Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, А. А. Серов, Полное доказательство универсальных неравенств для функции распределения биномиального закона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 597–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:36:13

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жакоб Ж., Ширяев А. Пределные теоремы для случайных процессов, т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 542 с., 366 с.
2. Kavtaradze T., Lazrieva N., Mania M., Muliere P. A Bayesian-martingale approach to the general disorder problem. — Stochastic Process. Appl., 2007, v. 117, № 8, p. 1093–1120.
3. Kushner H., Dupuis P. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. New York: Springer-Verlag, 2001, 475 p.
4. Лунцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
5. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
6. Shiryaev A. Quickest detection problems: Fifty years later. — Sequential Anal., 2010, v. 29, № 4, p. 345–385.

Поступила в редакцию
16.III.2012

© 2012 г.

ЗУБКОВ А. М.*, СЕРОВ А. А.*

**ПОЛНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УНИВЕРСАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ
ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БИНОМИАЛЬНОГО ЗАКОНА¹⁾**

В работе приводятся новая формулировка и полное доказательство явных двусторонних оценок для функции распределения биномиального закона, содержащихся в статье Д. Алферса и Х. Дингеса (1984 г.). Эти оценки универсальны, так как справедливы для любых биномиальных распределений и любых значений аргумента, и точны в том смысле, что верхняя оценка значения функции распределения в любой целочисленной точке k является нижней оценкой значения этой функции в точке $k + 1$. Такие оценки позволяют для любой квантили биномиального распределения указывать содержащую ее пару соседних целых чисел.

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, двусторонние оценки, уточненные нормальные аппроксимации.

Пусть $X_{n,p}$ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами (n, p) :

$$\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} = \sum_{0 \leq m \leq k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Так как вычисление сумм с биномиальными коэффициентами при больших n весьма громоздко, то при нахождении приближенных значений функции биномиального распределения, как правило, используется теорема Муавра–Лапласа

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq np + x\sqrt{np(1-p)}\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2},$$

согласно которой $\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} \approx \Phi((k - np)/\sqrt{np(1-p)})$, если np и k достаточно велики.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: zubkov@mi.ras.ru; serov@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00139).

В качестве примера оценок не асимптотического характера можно привести формулу С. Н. Бернштейна [2]

$$\sum_{k=m_0}^{m_1-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-u^2} du,$$

где m_0, m_1 — целые, z_k — корень уравнения

$$z_k \sqrt{2np(1-p)} + \frac{1-2p}{3} z_k^2 = m_k - np + \alpha_k$$

при некотором $\alpha_k \in (-3/2, 1/2)$ и $np(1-p) \geq 62.5, 0 \leq z_0 < z_1 \leq \sqrt{2np(1-p)}$. Эта формула относится к значениям m_0, m_1 , которые отличаются от np на величины порядка $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. В. Феллер [3] несколько уточнил результаты С. Н. Бернштейна, представив верхние и нижние оценки в аналогичном виде с немного другим выбором пределов интегрирования z_0, z_1 . Эти результаты до сих пор обобщаются и уточняются разными авторами.

Для построения статистических критериев с заданными вероятностями ошибок требуется информация о значениях «хвостов» распределений. Однако относительная погрешность обычных нормальных аппроксимаций биномиального распределения на его хвостах довольно велика, в частности, из-за сверхэкспоненциального убывания хвостов. Это послужило одной из причин разработки теории больших отклонений, доказательства различных неравенств для хвостов биномиального закона, а также для хвостов распределений сумм случайных величин.

Цель настоящей статьи — привести новую формулировку, а также упрощенное и полное доказательство результатов, фактически содержащихся в статье [1], в которой использовались некоторые приемы из статей [6], [7]. Эти результаты по форме близки к неравенствам Бернштейна и Феллера, но имеют явный вид и дополняют их, практически полностью решая задачу оценки вероятностей умеренных и больших отклонений для биномиальных законов при любых значениях параметров (например, позволяют для любой квантили любого биномиального распределения указывать содержащее ее двухэлементное множество). Результаты статьи [1] остались практически незамеченными, видимо, из-за того, что они представлены в трудной для восприятия форме, а их доказательства излишне громоздки и содержат существенные пробелы.

Теорема 1. Пусть $H(x, p) = x \ln(x/p) + (1-x) \ln((1-x)/(1-p))$, $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ при $x \neq 0$ и $\operatorname{sgn}(0) = 0$, а монотонно возрастающие последовательности $\{C_{n,p}(k)\}_{k=0}^n$ определяются формулами $C_{n,p}(0) = (1-p)^n$, $C_{n,p}(n) = 1 - p^n$,

$$C_{n,p}(k) = \Phi \left(\operatorname{sgn} \left(\frac{k}{n} - p \right) \sqrt{2nH \left(\frac{k}{n}, p \right)} \right), \quad 1 \leq k < n.$$

Тогда при любом $k = 0, 1, \dots, n-1$ и любом $p \in (0, 1)$ справедливы неравенства

$$C_{n,p}(k) \leq \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} \leq C_{n,p}(k+1) \quad (1)$$

и равенства имеют место только при $k = 0$ и $k = n-1$.

Представление о точности приведенных в теореме неравенств можно получить, если заметить, что $C_{n,p}(k) + C_{n,1-p}(n-k) = 1$: тогда из соотношений

$$C_{n,p}(k) < \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\},$$

$$C_{n,1-p}(n-k) < \mathbf{P}\{X_{n,1-p} \leq n-k\} = \mathbf{P}\{X_{n,p} \geq k\}$$

следует неравенство

$$\begin{aligned} 1 &= C_{n,p}(k) + C_{n,1-p}(n-k) < \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} + \mathbf{P}\{X_{n,p} \geq k\} \\ &= 1 + \mathbf{P}\{X_{n,p} = k\}, \end{aligned}$$

в котором разность между правой и левой частями равна локальной вероятности биномиального закона. Поэтому $\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} - C_{n,p}(k) < \mathbf{P}\{X_{n,p} = k\}$.

Отношение верхних и нижних оценок для $\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\}$ в (1) может быть большим, когда k значительно меньше np , однако при таких значениях k большими являются и отношения $\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k+1\}/\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\}$ оцениваемых вероятностей.

В несколько другой форме результаты [1] были приведены в [8], где они использовались при выводе оценок неполных сумм биномиальных коэффициентов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что нижняя оценка в (1) при $k = 0$ и верхняя оценка при $k = n - 1$ превращаются в точные равенства; поэтому в дальнейшем эти случаи рассматривать не будем.

Справедливы равенства $\mathbf{P}\{X_{n,1} \leq k\} = 0$, $k < n$, и поэтому при любом целом $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} &= \sum_{m=0}^k C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \\ &= - \int_p^1 \frac{d}{dz} \sum_{m=0}^k C_n^m z^m (1-z)^{n-m} dz \\ &= -n \int_p^1 \sum_{m=0}^k \left(C_{n-1}^{m-1} z^{m-1} (1-z)^{n-m} - C_{n-1}^m z^m (1-z)^{n-m-1} \right) dz \\ &= n C_{n-1}^k \int_p^1 z^k (1-z)^{n-k-1} dz = (k+1) C_n^{k+1} \int_p^1 \frac{z^{k+1} (1-z)^{n-k-1}}{z} dz. \end{aligned}$$

Используя формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{S_n}$, получаем:

$$(k+1) C_n^{k+1} = \exp\{S_n^{k+1}\} \sqrt{\frac{(k+1)n}{2\pi(n-k-1)}} \frac{n^n}{(k+1)^{k+1} (n-k-1)^{n-k-1}},$$

где $S_n^{k+1} = S_n - S_{k+1} - S_{n-k-1}$.

Докажем верхнюю оценку в (1) для $0 \leq k \leq n-2$. Будем использовать обозначение $\alpha = (k+1)/n$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{(k+1)^{k+1} (n-k-1)^{n-k-1}} z^{k+1} (1-z)^{n-k-1} &= \left(\frac{nz}{k+1} \right)^{k+1} \left(\frac{n(1-z)}{n-k-1} \right)^{n-k-1} \\ &= \left(\frac{z}{\alpha} \right)^{n\alpha} \left(\frac{1-z}{1-\alpha} \right)^{n(1-\alpha)} = \exp \left\{ -n \left(\alpha \ln \frac{\alpha}{z} + (1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{1-z} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Объединяя эти формулы, находим, что если

$$B(z) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \ln \frac{\alpha}{z} + (1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{1-z},$$

то

$$\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} = e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{n\alpha}{2\pi(1-\alpha)}} \int_p^1 e^{-nB(z)} \frac{dz}{z}.$$

При любом $\alpha \in (0, 1)$ функция $B(z)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0 на $(0, \alpha]$ и монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ на $[\alpha, 1)$, в чем легко убедиться, заметив, что

$$B(\alpha) = 0 \quad \text{и} \quad B'(z) = -\frac{\alpha}{z} + \frac{1-\alpha}{1-z} = \frac{z-\alpha}{z(1-z)}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что уравнение $B(z) = a^2(z)/2$ имеет монотонно убывающее на $(0, 1)$ от $+\infty$ до $-\infty$ решение $a(z) = (\alpha - z)\sqrt{2B(z)/(\alpha - z)^2}$. Тогда

$$\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} = e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{n\alpha}{2\pi(1-\alpha)}} \int_p^1 e^{-na^2(z)/2} \frac{dz}{z}$$

$$= e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{n\alpha}{1-\alpha}} \int_p^1 \varphi(a(z)\sqrt{n}) \frac{dz}{z}. \quad (3)$$

Рассмотрим разность

$$\delta(p) = \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} - \Phi(a(p)\sqrt{n}), \quad p \in [0, 1],$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения. Если $0 \leq k \leq n-2$, то $\delta(0) = \delta(1) = 0$. Поэтому для доказательства того, что $\delta(p) < 0$ при всех $p \in (0, 1)$, достаточно показать, что: а) функция $\delta(p)$ дифференцируема по p , б) уравнение $\delta'(p) = 0$ имеет на $(0, 1)$ единственный корень p_0 и в) $\delta'(p)$ отрицательна при $p \in (0, p_0)$ и положительна при $p \in (p_0, 1)$.

Из (3) следует равенство

$$\frac{d}{dp} \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} = -e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{n\alpha}{1-\alpha}} \frac{1}{p} \varphi(a(p)\sqrt{n}).$$

С другой стороны, из равенств $B(p) = a^2(p)/2$ и (2) следует, что $B'(p) = (p-\alpha)/(p(1-p)) = a(p)a'(p)$, т.е. $a'(p) = (p-\alpha)/(p(1-p)a(p))$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \Phi(a(p)\sqrt{n}) &= \varphi(a(p)\sqrt{n}) a'(p) \sqrt{n} = \varphi(a(p)\sqrt{n}) \frac{\sqrt{n}(p-\alpha)}{p(1-p)a(p)} \\ &= -\varphi(a(p)\sqrt{n}) \frac{\sqrt{n}}{p(1-p)} \sqrt{\frac{(p-\alpha)^2}{2B(p)}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\delta'(p) = -\frac{1}{p} \varphi(a(p)\sqrt{n}) \sqrt{n} \left(e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{(p-\alpha)^2}{2(1-p)^2 B(p)}} \right). \quad (4)$$

Множитель в правой части вне скобок отрицателен, уменьшаемое в скобках не зависит от p . Из определения функции $B(p)$ легко следует, что при любом $\alpha \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \lim_{p \downarrow 0} \sqrt{\frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2 B(p)}} &= 0, \\ \lim_{p \uparrow 1} \sqrt{\frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2 B(p)}} &= \infty. \end{aligned}$$

Покажем, что функция $(p-\alpha)^2/(2(1-p)^2 B(p))$ монотонно возрастает. Найдем ее производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2 B(p)} &= \frac{1}{B(p)} \frac{\partial}{\partial p} \frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2} + \frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{B(p)} \\ &= 2 \frac{(p-\alpha)(1-\alpha)}{(1-p)^3 B(p)} - \frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2} \frac{p-\alpha}{p(1-p)B^2(p)} \\ &= \frac{2(1-\alpha)(p-\alpha)}{(1-p)^3 B^2(p)} \left(B(p) - \frac{(p-\alpha)^2}{2p(1-\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Первый множитель в правой части изменяет знак с отрицательного на положительный при $p = \alpha$. Выражение в скобках равно 0 при $p = \alpha$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left(B(p) - \frac{(p-\alpha)^2}{2p(1-\alpha)} \right) &= \frac{p-\alpha}{p(1-p)} - \frac{p^2 - \alpha^2}{2p^2(1-\alpha)} \\ &= \frac{(p+1)(p-\alpha)^2}{2p^2(1-p)(1-\alpha)} \geq 0, \end{aligned}$$

так что разность $B(p) - (p - \alpha)^2 / (2p(1 - \alpha))$ тоже меняет знак с отрицательного на положительный при $p = \alpha$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{(p - \alpha)^2}{(1 - p)^2 B(p)} \geq 0 \quad \text{при всех } p \in (0, 1).$$

Следовательно, разность $e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\alpha/(1 - \alpha)} - \sqrt{(p - \alpha)^2 / (2(1 - p)^2 B(p))}$ на отрезке $[0, 1]$ монотонно убывает от $e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\alpha/(1 - \alpha)} > 0$ до $-\infty$ и обращается в 0 при некотором $p = p_0 \in (0, 1)$. Тем самым доказано, что $\delta(p) < 0$ при всех $p \in (0, 1)$, т.е. при всех $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n - 2$, $p \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} &< \Phi(a(p)\sqrt{n}) \\ &= \Phi\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{k+1}{n} - p\right) \sqrt{2n\left(\frac{k+1}{n} \ln \frac{k+1}{np} + \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \ln \frac{n-k-1}{n(1-p)}\right)}\right) \\ &= \Phi\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{k+1}{n} - p\right) \sqrt{2nH\left(\frac{k+1}{n}, p\right)}\right) \\ &= C_{n,p}(k+1). \end{aligned}$$

Теперь докажем нижнюю оценку в (1) для $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Так как

$$\mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} = \mathbf{P}\{X_{n,1-p} \geq n-k\} = 1 - \mathbf{P}\{X_{n,1-p} \leq n-k-1\},$$

то $n-k-1 \in \{0, \dots, n-2\}$ и по доказанному

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{n,p} \leq k\} &> 1 - \Phi\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{n-k}{n} - (1-p)\right) \sqrt{2nH\left(\frac{n-k}{n}, 1-p\right)}\right) \\ &= \Phi\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{k}{n} - p\right) \sqrt{2nH\left(\frac{k}{n}, p\right)}\right) \\ &= C_{n,p}(k). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Неравенства (1) можно уточнить, если получить нетривиальные верхние оценки функции

$$\begin{aligned} \delta(p) &= e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{n\alpha}{2\pi(1-\alpha)}} \int_p^1 e^{-na^2(z)/2} \frac{dz}{z} - \Phi(a(p)\sqrt{n}) \\ &= - \int_0^p \frac{1}{z} \varphi(a(z)\sqrt{n}) \sqrt{n} \left(e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{(z-\alpha)^2}{2(1-z)^2 B(z)}} \right) dz, \quad p \in (0, 1). \end{aligned}$$

Для конкретных значений параметров этот интеграл можно оценить численно.

При выводе аналитических оценок можно использовать то, что под интегралом стоит произведение непрерывной положительной функции $f(z) = (1/z)\varphi(a(z)\sqrt{n})\sqrt{n}$ и монотонно убывающей функции $g(z) = e^{S_n^{k+1}}\sqrt{\alpha/(1-\alpha)} - \sqrt{(z-\alpha)^2/(2(1-z)^2 B(z))}$, причем $\int_0^1 f(z)g(z) dz = 0$. Поэтому если $p_0 \in (0, 1)$ таково, что $g(p_0) = 0$, то значение такого интеграла можно оценить снизу: при $0 < p \leq p_0$

$$\int_0^p f(z)g(z) dz \geq \sup_{0 < u \leq p} g(u) \int_0^u f(z) dz,$$

а при $p_0 \leq p < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^p f(z)g(z) dz &= - \int_p^1 f(z)g(z) dz \\ &\geq \sup_{p \leq u < 1} |g(u)| \int_u^1 f(z) dz. \end{aligned}$$

Используя эти соображения, равенство (3) и неравенства (1), находим, что при $p \geq p_0$

$$\begin{aligned}
 \delta(p) &= - \int_p^1 \delta'(y) dy \\
 &= - \sup_{z \in (p, 1)} \left| e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{(z-\alpha)^2}{2(1-z)^2 B(z)}} \right| \int_z^1 \frac{1}{y} \varphi(a(y)\sqrt{n})\sqrt{n} dy \\
 &= - \sup_{z \in (p, 1)} \left| 1 - e^{-S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{(1-\alpha)(z-\alpha)^2}{2\alpha(1-z)^2 B(z)}} \right| \mathbf{P}\{X_{n,z} \leq k\} \\
 &\leq - \sup_{z \in (p, 1)} \left| 1 - e^{-S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{(1-\alpha)(z-\alpha)^2}{2\alpha(1-z)^2 B(z)}} \right| C_{n,z}(k). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Аналогично, при $p < p_0$

$$\begin{aligned}
 \delta(p) &= \int_0^p \delta'(y) dy \\
 &= - \sup_{z \in (0, p)} \left| e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{(z-\alpha)^2}{2(1-z)^2 B(z)}} \right| \int_0^z \frac{1}{y} \varphi(a(y)\sqrt{n})\sqrt{n} dy \\
 &= - \sup_{z \in (0, p)} \left| 1 - e^{-S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{(1-\alpha)(z-\alpha)^2}{2\alpha(1-z)^2 B(z)}} \right| \mathbf{P}\{X_{n,z} \geq k+1\} \\
 &\leq - \sup_{z \in (0, p)} \left| 1 - e^{-S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{(1-\alpha)(z-\alpha)^2}{2\alpha(1-z)^2 B(z)}} \right| (1 - C_{n,z}(k+1)). \tag{6}
 \end{aligned}$$

В качестве нетривиальной верхней оценки $\delta(p)$ можно выбирать максимум из правых частей неравенств (5) и (6) (а если известно соотношение между p и p_0 — то правую часть соответствующего неравенства).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alfers D., Dinges H.* A normal approximation for beta and gamma tail probabilities. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, v. 65, № 3, p. 399–420.
2. *Бернштейн С. Н.* Возврат к вопросу о точности предельной формулы Лапласа. — Изв. АН СССР, 1943, т. 7, № 1, с. 3–14.
3. *Feller W.* On the normal approximation to the binomial distribution. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, № 4, p. 319–329 (исправления: 1950, v. 21, p. 302).
4. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables. — J. Amer. Statist. Assoc., 1963, v. 58, № 301, p. 13–30.
5. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
6. *Peizer D. B., Pratt J. W.* A normal approximation for binomial, F , beta and other common, related tail probabilities (part I). — J. Amer. Statist. Assoc., 1968, № 63, p. 1416–1456.
7. *Pratt J. W.* A normal approximation for binomial, F , beta and other common, related tail probabilities (part II). — J. Amer. Statist. Assoc., 1968, № 63, p. 1457–1483.
8. *Зубков А. М., Серов А. А.* Оценки числа булевых функций, имеющих аффинные приближения заданной точности. — Дискретн. матем., 2010, т. 22, № 4, с. 3–19.

Поступила в редакцию
12.VII.2012