Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Новиков, Н. Е. Кордзахия, Оценки Питмана: новый подход к вычислению асимптотической дисперсии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 603–611

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:35:25

© 2012 г.

НОВИКОВ А. А.^{*}, КОРДЗАХИЯ Н. Е.^{**}ОЦЕНКИ ПИТМАНА: НОВЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСИИ¹⁾

В работе выводится формула для дисперсии отношения интегральных экспоненциальных функционалов от дробного винеровского процесса. Это отношение возникает как предел дисперсии оценок Питмана параметра сдвига независимых одинаково распределенных наблюдений. Формула дает выражение через производные логарифмического момента интегрального функционала предельного процесса отношения правдоподобия (ОП). В частном случае, когда предельный процесс ОП является геометрическим броуновским движением, мы показываем, что найденная формула приводит к элементарному выводу известного представления асимптотической дисперсии в терминах дзета-функции Римана.

Ключевые слова и фразы: оценки Питмана, дробный винеровский процесс, интегральные функционалы, дзета-функция Римана.

1. Введение. Оценка Питмана [17] для параметра сдвига θ независимых случайных величин ξ_i , $i = 1, \dots, n$, с плотностью $f_\theta(x) = f(x - \theta)$ имеет вид

$$\hat{\theta}_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u L_u^{(n)} du}{\int_{-\infty}^{\infty} L_u^{(n)} du}, \quad L_u^{(n)} := \prod_{i=1}^n f(\xi_i - u). \quad (1)$$

Условия существования и допустимость оценок Питмана обсуждались в работе С. Порта и Ч. Стоуна [18]. Интегралы в (1) существуют для достаточно больших n при (например) условии $\mathbf{E}|\xi_i|^p < \infty$ для некоторого $p > 0$. Изложение других важных свойств оценок Питмана дано в книге А. А. Боровкова [4] (см. также [20]).

При некоторых предположениях на гладкость плотности $f_\theta(x)$ предельное распределение при $n \rightarrow \infty$ оценок Питмана было найдено в работах И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского [13], [15]. В частности, известно, что в терминах сходимости по распределению

$$n^\gamma (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \zeta, \quad (2)$$

где

$$\zeta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u L_u du}{\int_{-\infty}^{\infty} L_u du},$$

L_u — предельный процесс отношения правдоподобия (ОП) и параметр γ определяется по форме разрывов производных плотности $f_\theta(x)$.

Структура процесса

$$Y_u := \ln L_u$$

описана в [13], [15], [16] в ряде важных случаев.

^{*} Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; Department of Mathematical Sciences, University of Technology, PO Box 123, Broadway, Sydney, NSW 2007, Australia; e-mail: alex.novikov@uts.edu.au

^{**} Macquarie University, Sydney, NSW 2109, Australia; e-mail: nkordzak@hotmail.com

¹⁾ А. А. Новиков поддержан ARC Discovery grant DP120102398.

Пусть далее W_u^H , $u \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, — процесс дробного броуновского движения с параметром Хёрста $H \in (0, 1]$, $W_0^H = 0$, т.е. непрерывный гауссовский процесс с характеристиками

$$\mathbf{E} W_u^H = 0, \quad \mathbf{E} |W_u^H - W_s^H|^2 = |u - s|^{2H}, \quad u, s \in \mathbf{R}.$$

В [15] было показано, что если $f_\theta(x)$ является плотностью распределения Вейбулла, то имеет место следующее представление:

$$Y_u = W_u^H - \frac{1}{2} |u|^{2H} \quad (3)$$

с параметром $H \in (1/2, 1]$; отметим, что при этом $\gamma = 1/(2H)$ в (2). Это же представление с $H = 1/2$ появляется в задачах разладки для процесса броуновского движения [13], [15] и последовательности независимых случайных величин [2], а при $H \in [0, 1]$ появляется также в задачах оценивания параметров процессов диффузии (см. [16], [9], [12]).

Отметим, что явный вид распределения и старших моментов случайной величины ζ неизвестен даже в случае стандартного броуновского движения, т.е. когда $H = 1/2$.

В этой статье мы обсуждаем проблему вычисления дисперсии $\mathbf{D}\zeta$ только для случая (3) с $H \in [1/2, 1]$. Отметим, что наш метод, состоящий в использовании дополнительных переменных (см. детали в п. 2), потенциально может быть использован для нахождения аналитических выражений и численных оценок для $\mathbf{D}\zeta$ и в других предельных схемах, в которых предельный процесс ОП L_u является геометрическим процессом Леви.

Частный случай $H = 1/2$ в (3) изучался многими авторами. Сначала И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский в 1975 г. в [14] установили с помощью статистического моделирования, что

$$\mathbf{D}\zeta = 19.5 \pm 0.5.$$

Г. К. Голубев [11], используя формулу Фейнмана–Каца, нашел аналитическое выражение для $\mathbf{D}\zeta$ в терминах интегралов от произведения бесселевских функций и затем с помощью численного интегрирования получил

$$\mathbf{D}\zeta = 19.276 \pm 0.06.$$

Рубин и Сонг [19], используя результаты работ [11] и [21], показали, что

$$\mathbf{D}\zeta = 16 \text{ Zeta}[3] = 19.2329 \dots, \quad (4)$$

где $\text{Zeta}[k]$ — дзета-функция Римана.

В настоящей работе мы показываем (см. теорему 2 в п. 2), что в случае $H \in [1/2, 1]$ в (3) величина $\mathbf{D}\zeta$ может быть найдена в терминах производных математического ожидания от $\ln \int_0^\infty (e^{-m_1 u} L_u + e^{-m_2 u} L_{-u}) du$. В п. 3 мы иллюстрируем применение этого результата для случая $H = 1/2$, демонстрируя, что теорема 2 позволяет весьма просто вывести формулу (4).

Следующий результат о существовании экспоненциальных моментов случайной величины $|\zeta|^{2H}$ имеет также самостоятельный интерес.

Теорема 1. Если $H > (\sqrt{5}-1)/4$, то случайная величина $|\zeta|^{2H}$ экспоненциально ограничена, т.е. существует постоянная $\delta > 0$ такая, что²⁾

$$\mathbf{E} \exp\{\delta |\zeta|^{2H}\} < \infty.$$

²⁾ После того как статья была принята к печати, нам удалось доказать, что утверждение этой теоремы верно при всех $H > 0$. Соответствующая статья доступна на arXiv.org.

Этот результат и некоторые элементы его доказательства будут использованы также в дальнейшем при доказательстве теоремы 2.

Доказательство. Пусть

$$q_t = \frac{L_t}{\int_{-\infty}^{\infty} L_u du}.$$

Так как q_t является функцией плотности некоторого распределения, то, применяя неравенство Иенсена, получаем для любого $\delta \geq 0$

$$\exp\{\delta|\zeta|^{2H}\} \leq c_\delta + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta|t|^{2H}} q_t dt$$

с некоторой константой c_δ (при $H \geq 1/2$ можно положить $c_\delta = 0$). Поскольку

$$\{W_u^H, u \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{W_{-u}^H, u \geq 0\}, \quad (5)$$

то ζ имеет симметричное распределение и, следовательно,

$$\mathbf{E} \exp\{\delta|\zeta|^{2H}\} \leq c_\delta + 2 \mathbf{E} \int_0^\infty e^{\delta t^{2H}} q_t dt.$$

Из очевидной оценки

$$\int_0^1 e^{\delta t^{2H}} q_t dt \leq e^\delta \int_0^\infty q_t dt \leq e^\delta$$

следует, что

$$\mathbf{E} \exp\{\delta|\zeta|^{2H}\} \leq c_\delta + 2e^\delta + 2 \mathbf{E} \int_1^\infty e^{\delta t^{2H}} q_t dt.$$

Чтобы оценить q_t , заметим, что в силу неравенства Иенсена

$$\int_{-\infty}^\infty L_u du \geq \int_0^t \exp\{Y_u\} du \geq t \exp\left\{\frac{1}{t} \int_0^t Y_u du\right\}, \quad t > 0, \quad (6)$$

и, следовательно,

$$q_t \leq \frac{L_t}{\int_0^t L_u du} \leq \frac{1}{t} \exp\left\{Y_t - \frac{1}{t} \int_0^t Y_u du\right\}, \quad t > 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_1^\infty e^{\delta t^{2H}} q_t dt &\leq \mathbf{E} \int_1^\infty e^{\delta t^{2H}} \exp\left\{-\frac{t^{2H}}{2} + \frac{1}{t} \int_0^t \left(W_t^H - W_u^H + \frac{u^{2H}}{2}\right) du\right\} dt \\ &= \int_1^\infty \exp\left\{\delta t^{2H} - \frac{H}{2H+1} t^{2H}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{\frac{1}{t} \int_0^t W_u^H du\right\} dt, \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу теоремы Фубини и равенств по распределению

$$\{W_t^H - W_u^H, u \in [0, t]\} \stackrel{d}{=} \{W_{t-u}^H, u \in [0, t]\}, \quad \int_0^t W_{t-u}^H du \stackrel{d}{=} \int_0^t W_u^H du.$$

Случайный процесс $\int_0^t W_s^H ds$ является гауссовским с нулевым средним и дисперсией

$$\mathbf{D} \int_0^t W_s^H ds = \mathbf{E} \left(\int_0^t W_s^H ds \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \left[s^{2H} + u^{2H} - |u-s|^{2H} \right] ds du = \frac{t^{2H+2}}{2H+2}.$$

Поэтому в итоге имеем оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_1^\infty e^{\delta t^{2H}} q_t dt &\leq \int_1^\infty \exp \left\{ \delta t^{2H} - \frac{H}{2H+1} t^{2H} + \frac{1}{2t^2} \mathbf{D} \int_0^t W_s^H ds \right\} dt \\ &= \int_1^\infty \exp \left\{ \delta t^{2H} - t^{2H} \left(\frac{H}{2H+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2H+2} \right) \right\} dt, \end{aligned}$$

где последний интеграл конечен для всех δ таких, что

$$\delta < \frac{H}{2H+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2H+2} = \frac{4H^2 + 2H - 1}{2(2H+2)(2H+1)}.$$

Остается заметить, что трехчлен $4H^2 + 2H - 1$ является положительным при $H > (\sqrt{5} - 1)/4 = 0.309 \dots$.

2. Основной результат. Напомним, что мы обсуждаем здесь случай, когда процесс $Y_u = \ln L_u$ имеет представление (3) и $H \in [1/2, 1]$.

Для доказательства теоремы 2 мы будем использовать следующее представление:

$$\mathbf{D}\zeta = \frac{1}{2} \mathbf{E} \frac{\int_{-\infty}^\infty u^2 L_u du}{\int_{-\infty}^\infty L_u du}. \quad (7)$$

Это представление было доказано Г. К. Голубевым в [11] для рассматриваемого случая $H \in [1/2, 1]$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_1(m) &= \int_0^\infty e^{-mu} L_u du, & \alpha_1(m) &= \int_0^\infty u e^{-mu} L_u du, \\ \beta_2(m) &= \int_0^\infty e^{-mu} L_{-u} du, & \alpha_2(m) &= \int_0^\infty u e^{-mu} L_{-u} du, \end{aligned}$$

где m — вспомогательный параметр, $m \geq 0$. С использованием этих обозначений получим

$$\int_{-\infty}^\infty L_u du = \beta_1(0) + \beta_2(0), \quad \int_{-\infty}^\infty u L_u du = \alpha_1(0) - \alpha_2(0),$$

$$\alpha_i(m) = -\frac{\partial}{\partial m} \beta_i(m), \quad i = 1, 2,$$

и

$$\zeta = \frac{\alpha_1(0) - \alpha_2(0)}{\beta_1(0) + \beta_2(0)}. \quad (8)$$

Ввиду (5) имеем также

$$\alpha_1(0) \stackrel{d}{=} \alpha_2(0), \quad \beta_1(0) \stackrel{d}{=} \beta_2(0). \quad (9)$$

Отсюда следует, что ζ имеет симметричное распределение и $\mathbf{E} \zeta = 0$.

Для формулировки основного результата мы будем использовать функцию

$$g(m_1, m_2) := \mathbf{E} \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)) = \mathbf{E} \ln \int_0^\infty (e^{-m_1 u} L_u + e^{-m_2 u} L_{-u}) du,$$

где $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$ — вспомогательные параметры.

Теорема 2. Функция $g(m_1, m_2)$ дважды непрерывно дифференцируема и

$$\mathbf{D}\zeta = 2 \lim_{m_1 \rightarrow 0, m_2 \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1^2} - \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1 \partial m_2} \right].$$

Доказательство. Сначала заметим, что $g(m_1, m_2)$ является конечной функцией, так как ввиду неравенства $\ln x \geq x$, $x > 0$, и равенства $\mathbf{E} L_u = \mathbf{E} L_{-u} = 1$

$$g(m_1, m_2) \leq \mathbf{E} \int_0^\infty (e^{-m_1 u} L_u + e^{-m_2 u} L_{-u}) du = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} < \infty.$$

Нетрудно также проверить, что $g(m_1, m_2) > -\infty$ (см. (6)).

Дисперсия ζ конечна: $\mathbf{D}\zeta = \mathbf{E}\zeta^2 < \infty$ (см. теорему 1) и ввиду (8) равна

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\zeta = \mathbf{E} \left(\frac{\alpha_1(0) - \alpha_2(0)}{\beta_1(0) + \beta_2(0)} \right)^2 &= -2 \mathbf{E} \frac{\alpha_1(0)\alpha_2(0)}{(\beta_1(0) + \beta_2(0))^2} + \mathbf{E} \frac{\alpha_1(0)^2}{(\beta_1(0) + \beta_2(0))^2} \\ &\quad + \mathbf{E} \frac{\alpha_2(0)^2}{(\beta_1(0) + \beta_2(0))^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что последние два слагаемых равны благодаря свойству симметрии (5).

Наряду с (10) рассмотрим также следующее равенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{\alpha_1(m_1) - \alpha_2(m_2)}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)} \right)^2 &= -2 \mathbf{E} \frac{\alpha_1(m_1)\alpha_2(m_2)}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2} + \mathbf{E} \frac{\alpha_1(m_1)^2}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2} \\ &\quad + \mathbf{E} \frac{\alpha_2(m_2)^2}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы найти первое слагаемое в правой части (11) (и, соответственно, в (10)), отметим, что случайные функции $\beta_i(m)$ непрерывно дифференцируемы. Непосредственными вычислениями получаем

$$Q(m_1, m_2) := \frac{\alpha_1(m_1)\alpha_2(m_2)}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2} = -\frac{\partial^2 \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))}{\partial m_1 \partial m_2} \quad (12)$$

(напомним, что $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$). Применяя неравенство $xy \leq x^2 + y^2$, получаем

$$Q(m_1, m_2) \leq \left(\frac{\alpha_1(m_1)}{\beta_1(m_1)} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2(m_2)}{\beta_2(m_2)} \right)^2. \quad (13)$$

Теперь покажем, что правая часть этого неравенства равномерно ограничена интегрируемой случайной величиной.

Пусть

$$p_t(m) = \frac{e^{-mt} L_t}{\int_0^\infty e^{-mu} L_u du}.$$

Так как $p_t(m)$ является функцией плотности некоторого распределения, то по неравенству Коши–Буняковского

$$\left(\frac{\alpha_1(m)}{\beta_1(m)} \right)^2 = \left(\int_0^\infty t p_t(m) dt \right)^2 \leq \int_0^\infty t^2 p_t(m) dt.$$

Оценим $p_t(m)$ с помощью следующих неравенств:

$$p_t(m) \leq \frac{e^{-mt} L_t}{\int_0^t e^{-mu} L_u du} \leq \frac{L_t}{\int_0^t L_u du} \leq \frac{L_t}{t \exp\{(1/t) \int_0^t (W_u^H - u^{2H}/2) du\}}$$

и в результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^2 p_t(m) dt &\leq \int_0^\infty t \exp \left\{ -\frac{t^{2H}}{2} + \frac{1}{t} \int_0^t \left(W_u^H - W_u^H + \frac{u^{2H}}{2} \right) du \right\} dt \\ &= \int_0^\infty t \exp \left\{ -\frac{H}{2H+1} t^{2H} + \frac{1}{t} \int_0^t (W_u^H - W_u^H) du \right\} dt =: Z. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка справедлива и для второго слагаемого $(\alpha_2(m)/\beta_2(m))^2$ в (13). Применяя результаты вычислений, проведенных при доказательстве теоремы 1, нетрудно увидеть, что

$$\mathbf{E} Z = \int_0^\infty t \exp \left\{ -t^{2H} \left(\frac{H}{2H+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2H+2} \right) \right\} dt < \infty$$

для $H \geq 1/2$. Это означает, что случайная функция $Q(m_1, m_2)$ равномерно ограничена (по параметрам m_1 и m_2) интегрируемой случайной величиной. Беря математическое ожидание от обеих частей (12), на основе известных теорем о дифференцируемости по параметрам под знаком интеграла можем заключить, что функция $g(m_1, m_2)$ имеет непрерывную смешанную производную и

$$\mathbf{E} Q(m_1, m_2) = \mathbf{E} \frac{\alpha_1(m_1)\alpha_2(m_2)}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2} = -\frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1 \partial m_2}. \quad (14)$$

Второе и третье слагаемые в (11) (и, соответственно, в (10)) рассматриваются подобным образом. Можно проверить прямыми вычислениями, что

$$\frac{\partial^2 \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))}{\partial m_1^2} = -\frac{\alpha_1(m_1)^2}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2} + \frac{\int_0^\infty u^2 e^{-m_1 u} L_u du}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1^2} &= \mathbf{E} \frac{\partial^2 \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))}{\partial m_1^2} \\ &= -\mathbf{E} \frac{\alpha_1(m_1)^2}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2} + \mathbf{E} \frac{\int_0^\infty u^2 e^{-m_1 u} L_u du}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_2^2} &= \mathbf{E} \frac{\partial^2 \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))}{\partial m_2^2} \\ &= -\mathbf{E} \frac{\alpha_2(m_2)^2}{(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2))^2} + \mathbf{E} \frac{\int_0^\infty u^2 e^{-m_2 u} L_u du}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)}. \end{aligned}$$

Собирая все полученные соотношения, находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{\alpha_1(m_1) - \alpha_2(m_2)}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)} \right)^2 &= -\frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1^2} - \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_2^2} + 2 \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1 \partial m_2} \\ &\quad + \mathbf{E} \left(\frac{\int_0^\infty u^2 e^{-m_1 u} L_u du}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)} + \mathbf{E} \frac{\int_0^\infty u^2 e^{-m_1 u} L_u du}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)} \right). \end{aligned}$$

Применяя неравенство $(x - y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$, получаем

$$\left(\frac{\alpha_1(m_1) - \alpha_2(m_2)}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{\alpha_1(m_1)}{\beta_1(m_1)} \right)^2 + 2 \left(\frac{\alpha_2(m_2)}{\beta_2(m_2)} \right)^2,$$

где, как показано выше, правая часть равномерно ограничена интегрируемой случайной величиной, которая не зависит от параметров m_1 и m_2 . Поэтому, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\zeta &= \lim_{m_1 \rightarrow 0, m_2 \rightarrow 0} \mathbf{E} \left(\frac{\alpha_1(m_1) - \alpha_2(m_2)}{\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)} \right)^2 \\ &= -\lim_{m_1 \rightarrow 0, m_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1^2} + \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_2^2} - 2 \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1 \partial m_2} \right) \\ &\quad + 2 \mathbf{E} \frac{\int_0^\infty u^2 L_u du}{\beta_1(0) + \beta_2(0)}. \end{aligned} \quad (15)$$

С другой стороны, ввиду (5) формулу (7) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{D}\zeta = \mathbf{E} \frac{\int_0^\infty u^2 L_u du}{\beta_1(0) + \beta_2(0)}.$$

Для завершения доказательства теоремы 2 нужно только подставить последнее выражение в (15) и провести сокращения с учетом равенства

$$\lim_{m_1 \rightarrow 0, m_2 \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1^2} = \lim_{m_1 \rightarrow 0, m_2 \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_2^2}.$$

З а м е ч а н и я. 1. Другие формы предельного процесса ОП или, что эквивалентно, процесса Y_u появляются в задачах разладки для процессов Пуассона (см., например, [8]) и разладки процессов авторегрессии [6]. В этих работах авторы получили следующее представление:

$$Y_u = J_u^+ I\{u \geq 0\} + J_u^- I\{u < 0\}, \quad (16)$$

где J_u^+ и J_u^- — независимые процессы Леви с некоторыми специальными мерами Леви для скачков. Для этого случая представление (7), играющее ключевую роль в доказательстве теоремы 1, также выполнено, если $\mathbf{E} e^{zJ_u^-} = \mathbf{E} e^{(1-z)J_u^+}$ для всех $z \in (0, 1)$ (этот результат сообщен нам А. А. Гущиным).

2. Нетрудно проверить, что правая часть (7) может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{D}\zeta = -\frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{E} \ln \int_{-\infty}^\infty e^{-mu^2} L_u du}{\partial m}.$$

Таким образом, $\mathbf{D}\zeta$ можно найти, когда математическое ожидание $\mathbf{E} \ln \int_{-\infty}^\infty e^{-mu^2} L_u du$ известно в явном виде. К сожалению, насколько мы знаем, в литературе нет таких результатов (кроме тривиального случая $H = 1$). Наоборот, есть много результатов о распределении интегралов вида $\int_0^\infty e^{-mu+J_u} du$, где J_u — процесс Леви (см., например, [3], [5], [10] и ссылки в этих работах).

3. Существуют и другие представления для $\mathbf{D}\zeta$, справедливые при некоторых дополнительных предположениях. Например, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E} \ln \int_0^\infty e^{\varepsilon u} L_u du < \infty, \quad (17)$$

то

$$\mathbf{D}\zeta = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \mathbf{E} \ln \int_{-\infty}^\infty e^{mu} L_u du}{\partial m^2}. \quad (18)$$

Доказательство этой формулы нетрудно провести аналогично доказательству теоремы 2.

3. Вычисление $\mathbf{D}\zeta$ в случае $H = 1/2$. Мы приведем здесь элементарный вывод формулы (4) на основе результатов теоремы 2 и известного результата о распределении экспоненциального функционала от стандартного броуновского процесса. В рассматриваемом случае $\beta_1(m) = \int_0^\infty e^{W_u^{1/2} - (1/2+m)u} du$ и

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\beta_1(m)} < x\right) = \int_0^x \frac{2(2y)^{2m}}{\Gamma(2m+1)} e^{-2y} dy,$$

т.е. $\beta_1(m)$ имеет обратное гамма-распределение (см. [8]):

$$\frac{1}{\beta_1(m)} \stackrel{d}{=} \text{Gamma}[2m+1, 2]. \quad (19)$$

Заметим, что в случае $H = 1/2$ случайные функции $\beta_1(m_1)$ и $\beta_2(m_2)$ являются независимыми. Чтобы найти функцию $g(m_1, m_2)$, сначала заметим, что

$$\mathbf{E} \ln \frac{1}{\beta_1(m)} = \int_0^\infty \ln(x) \frac{2(2x)^{2m} e^{-2x}}{\Gamma(2m+1)} dx = \Psi(0, 2m+1) - \ln 2$$

для всех $m \geq 0$ (это можно проверить с помощью пакета символьных вычислений Mathematica[®]), где функция $\Psi(n, z)$ является $(n+1)$ -й производной логарифма гамма-функции $\Gamma(z)$:

$$\Psi(n, z) = \text{PolyGamma}[n, z] = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \ln \Gamma(z).$$

Учитывая (19) и тот факт, что сумма независимых случайных величин с распределением $\text{Gamma}[\cdot, 2]$ также имеет распределение $\text{Gamma}[\cdot, 2]$, получаем

$$\frac{1}{\beta_1(m_1)} + \frac{1}{\beta_2(m_2)} \stackrel{d}{=} \text{Gamma}[2m_1 + 2m_2 + 2, 2]$$

и, значит,

$$\mathbf{E} \ln \left(\frac{1}{\beta_1(m_1)} + \frac{1}{\beta_2(m_2)} \right) = \Psi(0, 2m_1 + 2m_2 + 2) - \ln 2.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)) &= \mathbf{E} \ln \left(\frac{1}{\beta_1(m_1)} + \frac{1}{\beta_2(m_2)} \right) - \mathbf{E} \ln \frac{1}{\beta_1(m_1)} - \mathbf{E} \ln \frac{1}{\beta_2(m_2)} \\ &= \Psi(0, 2m_1 + 2m_2 + 2) - \Psi(0, 2m_1 + 1) - \Psi(0, 2m_2 + 1) + \ln 2, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial^2 m_1} \mathbf{E} \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)) &= 4\Psi(2, 2m_1 + 2m_2 + 2) - 4\Psi(2, 2m_1 + 1), \\ \frac{\partial^2}{\partial m_1 \partial m_2} \mathbf{E} \ln(\beta_1(m_1) + \beta_2(m_2)) &= 4\Psi(2, 2m_1 + 2m_2 + 2) \end{aligned}$$

и по теореме 2

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\zeta &= 2 \left[\frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1^2} - \frac{\partial^2 g(m_1, m_2)}{\partial m_1 \partial m_2} \right] \Big|_{m_1=0, m_2=0} \\ &= 8\Psi(2, 2) - 8\Psi(2, 1) - 8\Psi(2, 2) = -8\Psi(2, 1). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\Psi(k, 1) = (-1)^{k+1} k! \text{Zeta}[k+1]$$

для любого $k = 1, 2, \dots$ (см. [1, формула 6.4.2]) и, значит, $\mathbf{D}\zeta = -8\Psi(2, 1) = 16 \text{Zeta}[3]$.

З а м е ч а н и е. Последний результат можно получить также по формуле (18).

Авторы выражают благодарность Юрию Кутоянцу за предложение изучить проблему расчетов асимптотических дисперсий оценок Питмана. Авторы признательны Юлии Мишуре и Александру Гушину за обсуждения и ряд предложений, которые позволили улучшить изложение статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.
2. *Antoch J., Hušková M.* Bayesian-type estimators of change points. — J. Statist. Plann. Inference, 2000, v. 91, № 2, p. 195–208.
3. *Bertoin J., Yor M.* Exponential functionals of Lévy processes. — Probab. Surv., 2005, v. 2, p. 191–212.
4. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1997, 771 с.
5. *Carmona P., Petit F., Yor M.* Exponential functionals of Lévy processes. — Lévy Processes. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 41–55.

6. Chan H., Kutoyants Y. On threshold estimation for some TAR models. Preprint, 2010.
7. Dachian S., Negri I. On compound Poisson processes arising in change-point type statistical models as limiting likelihood ratios. — *Statist. Inference Stoch. Process.*, 2011, v. 14, № 3, p. 255–271.
8. Dufresne D. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. — *Scand. Actuar. J.*, 1990, № 1–2, p. 39–79.
9. Fujii T. An extension of cusp estimation problem in ergodic diffusion processes. — *Statist. Probab. Lett.*, 2010, v. 80, № 9–10, p. 779–783.
10. Gjessing H., Paulsen J. Present value distributions with applications to ruin theory and stochastic equations. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 71, № 1, p. 123–144.
11. Голубев Г. К. О вычислении эффективности оценки максимального правдоподобия при наблюдении разрывного сигнала в белом шуме. — *Проблемы передачи информации*, 1979, т. 15, № 3, с. 61–69.
12. Gushchin A. A., Küchler U. On estimation of delay location. — *Statist. Inference Stoch. Process.*, 2011, v. 14, № 3, p. 273–305.
13. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическое поведение обобщенных байесовских оценок. — *Докл. АН СССР*, 1970, т. 194, с. 257–260.
14. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Оценка параметра разрывного сигнала в белом гауссовском шуме. — *Проблемы передачи информации*, 1975, т. 11, № 3, с. 31–43.
15. Ibragimov I. A., Has'minskii R. Z. Statistical Estimation. Asymptotic theory. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1981, 403 p.
16. Kutoyants Y. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. London: Springer-Verlag, 2004, 481 p.
17. Pitman E. J. G. The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form. — *Biometrika*, 1939, v. 30, p. 391–421.
18. Port S. C., Stone C. J. Fisher information and the Pitman estimator of a location parameter. — *Ann. Statist.*, 1974, v. 2, № 2, p. 225–247.
19. Rubin H., Song K.-S. Exact computation of the asymptotic efficiency of maximum likelihood estimators of a discontinuous signal in a Gaussian white noise. — *Ann. Statist.*, 1995, v. 23, № 3, p. 732–739.
20. Stein C. The admissibility of Pitman's estimator of a single location parameter. — *Ann. Math. Statist.*, 1959, v. 30, p. 970–979.
21. Yor M. Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 205 p.

Поступила в редакцию
1.IX.2011

© 2012 г.

САТИН Я. А.* , ЗЕЙФМАН А. И.** ,
КОРОТЫШЕВА А. В.*

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И УСЕЧЕНИЯХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ¹⁾

В статье рассматриваются нестационарные марковские цепи с непрерывным временем, описывающие марковские системы массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований.

* Вологодский государственный педагогический университет; e-mail: yacovi@mail.ru; a.korotysheva@mail.ru

** Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики РАН, Институт социально-экономического развития территорий РАН; a.zeifman@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-12026-офи-м, 12-07-00115-а, 12-07-00109-а).