\{\theta \leq t\}$, тогда процесс $\mathcal{I}$ будет измерим по потоку $\sigma(\mathcal{I}_u, X_u, u \leq t)$ и при каждом $\tilde{\omega}$ будет строго возрастать. Следовательно, $\mathcal{I}_t$ — субмартингал, и мы можем задаться целью найти его компенсатор (существующий по теореме Дуба–Мейера). В этом нам поможет несложное обобщение классического результата о компенсаторе процесса одного скачка (см. [1, п. II.3.26]).

Теорема 2.1. *Компенсатор субмартингала $\mathcal{I}_t$ равен*

$$\int_0^{t \wedge \theta} \frac{G(du, \omega)}{G([u, \infty], \omega)}.$$

Доказательство. Предсказуемость интеграла следует из предсказуемости $G(t, \omega)$. Учитывая, что для $A \in \mathcal{F}_s^X$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[I_A I\{s < \theta\} \left(\mathcal{I}_t - \mathcal{I}_s - \int_s^{t \wedge \theta} \frac{G(dv, \omega)}{G([v, \infty], \omega)} \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[I_A \mathbf{E} \left[\left(I\{s < \theta \leq t\} - I\{s < \theta\} \int_s^{t \wedge \theta} \frac{G(dv, \omega)}{G([v, \infty], \omega)} \right) \middle| \mathcal{F}_s^X \right] \right] \\ &= \mathbf{E} \left[I_A \left[(G(t, \omega) - G(s, \omega)) - \int_s^\infty \int_s^{t \wedge u} \frac{G(dv, \omega)}{G([v, \infty], \omega)} G(u, \omega) du \right] \right], \quad (10) \end{aligned}$$

мы можем повторить все дальнейшие шаги доказательства в [1, п. II.3.26] для выражения во внутренних квадратных скобках. Теорема доказана.

Отметим, что распространенный в литературе выбор момента θ как экспоненциально распределенного момента, не зависящего от процесса X , отвечает выбору $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ и дает компенсатор $\lambda \min(t, \theta)$.

Наша цель — построить модель, в которой распределение процесса меняется в момент времени θ с $\mathbf{P}^\infty$ на $\mathbf{P}^0$. Введем (стандартные) обозначения

$$L_t^i = \frac{d(\mathbf{P}^i | \mathcal{F}_t)}{d(\mathbf{P} | \mathcal{F}_t)}, \quad i = 0, \infty, \quad (11)$$

$$L_t^i = \mathcal{E}(M^i)_t, \quad i = 0, \infty, \quad (12)$$

где вторая пара равенств задает локальные мартингалы M_t^i по мере $\mathbf{P}$. Кроме того, зададим по аналогии с дискретным случаем

$$M_t^x = \int_0^t I\{x \leq s\} dM_s^0 + \int_0^t I\{x > s\} dM_s^\infty$$

и введем меру на пространстве $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \tilde{\mathcal{F}})$, отвечающую интересующей нас модели разладки:

$$d\tilde{\mathbf{P}}^\theta = \mathcal{E}(M^\theta)_\infty d\tilde{\mathbf{P}}.$$

Однако мы наблюдаем только траекторию процесса X , и потому нам более важны сужения этой меры на $\mathcal{F}_t^X$ для различных t , которые мы по аналогии будем обозначать $\mathbf{P}_t^\theta$.

Теорема 2.2. *Во введенных выше обозначениях*

$$\frac{d\mathbf{P}_t^\theta}{d\mathbf{P}_t} = \int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq t\}, du) + \mathcal{E}(M^\infty)_t (1 - G(\{X_s, s \leq t\}, t)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку M_t^θ и $\mathcal{E}(M^\theta)_t$ — мартингалы по фильтрации $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$, то для $A \in \mathcal{F}_t^X$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^\theta(A) &= \tilde{\mathbf{E}}[I_A \mathcal{E}(M^\theta)_\infty] = \tilde{\mathbf{E}}[I_A \mathcal{E}(M^\theta)_t] \\ &= \mathbf{E}\left[I_A \tilde{\mathbf{E}}[\mathcal{E}(M^\theta)_t | \mathcal{F}_t^X]\right] = \mathbf{E}\left[I_A \int_0^\infty \mathcal{E}(M^u)_t G(\omega, du)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[I_A \left(\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq t\}, du) + \mathcal{E}(M^\infty)_t (1 - G(\{X_s, s \leq t\}, t))\right)\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как выражение в скобках измеримо по $\mathcal{F}_t^X$, справедливость утверждения теоремы доказана.

Для многих критериев риска важную роль играет статистика

$$\pi_t = \tilde{\mathbf{P}}^\theta(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^X).$$

В случае, когда момент θ не зависит от траектории процесса X , формула для π_t является следствием обобщенной формулы Байеса (см. [4]). Это остается верным и в нашем случае, однако формулу Байеса необходимо применить дважды. Мы вынесем доказательство в отдельную теорему.

Теорема 2.3. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\pi_t = \frac{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq u\}, du)}{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq u\}, du) + \mathcal{E}(M^\infty)_t (1 - G(\{X_s, s \leq u\}, t))}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим меру $Q(A, \tilde{\omega}) = \tilde{\mathbf{P}}^\theta(A | \mathcal{F}_t^\theta)$ для $A \in \mathcal{F}_t^X$. По формуле пересчета в условных математических ожиданиях и из определения меры $\mathbf{P}^\theta$ имеем

$$Q(A, \tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\mathbf{E}}[I_A \mathcal{E}(M^\theta)_t | \mathcal{F}_t^\theta]}{\mathcal{E}(M^\theta)_t} \quad (14)$$

Далее, из условий на θ следует, что $\tilde{\mathbf{P}}(B | \mathcal{F}_t^X)(\omega) = \int_B g(\omega, \tilde{\omega}) \tilde{\mathbf{P}}(d\tilde{\omega})$. Взяв математическое ожидание от обеих частей этого равенства, выводим для всякого $B \in \mathcal{F}^\theta$ соотношение $\mathbf{P}(B) = \int_B \mathbf{E} g(\omega, \tilde{\omega}) \tilde{\mathbf{P}}(d\tilde{\omega})$, откуда $\mathbf{E} g(\omega, \tilde{\omega}) = 1$ $\mathbf{P}$ -п.н. По обобщенной формуле Байеса

$$\tilde{\mathbf{E}}[I_A \mathcal{E}(M^\theta)_t | \mathcal{F}_t^\theta] = \frac{\mathbf{E}[I_A \mathcal{E}(M^{\theta(\tilde{\omega})})_t g(\omega, \tilde{\omega})]}{\mathbf{E} g(\omega, \tilde{\omega})} = \mathbf{E}[I_A \mathcal{E}(M^{\theta(\tilde{\omega})})_t g(\omega, \tilde{\omega})].$$

Подставляя это выражение в (14), получаем

$$Q(A, \tilde{\omega}) = \mathbf{E}\left[I_A \frac{\mathcal{E}(M^{\theta(\tilde{\omega})})_t g(\omega, \tilde{\omega})}{\mathcal{E}(M^\theta)_t(\tilde{\omega})}\right] = \int_A q(\omega, \tilde{\omega}) \mathbf{P}(d\omega).$$

Такое представление позволяет нам снова применить формулу Байеса:

$$\begin{aligned} \pi_t &= \tilde{\mathbf{P}}^\theta(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^X) = \frac{\tilde{\mathbf{E}}[\mathcal{E}(M^{\theta(\tilde{\omega})})_t g(\omega, \tilde{\omega}) I\{\theta(\tilde{\omega}) \leq t\}]}{\tilde{\mathbf{E}}[\mathcal{E}(M^{\theta(\tilde{\omega})})_t g(\omega, \tilde{\omega})]} \\ &= \frac{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq t\}, du)}{\int_0^\infty \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq t\}, du)} \\ &= \frac{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq t\}, du)}{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq t\}, du) + \mathcal{E}(M^\infty)_t (1 - G(\{X_s, s \leq t\}, t))}, \end{aligned} \quad (15)$$

что и требовалось доказать.

Допустим, что $\mathbf{P}^0 \sim \mathbf{P}^\infty$. В конкретных задачах часто удобнее работать с процессом

$$\phi_t = \frac{\pi_t}{1 - \pi_t} = \frac{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leq t\}, du)}{\mathcal{E}(M^\infty)_t (1 - G(\{X_s, s \leq t\}, t))}.$$

Заметим, что при $u \leq t$

$$\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\omega, du) = \mathcal{E}(M^0)_t \int_0^t \frac{\mathcal{E}(M^\infty)_u}{\mathcal{E}(M^0)_u} G(\omega, du),$$

и, следовательно, обозначая $L_t = \mathcal{E}(M^0)_t / \mathcal{E}(M^\infty)_t$, получаем представление

$$\phi_t = \int_0^t \frac{L_t}{L_u} \frac{G(\omega, du)}{1 - G(\omega, t)}.$$

Но из определения следует, что $L_t = \frac{d\mathbf{P}_t^0}{d\mathbf{P}_t^\infty} / \frac{d\mathbf{P}_t^\infty}{d\mathbf{P}_t^\infty} = d\mathbf{P}_t^0 / d\mathbf{P}_t^\infty$ и потому для процесса плотности L_t выполнено $L_t = \mathcal{E}(M)_t$, для некоторого локального мартингала M_t . Введя эти обозначения, непосредственным вычислением получаем уравнение для эволюции процесса ϕ :

$$d\phi_t = (1 + \phi_t) \frac{G(\{X_s, s \leq t\}, dt)}{1 - G(\{X_s, s \leq t\}, t)} + \phi_t dM_t.$$

3. Пример. За основу мы возьмем стандартную модель Ширяева [5, гл. 6, п. 22] появления сноса у винеровского процесса, которую мы модифицируем, чтобы учесть зависимость между моментом наступления разладки (т.е. появления сноса) и траекторией самого процесса. Итак, в нашей модели $(\Omega, \mathcal{F}^X, \mathbf{P}^\infty)$ — пространство со стандартным винеровским процессом W_t на нем, $dX_t = \sigma dW_t$, мы берем $\mathbf{P}^\infty = \mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^0$ — меру винеровского процесса со сносом $(\mu/\sigma)t$. Сразу выпишем (по теореме Гирсанова)

$$L_t = \frac{d\mathbf{P}_t^0}{d\mathbf{P}_t^\infty} = \exp \left\{ \frac{\mu}{\sigma^2} X_t - \left(\frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 X_t^2 \right\}, \quad (16)$$

$$dL_t = \frac{\mu}{\sigma^2} L_t dX_t. \quad (17)$$

Зададим θ на расширенном вероятностном пространстве сразу через (как легко проверить, согласованные) условные распределения, положив

$$G(\{X_s, s \leq t\}, t) = \pi + (1 - \pi) \left(1 - \exp \left(- \int_0^t \lambda(X_s) ds \right) \right).$$

Как следует из результатов предыдущего пункта, такой выбор условного распределения G отвечает компенсатору $\int_0^{t \wedge \theta} \lambda(X_s) ds$. Отметим, что нашу модель можно задать и непосредственно, расширив исходное пространство до $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbf{R}^+$, $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t^X \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+)$, и определив меру формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \times [s, t)) &= \pi \tilde{\mathbf{P}}(A) I\{s = 0\} + (1 - \pi) \tilde{\mathbf{E}} \left[I_A \left(e^{-\int_0^s \lambda(W_r) dr} - e^{-\int_0^t \lambda(W_r) dr} \right) \right] \\ &= \pi \tilde{\mathbf{P}}(A) I\{s = 0\} + (1 - \pi) \tilde{\mathbf{E}} \left[I_A \int_s^t \lambda(W_u) e^{-\int_0^u \lambda(W_r) dr} du \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Результаты предыдущего пункта позволяют нам сразу выписать для процесса ϕ_t , а затем и для процесса $\pi_t = \phi_t / (1 + \phi_t)$ следующие представления:

$$\begin{aligned} d\phi_t &= \frac{\mu}{\sigma^2} \phi_t dX_t + (1 + \phi_t) \lambda(X_t) dt, \\ d\pi_t &= d \left(\frac{\phi_t}{1 + \phi_t} \right) = \frac{\mu}{\sigma^2} \pi_t (1 - \pi_t) dX_t + \lambda(X_t) (1 - \pi_t) dt - \frac{\mu}{\sigma^2} \pi_t^2 (1 - \pi_t) dt \\ &= \lambda(X_t) (1 - \pi_t) dt + \frac{\mu}{\sigma} \pi_t (1 - \pi_t) d\bar{W}_t, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $\bar{W}_t = (1/\sigma)X_t - (\mu/\sigma) \int_0^t \pi_s ds$ есть новое броуновское движение на $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ (так называемый обновляющий процесс). Сформулируем стандартную задачу оптимальной остановки для нахождения момента разладки, рассмотрим следующую функцию риска для марковских по нашей фильтрации моментов τ :

$$V(x, \pi) = \inf_{\tau} (\mathbf{P}_{x, \pi}(\tau < \theta) + c \mathbf{E}_{x, \pi}(\tau - \theta)^+).$$

Эта функция риска является комбинацией штрафа за ложную тревогу и штрафа за запаздывание в оповещении о разладке. Стандартная аргументация позволяет нам выразить ее через π_t :

$$V(x, \pi) = \inf_{\tau} \mathbf{E} \left((1 - \pi_{\tau}) + c \int_0^{\tau} \pi_s ds \right).$$

По доказанному ранее, пара процессов (X_t, π_t) подчиняется следующей паре стохастических дифференциальных уравнений относительно заданного на $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ стандартного винеровского процесса $\bar{W}_t$ (и, следовательно, является марковской):

$$\begin{cases} dX_t = \mu \pi_t dt + \sigma d\bar{W}_t, \\ d\pi_t = \lambda(X_t)(1 - \pi_t) dt + \frac{\mu}{\sigma} \pi_t(1 - \pi_t) d\bar{W}_t. \end{cases}$$

В сформулированной задаче оптимальной остановки для однородного двумерного марковского процесса, в соответствии с общей теорией, оптимальный момент остановки имеет вид $\tau^* = \inf\{t \geq 0: (X_t, \pi_t) \in D\}$, где D есть некоторое замкнутое множество в $\mathbf{R}^2$. Дальнейшие рассмотрения касаются численных методов для поиска оптимального множества остановки D . Мы будем искать это множество с помощью сведения задачи к задаче оптимальной остановки для марковских цепей, слабо сходящихся к нашему марковскому процессу в соответствии с методологией [3].

В первую очередь ограничим пространство состояний процесса, добавив поглощение на границах области $|X_t| \leq M$, $\pi_t \leq 1 - \varepsilon$ и $\pi_t \geq \varepsilon$ для некоторых M, ε . Для удобства численных расчетов проведем замену переменных $(X_t, \pi_t) \rightarrow (X_t, r_t)$, положив

$$\begin{cases} r_t = r(X_t, \pi_t) = \ln \left(\frac{1}{\pi_t} - 1 \right) + \frac{\mu X_t}{\sigma^2}, \\ \pi_t = \pi(X_t, r_t) = \left(1 + e^{r_t - \mu X_t / \sigma^2} \right)^{-1}. \end{cases}$$

Применяя формулу Ито, получаем

$$\begin{aligned} dr_t &= r'_x dX_t + r'_\pi d\pi_t + \frac{1}{2} r''_{\pi\pi} d\langle \pi \rangle_t \\ &= \frac{\mu}{\sigma^2} (\mu \pi_t dt + \sigma d\bar{W}_t) - \frac{1}{\pi_t(1 - \pi_t)} \left(\lambda(X_t)(1 - \pi_t) dt + \frac{\mu}{\sigma} \pi_t(1 - \pi_t) d\bar{W}_t \right) \\ &\quad + \frac{1 - 2\pi_t}{2\pi_t^2(1 - \pi_t)^2} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} \pi_t^2(1 - \pi_t)^2 dt \right) \\ &= \left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\lambda(X_t)}{\pi_t} \right] dt. \end{aligned}$$

Таким образом, (X_t, r_t) образует марковскую пару процессов, подчиняющуюся следующим стохастическим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} dX_t = \mu \pi_t dt + \sigma d\bar{W}_t, \\ dr_t = \left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\lambda(X_t)}{\pi_t} \right] dt \end{cases}$$

(где $\pi_t = \pi(X_t, r_t)$). Мы видим, что наблюдаемый процесс есть одномерная диффузия с двумерным сносом. Ясно, что у данного двумерного процесса ограничены коэффициенты сноса и диффузии, а момент выхода процесса на границу поглощения непрерывен по траектории процесса в топологии Скорохода (так как диффузионная часть всегда невырождена по оси абсцисс, а значит, и в направлении нормали к границе). Эти условия гарантируют возможность приближения функции штрафа $V(x, \pi) = \inf_{\tau} (\mathbf{P}_{x, \pi}(\tau < \theta) + c \mathbf{E}_{x, \pi}(\tau - \theta)^+)$ функциями штрафа $V^n(x, \pi)$ для локально согласованных случайных блужданий, т.е. таких, для которых «локальный снос» и «локальная дисперсия» в каждой точке сходятся к коэффициентам сноса и диффузии (см. [3, п. 10.2]).

Нам осталось построить требуемые дискретные блуждания, для чего область $|X_t - m| \leq M$, $\varepsilon \leq \pi_t \leq 1 - \varepsilon$ мы покроем дискретной сеткой с шагом M/K по оси x и $2 \ln(1/\varepsilon - 1)/N$ по оси r . Вероятности перехода зададим следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t \left(\frac{kM}{K}, \frac{l}{N} \right) = \frac{2(M/K)^2}{\sigma^2 + \sqrt{(2\mu\pi M/K)\sigma^4}}, \\ \mathbf{P} \left(X_{n+1} = X_n \pm \frac{M}{K} \mid X_n = \frac{kM}{K}, r_n = \frac{l}{N} \right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\mu\pi M/K}{\sigma^2 + \sqrt{(2\mu\pi M/K)\sigma^4}}, \\ \mathbf{P} \left(r_{n+1} = r_n + \frac{2 \ln(1/\varepsilon - 1)}{N} \right. \\ \quad \times \left. \left[\frac{N}{2 \ln(1/\varepsilon - 1)} \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\lambda(kM/K)}{\pi} \right) \right] \mid X_n = \frac{kM}{K}, r_n = \frac{l}{N} \right) = 1, \end{array} \right.$$

где для краткости записи мы положим $\pi = \pi(kM/K, l/N)$, $[\cdot]$ обозначает целую часть, а $\Delta t(kM/K, l/N)$ есть время, которое частица проводит в узле $(kM/K, l/N)$. Локальная состоятельность блуждания проверяется непосредственно.

Пусть $Tf(x, r) = \mathbf{E}_{x, r} f(X_1, r_1)$, $Qf(x, r) = \min(Tf + c\pi\Delta t, f)$. Тогда, имея граничное условие $G(x, r) = 1 - \pi(x, r)$, мы получаем функцию оптимального штрафа в виде $V_N(x, r) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n G(x, r)$ (см. [5, гл. 1, разд. 2, п. 2, следствие 1.12]). Область остановки в соответствии с общей теорией имеет вид $D = \{V = G\}$. Применяя все предыдущие шаги вместе, мы можем получить дискретные приближения для оптимальных множеств остановки.

Для примера, рассмотрим случай кусочно линейной зависимости вероятности самовозбуждения от значения процесса, $\lambda(x) = x^+$. Полагаем $\mu = \sigma = c = 1$, $-2 \leq x \leq 6$, $\varepsilon = 0.025$, $K = 200$, $N = 40\,000$, $n = 1\,000$. Численное приближение множества остановки представлено (в координатах (x, π)) на рис. 1.

Рис. 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жакоб Ж., Ширяев А. Предельные теоремы для случайных процессов, т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 542 с., 366 с.
2. Kavtaradze T., Lazrieva N., Mania M., Muliere P. A Bayesian-martingale approach to the general disorder problem. — Stochastic Process. Appl., 2007, v. 117, № 8, p. 1093–1120.
3. Kushner H., Dupuis P. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. New York: Springer-Verlag, 2001, 475 p.
4. Лунцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
5. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
6. Shiryaev A. Quickest detection problems: Fifty years later. — Sequential Anal., 2010, v. 29, № 4, p. 345–385.

Поступила в редакцию
16.III.2012

© 2012 г.

ЗУБКОВ А. М.*, СЕРОВ А. А.*

**ПОЛНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УНИВЕРСАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ
ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БИНОМИАЛЬНОГО ЗАКОНА¹⁾**

В работе приводятся новая формулировка и полное доказательство явных двусторонних оценок для функции распределения биномиального закона, содержащихся в статье Д. Алферса и Х. Дингеса (1984 г.). Эти оценки универсальны, так как справедливы для любых биномиальных распределений и любых значений аргумента, и точны в том смысле, что верхняя оценка значения функции распределения в любой целочисленной точке k является нижней оценкой значения этой функции в точке $k + 1$. Такие оценки позволяют для любой квантили биномиального распределения указывать содержащую ее пару соседних целых чисел.

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, двусторонние оценки, уточненные нормальные аппроксимации.

Пусть $X_{n,p}$ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами (n, p) :

$$\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} = \sum_{0 \leq m \leq k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Так как вычисление сумм с биномиальными коэффициентами при больших n весьма громоздко, то при нахождении приближенных значений функции биномиального распределения, как правило, используется теорема Муавра–Лапласа

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq np + x\sqrt{np(1-p)}\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2},$$

согласно которой $\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} \approx \Phi((k - np)/\sqrt{np(1-p)})$, если np и k достаточно велики.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: zubkov@mi.ras.ru; serov@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00139).