Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Сатин, А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, О скорости сходимости и усечениях для одного класса марковских систем обслуживания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 3, 611–621

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:32:24

6. Chan H., Kutoyants Y. On threshold estimation for some TAR models. Preprint, 2010.
7. Dachian S., Negri I. On compound Poisson processes arising in change-point type statistical models as limiting likelihood ratios. — *Statist. Inference Stoch. Process.*, 2011, v. 14, № 3, p. 255–271.
8. Dufresne D. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. — *Scand. Actuar. J.*, 1990, № 1–2, p. 39–79.
9. Fujii T. An extension of cusp estimation problem in ergodic diffusion processes. — *Statist. Probab. Lett.*, 2010, v. 80, № 9–10, p. 779–783.
10. Gjessing H., Paulsen J. Present value distributions with applications to ruin theory and stochastic equations. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 71, № 1, p. 123–144.
11. Голубев Г. К. О вычислении эффективности оценки максимального правдоподобия при наблюдении разрывного сигнала в белом шуме. — *Проблемы передачи информации*, 1979, т. 15, № 3, с. 61–69.
12. Gushchin A. A., Küchler U. On estimation of delay location. — *Statist. Inference Stoch. Process.*, 2011, v. 14, № 3, p. 273–305.
13. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическое поведение обобщенных байесовских оценок. — *Докл. АН СССР*, 1970, т. 194, с. 257–260.
14. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Оценка параметра разрывного сигнала в белом гауссовском шуме. — *Проблемы передачи информации*, 1975, т. 11, № 3, с. 31–43.
15. Ibragimov I. A., Has'minskii R. Z. Statistical Estimation. Asymptotic theory. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1981, 403 p.
16. Kutoyants Y. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. London: Springer-Verlag, 2004, 481 p.
17. Pitman E. J. G. The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form. — *Biometrika*, 1939, v. 30, p. 391–421.
18. Port S. C., Stone C. J. Fisher information and the Pitman estimator of a location parameter. — *Ann. Statist.*, 1974, v. 2, № 2, p. 225–247.
19. Rubin H., Song K.-S. Exact computation of the asymptotic efficiency of maximum likelihood estimators of a discontinuous signal in a Gaussian white noise. — *Ann. Statist.*, 1995, v. 23, № 3, p. 732–739.
20. Stein C. The admissibility of Pitman's estimator of a single location parameter. — *Ann. Math. Statist.*, 1959, v. 30, p. 970–979.
21. Yor M. Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 205 p.

Поступила в редакцию
1.IX.2011

© 2012 г.

САТИН Я. А.* , ЗЕЙФМАН А. И.** ,
КОРОТЫШЕВА А. В.*

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И УСЕЧЕНИЯХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ¹⁾

В статье рассматриваются нестационарные марковские цепи с непрерывным временем, описывающие марковские системы массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований.

* Вологодский государственный педагогический университет; e-mail: yacovi@mail.ru; a.korotysheva@mail.ru

** Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики РАН, Институт социально-экономического развития территорий РАН; a.zeifman@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-12026-офи-м, 12-07-00115-а, 12-07-00109-а).

В предположении, что интенсивности поступления и обслуживания требований не зависят от текущего состояния системы, указан метод получения точных по порядку оценок скорости сходимости к предельному режиму и исследованы вопросы, связанные с приближенным построением предельных характеристик системы.

Ключевые слова и фразы: марковские системы обслуживания, нестационарные марковские цепи с непрерывным временем, скорость сходимости, точные оценки, усечения.

1. Введение. Классы систем массового обслуживания, описываемых процессами рождения и гибели (стационарными и нестационарными, с катастрофами), изучались начиная с 70-х годов двадцатого века многими авторами (см., например, [1]–[5], [7], [10], [12], [18], [19], [21]). С помощью методов, разработанных, в основном, одним из авторов настоящей статьи (подробное изложение приведено в [6], [9], [11], [15], [17]), для таких систем удалось получить точные оценки скорости сходимости и устойчивости.

Оказывается, этот же подход можно применить и к существенно более общему классу систем обслуживания.

Рассмотрим систему массового обслуживания, число требований в которой описывается нестационарной марковской цепью с непрерывным временем и счетным пространством состояний $E = \{0, 1, \dots\}$, причем требования могут поступать и обслуживаться группами.

Пусть $X = X(t)$, $t \geq 0$, есть число требований в системе обслуживания ($0 \leq X(t) < \infty$).

Обозначим $p_{ij}(s, t) = \Pr\{X(t) = j \mid X(s) = i\}$, $i, j \geq 0$, $0 \leq s \leq t$, переходные вероятности процесса $X = X(t)$, а $p_i(t) = \Pr\{X(t) = i\}$ — его вероятности состояний.

Будем всюду далее предполагать, что

$$\Pr(X(t+h) = j \mid X(t) = i) = \begin{cases} q_{ij}(t)h + \alpha_{ij}(t, h) & \text{при } j \neq i, \\ 1 - \sum_{k \neq i} q_{ik}(t)h + \alpha_i(t, h) & \text{при } j = i, \end{cases}$$

причем все $\alpha_i(t, h)$ суть $o(h)$ равномерно по i , т.е. $\sup_i |\alpha_i(t, h)| = o(h)$.

Предполагаем также, что $q_{i, i+k}(t) = \lambda_k(t)$, $q_{i, i-k}(t) = \mu_k(t)$ при $k > 0$.

Другими словами, мы будем исследовать системы обслуживания, в которых интенсивности поступления и обслуживания k требований в момент t в системе обслуживания ($\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ соответственно) не зависят от числа требований, находящихся в системе в момент t , причем $\lambda_{k+1}(t) \leq \lambda_k(t)$ и $\mu_{k+1}(t) \leq \mu_k(t)$ при всех k и почти при всех $t \geq 0$. Далее, в соответствии со стандартным подходом (см. подробное описание в работах [7], [15]–[17]) предположим дополнительно, что все интенсивности являются линейными комбинациями конечного числа локально интегрируемых на $[0, \infty)$ функций. Кроме того, будем предполагать, что почти при всех $t \geq 0$

$$L_\lambda(t) + L_\mu(t) = L(t) < \infty, \quad \text{где } L_\lambda(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(t), \quad L_\mu(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(t).$$

Тогда для описания вероятностной динамики процесса получаем прямую систему Колмогорова в виде дифференциального уравнения в пространстве последовательностей l_1 :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}(t), \quad (1)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \mu_4(t) & \dots & \mu_r(t) & \dots \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \dots & \mu_{r-1}(t) & \dots \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{22}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \dots & \mu_{r-2}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_r(t) & \lambda_{r-1}(t) & \lambda_{r-2}(t) & \dots & \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{rr}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

причем $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^i \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t)$.

Далее $\|\cdot\|$ будет обозначать l_1 -норму, т.е. $\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i|$, а $\|B\| = \sup_j \sum_i |b_{ij}|$, если $B = (b_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, и пусть Ω — множество всех векторов из l_1 с неотрицательными координатами и единичной нормой.

Тогда $\|A(t)\| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) \leq 2L(t)$ почти при всех $t \geq 0$, следовательно, операторная функция $A(t)$ ограничена почти при всех $t \geq 0$ и локально интегрируема на $[0; \infty)$.

Как известно (см., например, [8]), задача Коши для уравнения (1) тогда имеет единственное решение при любых начальных условиях, и из $\mathbf{p}(s) \in \Omega$ вытекает $\mathbf{p}(t) \in \Omega$ при $t \geq s \geq 0$.

Далее $E(t, k) = \mathbf{E}\{X(t) | X(0) = k\}$ будет обозначать математическое ожидание процесса (среднее число требований) в момент t при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии k .

Первые содержательные оценки для такой модели в случае конечного фазового пространства получены в [20]. В настоящей статье для более общей ситуации счетного пространства состояний будут приведены оценки скорости сходимости в случае слабой эргодичности (п. 2) и оценки, связанные с усечениями фазового пространства модели (п. 3).

2. Оценки скорости сходимости. Напомним вначале основные понятия, изучаемые далее.

Марковскую цепь $X(t)$ назовем *слабо эргодичной*, если при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(0) \in \Omega$, $\mathbf{p}^{**}(0) \in \Omega$ справедливо предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| = 0$. В этом случае *любое* $\mathbf{p}^*(t)$ называется *квазистационарным распределением* марковской цепи $X(t)$.

Марковскую цепь назовем *эргодичной* (*сильно эргодичной*), если существует вектор $\boldsymbol{\pi} \in \Omega$ такой, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \boldsymbol{\pi}\| = 0$ при любом $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} \in \Omega$. При этом вектор $\boldsymbol{\pi}$ называется *стационарным распределением* марковской цепи $X(t)$.

Марковская цепь $X(t)$ имеет предельное среднее $\phi(t)$, если при любом k выполнено условие $|E(t, k) - \phi(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Детальное обсуждение этих понятий проведено в [17].

Рассмотрим вспомогательную последовательность положительных чисел $\{d_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, и треугольную матрицу D следующего вида:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \dots \\ 0 & d_2 & d_2 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Далее помимо исходного пространства l_1 будут использоваться еще два пространства последовательностей: $l_{1E} = \{z = (p_1, p_2, \dots)^T | \|z\|_{1E} \equiv \sum n|p_n| < \infty\}$ и «основное» пространство $l_{1D} = \{z = (p_1, p_2, \dots)^T | \|z\|_{1D} \equiv \|Dz\|_1 < \infty\}$.

Положим

$$d = \inf_{i \geq 1} d_i, \quad W = \inf_k \frac{d_k}{k}.$$

Рассмотрим выражения

$$\alpha_i(t) = -a_{ii}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} - \sum_{k \geq 1} \lambda_k(t) \frac{d_{k+i}}{d_i},$$

$$\alpha(t) = \inf_{i \geq 1} \alpha_i(t), \quad \beta(t) = \sup_{i \geq 1} \alpha_i(t).$$

Положим

$$\zeta_i(t) = -a_{ii}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} + \sum_{k \geq 1} \lambda_k(t) \frac{d_{k+i}}{d_i},$$

а также

$$\xi(t) = \sup_{i \geq 1} \zeta_i(t).$$

Теорема 1. Пусть существует последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такая, что $d > 0$ и

$$\int_0^\infty \alpha(t) dt = +\infty. \quad (2)$$

Тогда $X(t)$ слабо эргодичен и при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s)$, $\mathbf{p}^{**}(s)$ и любых $s, t, 0 \leq s \leq t$, справедлива оценка

$$e^{-\int_s^t \xi(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}. \quad (3)$$

Кроме того, если начальные условия таковы, что $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \geq 0$, то при любых $s, t, 0 \leq s \leq t$, справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \geq e^{-\int_s^t \beta(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}. \quad (4)$$

Доказательство. Общий подход к исследованию в случае процессов рождения и гибели подробно описан в [15], [17], для конечномерного стационарного случая см. также обсуждение в [9]. Те же методы удастся применить и в рассматриваемой в настоящей работе ситуации, поэтому детали рассуждений здесь опущены.

Прежде всего положим $p_0 = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i$. Тогда из уравнения (1) получим

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (5)$$

где $\mathbf{f}(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)^T$ и

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \mu_1 - \lambda_1 & \mu_2 - \lambda_1 & \mu_3 - \lambda_1 & \cdots & \cdots & \mu_{r-1} - \lambda_1 & \cdots \\ \lambda_1 - \lambda_2 & a_{22} - \lambda_2 & \mu_1 - \lambda_2 & \mu_2 - \lambda_2 & \cdots & \cdots & \mu_{r-2} - \lambda_2 & \cdots \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 & a_{33} - \lambda_3 & \mu_1 - \lambda_3 & \cdots & \cdots & \mu_{r-3} - \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{r-1} - \lambda_r & \lambda_{r-2} - \lambda_r & \cdots & \cdots & \lambda_2 - \lambda_r & \lambda_1 - \lambda_r & a_{rr} - \lambda_r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим (5) как дифференциальное уравнение в пространстве l_{1D} , при этом $B(t)$ и $\mathbf{f}(t)$ локально интегрируемы при $t \geq 0$.

Оценим логарифмическую норму

$$\gamma(B(t))_{1D} = \gamma(DB(t)D^{-1})_1.$$

Имеем

$$DBD^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & (\mu_1 - \mu_2) \frac{d_1}{d_2} & (\mu_2 - \mu_3) \frac{d_1}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-1} - \mu_r) \frac{d_1}{d_r} & \cdots \\ \lambda_1 \frac{d_2}{d_1} & a_{22} & (\mu_1 - \mu_3) \frac{d_2}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-2} - \mu_r) \frac{d_2}{d_r} & \cdots \\ \lambda_2 \frac{d_3}{d_1} & \lambda_1 \frac{d_3}{d_2} & a_{33} & \cdots & (\mu_{r-3} - \mu_r) \frac{d_3}{d_r} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{r-1} \frac{d_r}{d_1} & \lambda_{r-2} \frac{d_r}{d_2} & \lambda_{r-3} \frac{d_r}{d_3} & \cdots & a_{rr} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &= \sup \left(a_{ii}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} + \sum_{k \geq 1} \lambda_k(t) \frac{d_{k+i}}{d_i} \right) \\ &= -\inf \alpha_i(t) = -\alpha(t). \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\gamma(-B(t))_{1D} = \sup \zeta_i(t) = \xi(t).$$

Отсюда, как известно, и вытекает двухсторонняя оценка (3).

Для доказательства оценки (4) положим $\mathbf{v}(t) = D(\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t))$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = DB(t)D^{-1}\mathbf{v}.$$

Все внедиагональные элементы матрицы $DB(t)D^{-1}$ неотрицательны, значит, из неотрицательности $\mathbf{v}(s)$ следует неотрицательность $\mathbf{v}(t)$ при всех $t \geq s$. А значит,

$$\frac{d \sum v_i}{dt} \geq -\beta(t) \sum v_i,$$

откуда и вытекает неравенство (4).

Следствие 1. Пусть при выполнении условий теоремы 1 найдутся положительные M , а такие, что $e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \leq Me^{-a(t-s)}$ для всех $0 \leq s \leq t$. Тогда $X(t)$ экспоненциально эргодичен в норме пространства l_{1D} , т.е. при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s)$, $\mathbf{p}^{**}(s)$ и любых s, t , $0 \leq s \leq t$, справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq Me^{-a(t-s)} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}.$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 1 справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 \leq \frac{4}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \sum_{i \geq 1} g_i |p_i^*(s) - p_i^{**}(s)|$$

при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s)$, $\mathbf{p}^{**}(s)$ и любых s, t , $0 \leq s \leq t$, где $g_i = \sum_{n=1}^i d_n$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться оценками из [17], позволяющими сравнить рассматриваемые нормы:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_{1D} &= d_1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + d_2 \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + d_3 \left| \sum_{i=3}^{\infty} p_i \right| + \cdots \\ &\geq d \left(\left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=3}^{\infty} p_i \right| + \cdots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{d}{2} \left(\left(\left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| \right) + \left(\left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=3}^{\infty} p_i \right| \right) + \dots \right) \\
&\geq \frac{d}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |p_i| = \frac{d}{2} \|\mathbf{z}\|_1,
\end{aligned} \tag{7}$$

и, значит,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 &\leq 2\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_1 \leq \frac{4}{d} \|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \\
&\leq \frac{4}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \\
&\leq \frac{4}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \sum_{i \geq 1} g_i |p_i^*(s) - p_i^{**}(s)|.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть при выполнении условий предыдущей теоремы последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такова, что $W > 0$. Тогда $X(t)$ имеет предельное среднее $\phi(t)$ и при любых k и $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$|E(t, k) - \phi(t)| \leq \frac{2g_k}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du}.$$

Доказательство. Используя оценки из [17] для сравнения соответствующих норм, получаем

$$\|\mathbf{z}\|_{1D} = d_1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + d_2 \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + \dots \geq W \sum_{k \geq 1} k \left| \sum_{i \geq k} p_i \right| \geq \frac{W}{2} \|\mathbf{z}\|_{1E}$$

вместо (7). Теперь, выбирая в качестве предельного среднего $\phi(t) = E(t, 0)$ и соответствующие $\mathbf{p}^*(t)$, $\mathbf{p}^{**}(t)$, получаем при произвольном $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
|E(t, k) - \phi| &\leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1E} \\
&\leq \frac{2}{W} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq \frac{2}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \|\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_0\|_{1D} = \frac{2g_k}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь важнейшие частные случаи.

Теорема 3. Пусть $X(t)$ стационарна (т.е. интенсивности λ_k и μ_k не зависят от t) и существует последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такая, что $d > 0$ и $\alpha = \inf_{i \geq 1} \alpha_i > 0$. Тогда $X(t)$ сильно эргодичен (со стационарным распределением π) и при любом начальном условии $\mathbf{p}^*(0)$ и любом $t \geq 0$ справедливы оценки

$$e^{-\xi t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D} \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \pi\|_{1D} \leq e^{-\alpha t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D}$$

и

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \pi\|_1 \leq \frac{4}{d} e^{-\alpha t} \sum_{i \geq 1} g_i |p_i^*(0) - \pi_i|.$$

Кроме того, если начальное условие таково, что $D(\mathbf{p}^*(0) - \pi) \geq 0$, то при любом $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \pi\|_{1D} \geq e^{-\beta t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D}.$$

Замечание 1. Аналогично теореме 2, если выполнено дополнительное условие $W > 0$, получаются результат о предельном среднем и оценка скорости сходимости к нему. Однако при этом теперь в качестве предельного среднего естественно выбрать постоянное $\phi = \sum k \pi_k$, соответствующее стационарному распределению. При этом оценка скорости сходимости выглядит следующим образом:

$$|E(t, k) - \phi| \leq \frac{2}{W} e^{-\alpha t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D}.$$

Теорема 4. Если интенсивности поступления и обслуживания требований λ_k и μ_k являются 1-периодическими по t и существует последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такая, что $d > 0$, а $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t) dt > 0$, то соответствующие предельный режим $\mathbf{p}^{**}(t)$ и предельное среднее $\phi(t)$ (если $W > 0$) можно выбрать также 1-периодическими. При этом процесс будет вдобавок экспоненциально эргодичным и можно положить $M = \exp(\sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \alpha(u) du)$, $a = \alpha^*$.

Рассмотрим теперь отдельно уточнения, появляющиеся в том случае, когда пространство состояний конечно ($E_N = \{0, 1, \dots, N\}$).

Отметим прежде всего, что вид матрицы (6) при этом, вообще говоря, изменится, а именно, будет следующим:

$$DBD^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_N & (\mu_1 - \mu_2) \frac{d_1}{d_2} & (\mu_2 - \mu_3) \frac{d_1}{d_3} & \cdots & (\mu_{N-1} - \mu_N) \frac{d_1}{d_N} \\ (\lambda_1 - \lambda_N) \frac{d_2}{d_1} & a_{22} - \lambda_{N-1} & (\mu_1 - \mu_3) \frac{d_2}{d_3} & \cdots & (\mu_{N-2} - \mu_N) \frac{d_2}{d_N} \\ (\lambda_2 - \lambda_N) \frac{d_3}{d_1} & (\lambda_1 - \lambda_{N-1}) \frac{d_3}{d_2} & a_{33} - \lambda_{N-2} & \cdots & (\mu_{N-3} - \mu_N) \frac{d_3}{d_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\lambda_{N-1} - \lambda_N) \frac{d_N}{d_1} & (\lambda_{N-2} - \lambda_{N-1}) \frac{d_N}{d_2} & (\lambda_{N-3} - \lambda_{N-2}) \frac{d_N}{d_3} & \cdots & a_{NN} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно изменятся и выражения для $\alpha_i(t)$ и $\zeta_i(t)$.

При этом $\|\mathbf{z}\|_{1D} = d_1 |\sum_{i=1}^N p_i| + d_2 |\sum_{i=2}^N p_i| + \cdots + d_N |p_N| \leq g_N \|\mathbf{z}\|_1$, так что вместо теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть для системы с конечным фазовым пространством E_N существует последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такая, что выполнено условие (2). Тогда $X(t)$ слабо эргодичен и при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s)$, $\mathbf{p}^{**}(s)$ и любых s, t , $0 \leq s \leq t$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2g_N} e^{-\int_s^t \xi(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_1 \\ & \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 \leq \frac{4g_N}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_1. \end{aligned}$$

Кроме того, если начальные условия таковы, что $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \geq 0$, то при любых s, t , $0 \leq s \leq t$, справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 \geq \frac{d}{2g_N} e^{-\int_s^t \beta(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_1.$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если удастся выбрать d_i так, чтобы функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ оказались одинаковыми (т.е. $\alpha_i(t)$ не зависят от i), то получится точная по порядку оценка скорости сходимости.

З а м е ч а н и е 3. Если вдобавок интенсивности поступления и обслуживания требований постоянны, причем $\lambda_1 > \lambda_2$ и $\mu_1 > \mu_2$, то, как вытекает из теоремы 9 в [17] (см. также [9, следствие 1]), существует последовательность $\{d_i\}$, удовлетворяющая условиям предыдущего замечания (т.е. такая, что $\alpha = \beta$). Тем самым, эта последовательность дает точное значение параметра сходимости.

3. Аппроксимация. Рассмотрим здесь задачу о построении предельного среднего с помощью аппроксимации системой с конечным (или меньшим) фазовым пространством. Впервые такая методика для простейших ситуаций была описана в [13], а построение различных предельных характеристик для нестационарных процессов рождения и гибели с помощью аппроксимаций конечными процессами рассматривалось в [16], [19].

Для простоты будем предполагать в этом пункте, что почти при всех $t \geq 0$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} L_\lambda(t) &\leq L_\lambda < \infty, & L_\mu(t) &\leq L_\mu < \infty, & \lambda_k(t) &= 0 \quad \text{при } k > r, \\ \|\mathbf{f}(t)\|_{1D} &= d_1 \lambda_1(t) + (d_1 + d_2) \lambda_2(t) + \dots = \sum_{i \geq 1} g_i \lambda_i(t) \leq K < \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь в предположении экспоненциальной эргодичности процесса можно получить оценку

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq \|V(t)\|_{1D} \|\mathbf{z}(0)\|_{1D} + \int_0^t \|V(t, \tau)\|_{1D} \|\mathbf{z}(\tau)\|_{1D} d\tau \leq M e^{-at} \|\mathbf{z}(0)\|_{1D} + \frac{KM}{a},$$

где $V(t, \tau)$ — оператор Коши уравнения (5).

Значит, если взять $X(0) = 0$, то соответственно $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)^T$, $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$, а тогда будет выполнено неравенство

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq \frac{KM}{a}.$$

Рассматривая теперь соответствующее решение уравнения (1) и предполагая, соответственно, что все $p_i(t)$ неотрицательны, получаем

$$\|z(t)\|_{1D} = \sum_{i \geq 1} p_i(t) \sum_{k=1}^i d_k \geq (d_1 + \dots + d_n) \sum_{i \geq n} p_i(t) = g_n \sum_{i \geq n} p_i(t),$$

откуда

$$\sum_{i=n}^{\infty} p_i(t) \leq \frac{KM}{ag_n}. \quad (9)$$

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что из (9) вытекает следующая оценка числа требований в системе:

$$\Pr\{X(t) < n\} \geq 1 - \frac{KM}{ag_n}.$$

Первые оценки такого рода были получены в [14].

Введем следующие выражения:

$$\omega(m, n) = \sup_{k \geq 0} \frac{m+k}{g_{n+k}}, \quad m, n \geq 0.$$

Рассмотрим теперь «усеченный» процесс $X_{N-1}(t)$ с состояниями от 0 до $N-1$, заданный соответствующей матрицей

$$A_{N-1}(t) = \begin{pmatrix} b_{00} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \dots & \mu_{N-1} \\ \lambda_1 & b_{11} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{N-2} \\ \lambda_2 & \lambda_1 & b_{22} & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N-1} & \lambda_{N-2} & \lambda_{N-3} & \dots & \lambda_2 & \lambda_1 & b_{N-1, N-1} \end{pmatrix},$$

причем $b_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^i \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{N-1-i} \lambda_k(t)$.

Векторы вероятностей состояний для исходного и усеченного процесса описываются соответственно уравнениями (1) и

$$\frac{d\mathbf{p}^*}{dt} = A_{N-1}(t) \mathbf{p}^*. \quad (10)$$

Перепишем (1) в следующей форме (отождествляя конечномерный вектор и соответствующий ему счетный вектор с теми же «начальными» ненулевыми координатами):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_{N-1}(t) \mathbf{p} + (A(t) - A_{N-1}(t)) \mathbf{p}.$$

Тогда получаем

$$\mathbf{p}(t) = U_{N-1}(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_{N-1}(t, \tau)(A(\tau) - A_{N-1}(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau$$

и

$$\mathbf{p}^*(t) = U_{N-1}(t)\mathbf{p}^*(0),$$

где $U_{N-1}(t, \tau)$ — оператор Коши для уравнения (10).

Будем считать, что $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^*(0)$. Тогда

$$\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t) = \int_0^t U_{N-1}(t, \tau)(A(\tau) - A_{N-1}(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau.$$

Оценим $\|U_{N-1}(t, \tau)(A(\tau) - A_{N-1}(\tau))\mathbf{p}(\tau)\|_{1E}$.

Запишем

$$A(t) - A_{N-1}(t) = \begin{pmatrix} C_{0,0}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_N(t) & \dots \\ 0 & C_{1,1}(t) & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-1}(t) & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-2}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N-r,N-r}(t) & 0 & \dots & \mu_r(t) & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{N-r+1,N-r+1}(t) & \dots & \mu_{r-1}(t) & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_{r-2}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_N(t) & \lambda_{N-1}(t) & \dots & \lambda_r(t) & \lambda_{r-1}(t) & \dots & a_{N,N} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(A - A_{N-1})\mathbf{p} = \begin{pmatrix} C_{0,0}p_0 + \mu_N p_N + \mu_{N+1}p_{N+1} + \dots \\ C_{1,1}p_1 + \mu_{N-1}p_N + \mu_N p_{N+1} + \dots \\ C_{2,2}p_2 + \mu_{N-2}p_N + \mu_{N-1}p_{N+1} + \dots \\ \dots \\ C_{N-1,N-1}p_{N-1} + \mu_1 p_N + \mu_2 p_{N+1} + \dots \\ \lambda_N p_0 + \dots + \lambda_1 p_{N-1} + a_{N,N}p_N + \mu_1 p_{N+1} + \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_{N-1} \\ R_N \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Далее, отметим, что

$$U_{N-1} = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0,N-1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N-1,0} & u_{N-1,1} & \dots & u_{N-1,N-1} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

А тогда

$$\begin{aligned} & \|U_{N-1}(A - A_{N-1})\mathbf{p}\|_{1E} \\ & \leq (N-1)(|R_1| + |R_2| + \dots + |R_{N-1}|) + N|R_N| + (N+1)|R_{N+1}| + \dots \\ & \leq (N-1)(|R_1| + |R_2| + \dots + |R_{N-1}|) + N|a_{N,N}|p_N + (N+1)|a_{N+1,N+1}|p_{N+1} + \dots \\ & \leq \mu_1(Np_{N+1} + (N+1)p_{N+2} + \dots) + \mu_2(Np_{N+2} + (N+1)p_{N+3} + \dots) + \dots \\ & \leq \lambda_1(Np_{N-1} + (N+1)p_N + \dots) + \dots + \lambda_r(Np_{N-r} + (N+1)p_{N-r+1} + \dots). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждую группу слагаемых в правой части последнего неравенства, предполагая, что $N > r$. Тогда $|C_{kk}(t)| = 0$ при $k < N - r$.

Первая группа оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & (N-1)(|R_1| + |R_2| + \dots + |R_{N-1}|) \\ & \leq (N-1) \left(\sum_{k=N-r+1}^{N-1} |C_{kk}| p_k + p_N \sum_{k=1}^N \mu_k + p_{N+1} \sum_{k=2}^{N+1} \mu_k + \dots \right) \\ & \leq (N-1) \left(\lambda_r p_{N-r} + (\lambda_{r-1} + \lambda_r) p_{N-r+1} + \dots + (\lambda_r + \dots + \lambda_1) p_{N-1} + \frac{L_\mu K M}{ag_N} \right) \\ & \leq (N-1) \left(\frac{L_\lambda K M}{ag_{N-r}} + \frac{L_\mu K M}{ag_N} \right). \end{aligned}$$

Чтобы оценить остальные выражения, отметим, что

$$\sum_{k \geq 0} (m+k) p_{n+k} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{m+k}{g_{n+k}} g_{n+k} p_{n+k} \leq \omega(m, n) \|\mathbf{z}\|_{1D} \leq \frac{\omega(m, n) K M}{a}.$$

Тогда

$$N|a_{N,N}| p_N + (N+1)|a_{N+1,N+1}| p_{N+1} + \dots \leq \frac{\omega(N, N) K M (L_\lambda + L_\mu)}{a}.$$

Третья группа слагаемых оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mu_1(N p_{N+1} + (N+1) p_{N+2} + \dots) + \mu_2(N p_{N+2} + (N+1) p_{N+3} + \dots) + \dots \\ & \leq \frac{K M}{a} \sum_{k \geq 1} \mu_k \omega(N, N+k). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \lambda_1(N p_{N-1} + (N+1) p_N + \dots) + \lambda_2(N p_{N-2} + (N+1) p_{N-1} + \dots) \\ & \quad + \dots + \lambda_r(N p_{N-r} + (N+1) p_{N-r+1} + \dots) \\ & \leq \frac{K M}{a} \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k). \end{aligned}$$

А тогда

$$\begin{aligned} |E(t, 0) - E_{N-1}(t, 0)| & \leq \frac{K M t}{a} \left((N-1) \left(\frac{L_\lambda}{g_{N-r}} + \frac{L_\mu}{g_N} \right) + \omega(N, N) (L_\lambda + L_\mu) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k \geq 1} \mu_k \omega(N, N+k) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) \right) \quad (11) \end{aligned}$$

и получаем следующий результат.

Теорема 6. Пусть выполнены условия следствия 1 и теоремы 2, а также условия (8). Тогда при всех $t \geq 0$ справедлива оценка (11).

З а м е ч а н и е 5. Условия (8) можно, очевидно, существенно ослабить за счет усложнения оценок.

З а м е ч а н и е 6. В стандартных системах обслуживания вспомогательная последовательность $\{d_i\}$ является геометрической прогрессией со знаменателем больше единицы. При этом правая часть (11) быстро стремится к нулю при любом фиксированном t , если $N \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969, 511 с.
2. Гнеденко Б. В., Макаров И. П. Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей. — Дифф. уравнения, 1971, т. 9, с. 1696–1698.
3. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987, 336 с.
4. Гнеденко Б. В., Соловьев А. Д. Об условиях существования финальных вероятностей марковского процесса. — Math. Operationsforsch. Statist., 1973, № 5, p. 379–390.
5. Гнеденко Д. Б. Об одном обобщении формулы Эрланга. — Zastosow. Mat., 1971, v. 12, p. 239–242.
6. Granovsky B. L., Zeifman A. I. The N -limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains. — Appl. Stoch. Models Bus. Ind., 2000, v. 16, № 4, p. 235–248.
7. Granovsky B. L., Zeifman A. I. Nonstationary queues: estimation of the rate of convergence. — Queueing Syst., 2004, v. 46, № 3–4, p. 363–388.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970, 534 с.
9. Ван Доорн Э. А., Зейфман А. И., Панфилова Т. Л. Оценки и асимптотика скорости сходимости для процессов рождения и гибели. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 18–38.
10. van Doorn E. A., Zeifman A. I. On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system. — Queueing Syst., 2009, v. 63, № 1–4, p. 241–252.
11. Mitrophanov A. Yu. Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains. — J. Appl. Probab., 2003, v. 40, № 4, p. 970–979.
12. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Советское радио, 1971, 520 с.
13. Зейфман А. И. О погрешности усечения системы рождения и гибели. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1988, т. 28, № 12, с. 1906–1907.
14. Zeifman A. I. On the estimation of probabilities for birth and death processes. — J. Appl. Probab., 1995, v. 32, № 3, p. 623–634.
15. Zeifman A. I. Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. — Stochastic Process. Appl., 1995, v. 59, № 1, p. 157–173.
16. Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G. Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes. — Queueing Syst., 2006, v. 52, № 2, p. 139–151.
17. Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А. Марковские цепи и модели с непрерывным временем. М.: Элекс-КМ, 2008, 167 с.
18. Зейфман А. И. О нестационарной модели Эрланга. — Автомат. и телемех., 2009, № 12, с. 71–80.
19. Зейфман А. И., Коротышева А. В., Панфилова Т. Л., Шоргин С. Я. Оценки устойчивости для некоторых систем обслуживания с катастрофами. — Информ. и ее примен., 2011, т. 5, № 3, с. 27–33.
20. Сатин Я. А., Зейфман А. И., Коротышева А. В., Шоргин С. Я. Об одном классе марковских систем обслуживания. — Информ. и ее примен., 2011, т. 5, № 4, с. 6–12.
21. Zeifman A., Korotysheva A. Perturbation bounds for $M_t/M_t/N$ queue with catastrophes. — Stoch. Models, 2012, v. 28, № 1, p. 49–62.

Поступила в редакцию
16.III.2012