Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, О времени достижения высокого уровня случайным блужданием в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 625–648

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:00:12

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 57
Выпуск 4, 2012 год
октябрь, ноябрь, декабрь

© 2012 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

О ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин (p_i, q_i) , $i \in \mathbf{Z}$, причем $p_0 + q_0 = 1$ и п.н. $p_0 > 0$, $q_0 > 0$. Рассматривается случайное блуждание в случайной среде (p_i, q_i) , $i \in \mathbf{Z}$. Это означает, что при фиксированной случайной среде блуждающая частица совершает переход из состояния i либо в состояние $(i + 1)$ с вероятностью p_i , либо в состояние $(i - 1)$ с вероятностью q_i . Предполагается, что случайная величина $\ln(q_0/p_0)$ принадлежит (без центрирования) области притяжения некоторого устойчивого (и не являющегося односторонним) закона с индексом $\alpha \in (0, 2]$. Пусть T_n означает время достижения уровня n указанным блужданием. Доказан принцип инвариантности для логарифма случайного процесса $\{T_{\lfloor ns \rfloor}, s \in [0, 1]\}$ при $n \rightarrow \infty$. Этот результат получен на основе предельной теоремы для ветвящегося процесса в случайной среде с одним иммигрантом в каждом поколении.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание в случайной среде, ветвящийся процесс в случайной среде с иммиграцией, функциональные предельные теоремы, устойчивые процессы Леви.

1. Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин (p_i, q_i) , $i \in \mathbf{Z}$, причем $p_0 + q_0 = 1$ и п.н. $p_0 > 0$, $q_0 > 0$. Совокупность $\{(p_i, q_i), i \in \mathbf{Z}\}$ называется *случайной средой*. Случайное блуждание в случайной среде (СБСС) задается в два этапа. Сначала разыгрывается случайная среда, а затем в соответствии с ней разыгрывается случайное блуждание на множестве целых чисел, при этом из состояния i блуждающая частица переходит в состояние $i + 1$ с вероятностью p_i , а в состояние $i - 1$ с вероятностью q_i .

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: viafan@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ-ННИО (грант 08-01-91-954) и программы «Динамические системы и теория управления» Президиума РАН.

Формализуем это определение. Как обычно, символы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ обозначают вероятность и математическое ожидание, а символы $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{E}}$ указывают еще на то, что случайная среда фиксирована.

Последовательность целочисленных случайных величин $\{X_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *случайным блужданием в случайной среде* $\{(p_i, q_i), i \in \mathbf{Z}\}$, если $X_0 = 0$ и для произвольных $n \in \mathbf{N}_0, i \in \mathbf{Z}$

$$\hat{\mathbf{P}}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = i) = p_i$$

и

$$\hat{\mathbf{P}}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = i) = q_i.$$

Введем момент первого достижения уровня $n \in \mathbf{N}$ последовательностью $\{X_k, k \in \mathbf{N}_0\}$:

$$T_n = \min\{k: X_k = n\}.$$

Положим $T_0 = 0$. Известная теорема Риттера [1] утверждает, что если

$$\mathbf{E} \ln \frac{q_0}{p_0} = 0, \quad \mathbf{E} \ln^2 \frac{q_0}{p_0} := \sigma^2$$

и $p_0 \in (\nu, 1 - \nu)$ п.н. при некотором постоянном $\nu \in (0; 0,5)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln T_n}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{D} \frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

где символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению, β — положительная случайная величина с преобразованием Лапласа

$$\mathbf{E} \exp(-\lambda \beta) = \frac{\tanh(\sqrt{2\lambda})}{\sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

Наша задача состоит в усилении теоремы Риттера в двух направлениях. Во-первых, рассматривается существенно более общая случайная среда.

Основное предположение: случайная величина $\ln(q_0/p_0)$ принадлежит (без центрирования) области притяжения некоторого устойчивого (и не являющегося односторонним) закона с индексом $\alpha \in (0, 2]$.

Во-вторых, вместо случайной величины T_n рассматривается случайный процесс $\{T_{[ns]}, s \in [0, 1]\}$ и помимо одномерной сходимости устанавливается функциональная предельная теорема (см. теорему 3).

Нетрудно понять, что при всех $n \in \mathbf{N}$

$$T_n = n + 2 \sum_{i=-\infty}^n \zeta_i^{(n)}, \quad (1)$$

где $\zeta_i^{(n)}$ — число переходов блуждающей частицы из состояния i в состояние $i - 1$ на временном промежутке $[0, T_n)$. В работе [2] показано, что

случайная последовательность $\{\zeta_n^{(n)}, \zeta_{n-1}^{(n)}, \zeta_{n-2}^{(n)}, \dots\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС) с единственным иммигрантом в каждом из поколений, начиная с нулевого и заканчивая $(n-1)$ -м. При этом $\zeta_{n-i}^{(n)}$ означает численность i -го поколения ВПСС без учета самих иммигрантов, в частности $\zeta_n^{(n)} = 0$. Вероятность того, что (при фиксированной среде) представитель i -го поколения (или присоединившийся иммигрант) произведет k непосредственных потомков равна $p_{n-i}q_{n-i}^k$, $k \in \mathbf{N}_0$.

Предположим, что $\{Z_i^{(n)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ — ВПСС с единственным иммигрантом в каждом из поколений, начиная с нулевого и заканчивая $(n-1)$ -м, и с геометрическим распределением $\{p_{i+1}q_{i+1}^k, k \in \mathbf{N}_0\}$ числа непосредственных потомков представителя i -го поколения (или присоединившегося иммигранта), $i \in \mathbf{N}_0$. В силу сказанного и соотношения (1), при $n \in \mathbf{N}$

$$T_n \stackrel{d}{=} n + 2 \sum_{i=0}^{+\infty} Z_i^{(n)}. \quad (2)$$

Опишем понятия и утверждения, необходимые для формулировки основных результатов. Рассмотрим независимые и одинаково распределенные случайные величины

$$\varkappa_i = \ln \frac{q_i}{p_i}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Они формируют *сопровождающее случайное блуждание*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \varkappa_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ввиду основного предположения справедлива функциональная предельная теорема Скорохода (см. [3, гл. 16]): существуют такие положительные нормировочные постоянные C_n , что при $n \rightarrow \infty$

$$W_n \xrightarrow{D} W, \quad (3)$$

где W_n — случайный процесс, построенный по блужданию $\{S_n\}$:

$$W_n(t) = C_n^{-1} S_{[nt]}, \quad t \geq 0; \quad (4)$$

$W = \{W(t), t \geq 0\}$ — строго устойчивый процесс Леви индекса $\alpha \in (0, 2]$; символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода. Известно, что $C_n = n^{1/\alpha} l(n)$, где $\{l(n)\}$ — некоторая медленно меняющаяся последовательность. Конечномерные распределения процесса W являются абсолютно непрерывными. По основному предположению, $\rho := \mathbf{P}(W(1) > 0) \in (0, 1)$. Таким

образом, выполняется условие Спичера–Донейя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n > 0) = \rho \in (0, 1).$$

Известно, что если указанное условие выполнено, то случайное блуждание $\{S_n\}$ является осциллирующим и, следовательно (см. [4]), осциллирующим является СБСС $\{X_n\}$.

Рассмотрим некоторый строго устойчивый процесс Леви W индекса α (будем называть его просто *процессом Леви*) и последовательность независимых случайных величин $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, распределенных по показательному закону с параметром 1. Предполагается, что процесс W и последовательность $\{\gamma_n, n \in \mathbf{N}\}$ независимы. Положим $L(t) = \inf_{s \in [0, t]} W(s)$, $t \geq 0$, и назовем процесс $\{L(t), t \geq 0\}$ (*нижним*) *уровнем процесса Леви*.

Теперь опишем распределение случайного процесса $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$, играющего важную роль в дальнейшем. Рассмотрим произвольное натуральное $m \geq 3$ и произвольные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$, среди которых есть 1 (например, $t_l = 1$, $1 < l < m$). Случайный вектор $(Y(t_1), \dots, Y(t_m))$ совпадает по распределению со следующим случайным вектором $\hat{Y} := (\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m)$. Первая координата $\hat{Y}_1$ равна γ_1 , другие координаты $\hat{Y}_k$ при $k \in \{2, \dots, l\}$ также являются членами последовательности $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Пусть известна координата $\hat{Y}_k$ при некотором $k < l$, например, $\hat{Y}_k = \gamma_i$ при некотором $i \in \mathbf{N}$. Если в момент t_{k+1} уровень процесса Леви сохраняется, т.е. $L(t_{k+1}) = L(t_k)$, то $\hat{Y}_{k+1} = \hat{Y}_k$. Если же в момент t_{k+1} уровень процесса Леви падает, т.е. $L(t_{k+1}) < L(t_k)$, то $\hat{Y}_{k+1} = \gamma_{i+1}$. Далее, если при некотором $k > l$ уровень процесса Леви в момент t_k является таким же, как в момент 1, т.е. $L(t_k) = L(1)$, то $\hat{Y}_k = \hat{Y}_l$. Если же $L(t_k) < L(1)$, то $\hat{Y}_k = 0$.

Положим при $n \in \mathbf{N}_0$

$$a_n = e^{-S_n}, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \quad (b_0 = 0).$$

Введем при $n \in \mathbf{N}$ случайный процесс Y_n : $Y_n(0) = 0$, а при $t > 0$

$$Y_n(t) = \frac{a_{\lfloor nt \rfloor}}{b_{n \wedge \lfloor nt \rfloor}} Z_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}.$$

Пусть символ $\Rightarrow$ означает сходимость случайных процессов в смысле конечномерных распределений.

Теорема 1. *Если выполнено основное предположение, то*

$$Y_n \Rightarrow Y \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Положим при $0 \leq s \leq t$

$$L(s, t) = \inf_{u \in [s, t]} W(u).$$

Известно, что случайные величины $L(s, t)$, $s, t \geq 0$, и случайные векторы, составленные из них, имеют абсолютно непрерывные распределения.

Положим для $s \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} R^{(s)}(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, s); \\ W(t) - L(s, t), & t \in [s, 1]; \\ W(t) - L(s, 1), & t > 1; \end{cases} \\ T^{(s)} &= \inf\{t > 1: R^{(s)}(t) < 0\}; \\ U^{(s)}(t) &= \begin{cases} R^{(s)}(t), & t \in [0, T^{(s)}); \\ 0, & t \geq T^{(s)}; \end{cases} \\ V(s) &= \sup_{t \in [s, +\infty)} U^{(s)}(t); \quad V(1) = 0. \end{aligned}$$

Положим при $n \in \mathbf{N}$

$$U_n(t) = C_n^{-1} \ln(Z_{[nt]}^{(n)} + 1), \quad t \geq 0,$$

где $\{C_n\}$ — та же последовательность, что фигурирует в (4). Пусть символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

Теорема 2. *Если выполнено основное предположение, то*

$$\{U_n(t), t \geq 0\} \xrightarrow{D} \{U^{(0)}(t), t \geq 0\} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. В теоремах 1 и 2 рассматриваются ВПСС с иммиграцией. Эти теоремы во многом напоминают соответствующие результаты для ВПСС без иммиграции, для которых создана обширная теория (см., например, работы [5], [6], [7] в случае annealed approach и [8], [9], [10] в случае quenched approach). При этом важно отметить, что ВПСС без иммиграции рассматриваются при условии невырождения, а ВПСС с иммиграцией — без какого-либо условия.

Из теоремы 2 в качестве следствия получаем основной результат. При $n \in \mathbf{N}$ введем случайный процесс $\{V_n(s), s \in [0, 1]\}$: $V_n(0) = 0$, а при $s \in (0, 1]$

$$V_n(s) = C_n^{-1} \ln T_{[ns]}.$$

Теорема 3. *Если выполнено основное предположение, то*

$$\{V_n(s), s \in [0, 1]\} \Rightarrow \{V(1-s), s \in [0, 1]\} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Если, к тому же, процесс Леви W не имеет положительных скачков, то справедлива сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

2. Найдем некоторые производящие функции при фиксированной случайной среде. Пусть $Z_{i,j}$ означает число потомков в i -м поколении от иммигранта, присоединившегося к j -му поколению, $i \geq j \geq 0$. Ясно, что случайная последовательность $\{Z_{i,j}, i \in \{j+1, j+2, \dots\}\}$ является обычным ВПСС (при этом $Z_{j,j}$ равно 0, а не 1). Хорошо известно (см. [11]), что при $i \in \mathbf{N}$ и $s \in [0, 1)$

$$\widehat{\mathbf{E}} s^{Z_{i,0}} = 1 - \frac{1}{a_i(1-s)^{-1} + b_i}.$$

Следовательно, при $i \in \{j+1, j+2, \dots\}$

$$\widehat{\mathbf{E}} s^{Z_{i,j}} = 1 - \frac{1}{a_{i,j}(1-s)^{-1} + b_{i,j}},$$

где $a_{i,j} = \exp(S_j - S_i)$, $b_{i,j} = \sum_{k=j}^{i-1} a_{k,j}$. Откуда находим, что при $i \in \{j+1, j+2, \dots\}$ и $s \in [0, 1)$

$$\widehat{\mathbf{E}} s^{Z_{i,j}} = 1 - \frac{a_j}{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_j}. \quad (5)$$

Заметим, что

$$Z_0^{(n)} = 0, \quad Z_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{i \wedge n-1} Z_{i,j}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

При фиксированной случайной среде слагаемые в последней сумме независимы, поэтому, учитывая соотношение (5), получаем, что при $i \in \mathbf{N}$ и $s \in [0, 1)$

$$\widehat{\mathbf{E}} s^{Z_i^{(n)}} = \prod_{j=0}^{i \wedge n-1} \left(1 - \frac{a_j}{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_j} \right).$$

Поскольку

$$1 - \frac{a_j}{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_j} = \frac{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_{j+1}}{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_j},$$

то

$$\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{a_j}{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_j} \right) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_{j+1}}{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_j} = \frac{a_i}{a_i + b_i(1-s)}.$$

Таким образом, при $i \in \{1, \dots, n\}$ и $s \in [0, 1)$

$$\widehat{\mathbf{E}} s^{Z_i^{(n)}} = \frac{a_i}{a_i + b_i(1-s)}. \quad (6)$$

В силу соотношения (5) при $1 < i < j \leq n$, $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}\left(s^{Z_j^{(n)}} \mid Z_i^{(n)} = k\right) &= \left(1 - \frac{a_i}{a_j(1-s)^{-1} + b_j - b_i}\right)^k \\ &\quad \times \prod_{l=i}^{j-1} \left(1 - \frac{a_l}{a_j(1-s)^{-1} + b_j - b_l}\right) \\ &= \left(1 - \frac{a_i}{a_j(1-s)^{-1} + b_j - b_i}\right)^k \\ &\quad \times \frac{a_j}{a_j + (b_j - b_i)(1-s)}.\end{aligned}\quad (7)$$

Из соотношений (6) и (7) находим, что при $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, $s_1, s_2 \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}\left(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} s_2^{Z_{i_2}^{(n)}}\right) &= \widehat{\mathbf{E}}\left(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \widehat{\mathbf{E}}\left[s_2^{Z_{i_2}^{(n)}} \mid Z_{i_1}^{(n)}\right]\right) \\ &= \widehat{\mathbf{E}}\left(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \left(1 - \frac{a_{i_1}}{a_{i_2}(1-s_2)^{-1} + b_{i_2} - b_{i_1}}\right)^{Z_{i_1}^{(n)}}\right. \\ &\quad \left. \times \frac{a_{i_2}}{a_{i_2} + (b_{i_2} - b_{i_1})(1-s_2)}\right) \\ &= \frac{a_{i_1}}{a_{i_1} + b_{i_1}(1-s_2^*)} \frac{a_{i_2}}{a_{i_2} + (b_{i_2} - b_{i_1})(1-s_2)},\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$s_2^* = s_1 \left(1 - \frac{a_{i_1}}{a_{i_2}(1-s_2)^{-1} + b_{i_2} - b_{i_1}}\right).$$

Аналогично устанавливается, что при $m \geq 2$, $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$, $s_1, s_2, \dots, s_m \in [0, 1]$

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} s_2^{Z_{i_2}^{(n)}} \dots s_m^{Z_{i_m}^{(n)}}\right) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \beta_k)\delta_{k,m}}, \quad (9)$$

где при $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{b_{i_{k-1}}}{b_{i_k}}, \quad \gamma_k = \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}}(1 - s_k), \\ \delta_{k,m} &= \begin{cases} \gamma_k + \frac{\beta_{k+1}\delta_{k+1,m}s_k}{1 + (1 - \beta_{k+1})\delta_{k+1,m}}, & k < m; \\ \gamma_m, & k = m. \end{cases}\end{aligned}$$

Докажем соотношение (9) по индукции. При $m = 2$ оно следует из (8), если заметить, что

$$\frac{a_{i_2}}{a_{i_2} + (b_{i_2} - b_{i_1})(1-s_2)} = \frac{1}{1 + [b_{i_2}/a_{i_2} - (b_{i_1}/b_{i_2})(b_{i_2}/a_{i_2})](1-s_2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 + (1 - \beta_2)\gamma_2} = \frac{1}{1 + (1 - \beta_2)\delta_{2,2}}, \\
\frac{b_{i_1}(1 - s_2^*)}{a_{i_1}} &= \frac{b_{i_1}(1 - s_1)}{a_{i_1}} \\
&\quad + \frac{(b_{i_1}/b_{i_2})(b_{i_2}/a_{i_2})(1 - s_2)s_1}{1 + [b_{i_2}/a_{i_2} - (b_{i_1}/b_{i_2})(b_{i_2}/a_{i_2})](1 - s_2)} \\
&= \gamma_1 + \frac{\beta_2\gamma_2s_1}{1 + (1 - \beta_2)\gamma_2} = \delta_{1,2}, \\
\frac{a_{i_1}}{a_{i_1} + b_{i_1}(1 - s_2^*)} &= \frac{1}{1 + (b_{i_1}/a_{i_1})(1 - s_2^*)} = \frac{1}{1 + \delta_{1,2}}.
\end{aligned}$$

Предположим, что соотношение (9) выполнено при некотором натуральном m . Покажем его справедливость при $m + 1$. Учитывая соотношение (7), находим, что при $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_{m+1} \leq n$, $s_1, \dots, s_{m+1} \in [0, 1)$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{E}}(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \dots s_{m+1}^{Z_{i_{m+1}}^{(n)}}) &= \widehat{\mathbf{E}}(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \dots s_m^{Z_{i_m}^{(n)}} \widehat{\mathbf{E}}(s_{m+1}^{Z_{i_{m+1}}^{(n)}} | Z_{i_m}^{(n)})) \\
&= \widehat{\mathbf{E}}(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \dots s_m^{Z_{i_m}^{(n)}} \left(1 - \frac{a_{i_m}}{a_{i_{m+1}}(1 - s_{m+1})^{-1} + b_{i_{m+1}} - b_{i_m}}\right)^{Z_{i_m}^{(n)}}) \\
&\quad \times \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{i_{m+1}} + (b_{i_{m+1}} - b_{i_m})(1 - s_{m+1})}.
\end{aligned}$$

Откуда, полагая

$$s_m^* = s_m \left(1 - \frac{a_{i_m}}{a_{i_{m+1}}(1 - s_{m+1})^{-1} + b_{i_{m+1}} - b_{i_m}}\right)$$

и учитывая предположение индукции, получаем, что

$$\widehat{\mathbf{E}}(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \dots s_{m+1}^{Z_{i_{m+1}}^{(n)}}) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \beta_k)\delta_{k,m}^*} \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{i_{m+1}} + (b_{i_{m+1}} - b_{i_m})(1 - s_{m+1})},$$

где совокупность $\delta_{1,m}^*, \dots, \delta_{m,m}^*$ отличается от $\delta_{1,m}, \dots, \delta_{m,m}$ лишь тем, что строится по совокупности $s_1, \dots, s_{m-1}, s_m^*$, а не $s_1, \dots, s_{m-1}, s_m$ (при этом совокупности $\beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_m, \gamma_m$ одинаковы в обоих случаях). Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{i_{m+1}}}{a_{i_{m+1}} + (b_{i_{m+1}} - b_{i_m})(1 - s_{m+1})} \\
&= \frac{1}{1 + [b_{i_{m+1}}/a_{i_{m+1}} - (b_{i_m}/b_{i_{m+1}})(b_{i_{m+1}}/a_{i_{m+1}})](1 - s_{m+1})} \\
&= \frac{1}{1 + (1 - \beta_{m+1})\gamma_{m+1}} = \frac{1}{1 + (1 - \beta_{m+1})\delta_{m+1,m+1}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{m,m}^* &= \frac{b_{i_m}}{a_{i_m}} (1 - s_m^*) \\
&= \frac{b_{i_m}}{a_{i_m}} (1 - s_m) + \frac{b_{i_m} s_m}{a_{i_{m+1}} (1 - s_{m+1})^{-1} + b_{i_{m+1}} - b_{i_m}} \\
&= \frac{b_{i_m}}{a_{i_m}} (1 - s_m) + \frac{(b_{i_m}/b_{i_{m+1}})(b_{i_{m+1}}/a_{i_{m+1}})(1 - s_{m+1})s_m}{1 + [b_{i_{m+1}}/a_{i_{m+1}} - (b_{i_m}/b_{i_{m+1}})(b_{i_{m+1}}/a_{i_{m+1}})](1 - s_{m+1})} \\
&= \gamma_m + \frac{\beta_{m+1}\gamma_{m+1}s_m}{1 + (1 - \beta_{m+1})\gamma_{m+1}} = \delta_{m,m+1}, \\
\delta_{k,m}^* &= \delta_{k,m+1}, \quad k < m.
\end{aligned}$$

В итоге видим, что

$$\hat{\mathbf{E}}(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \cdots s_{m+1}^{Z_{i_{m+1}}^{(n)}}) = \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{1 + (1 - \beta_k)\delta_{k,m+1}},$$

что требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 1. Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$ и моменты времени $t_1, \dots, t_m$ ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — положительные числа. Из формулы (9) находим при $i_k = \lfloor nt_k \rfloor$, $s_k = s_k^{(n)} := \exp(-\lambda_k a_{\lfloor nt_k \rfloor} / b_{\lfloor nt_k \rfloor})$, $k \in \{1, \dots, m\}$, что

$$\hat{\mathbf{E}} \exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \beta_k^{(n)})\delta_{k,m}^{(n)}}, \quad (10)$$

где при $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}
\beta_k^{(n)} &= \frac{b_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{b_{\lfloor nt_k \rfloor}}, \quad \gamma_k^{(n)} = \frac{b_{\lfloor nt_k \rfloor}}{a_{\lfloor nt_k \rfloor}} \left(1 - \exp \left(- \lambda_k \frac{a_{\lfloor nt_k \rfloor}}{b_{\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \right), \\
\delta_{k,m}^{(n)} &= \begin{cases} \gamma_k^{(n)} + \frac{\beta_{k+1}^{(n)} \delta_{k+1,m}^{(n)} s_k^{(n)}}{1 + (1 - \beta_{k+1}^{(n)})\delta_{k+1,m}^{(n)}}, & k < m; \\ \gamma_m^{(n)}, & k = m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Положим при $k, n \in \mathbf{N}_0$ ($k \leq n$)

$$L_{k,n} = \min_{k \leq i \leq n} S_i, \quad L_{0,n} = L_n.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $k_0 := 1 < k_1 < k_2 < \dots < k_l < m + 1 := k_{l+1}$, где $l \in \{1, \dots, m - 1\}$. Рассмотрим при $j \in \{0, \dots, l\}$ случайное событие $D_j^{(n,\varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$, состоящее в том, что при всех k от $k_j + 1$ до $k_{j+1} - 1$ включительно

$$L_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor} + \varepsilon C_n \leq L_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor, \lfloor nt_k \rfloor},$$

а при $k = k_{j+1}$ (исключая $j = l$)

$$L_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor} \geq L_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor, \lfloor nt_k \rfloor} + \varepsilon C_n.$$

Рассмотрим при $j \in \{0, \dots, l\}$ также случайное событие $D_j(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$, состоящее в том, что при всех k от $k_j + 1$ до $k_{j+1} - 1$ включительно

$$L(t_{k-1}) \leq L(t_{k-1}, t_k),$$

а при $k = k_{j+1}$ (исключая $j = l$)

$$L(t_{k-1}) > L(t_{k-1}, t_k).$$

Положим

$$D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) = \bigcap_{j=0}^l D_j^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}),$$

$$D(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) = \bigcap_{j=0}^l D_j(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}).$$

Случайные величины $\beta_k^{(n)}$ и $\delta_{k,m}^{(n)}$, рассматриваемые при условии события $D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$, сходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$. Если $k \in \{k_0, k_1, \dots, k_l\}$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \beta_k^{(n)} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} 0;$$

а если $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0, k_1, \dots, k_l\}$, то

$$\left\{ \beta_k^{(n)} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} 1.$$

Далее, если $k \in \{k_1, \dots, k_{l+1}\}$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \delta_{k-1,m}^{(n)} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} \lambda_{k-1};$$

а если $k \in \{2, \dots, m+1\} \setminus \{k_1, \dots, k_{l+1}\}$, то

$$\left\{ \delta_{k-1,m}^{(n)} - \delta_{k,m}^{(n)} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} \lambda_{k-1}.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \beta_k^{(n)}) \delta_{k,m}^{(n)}} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} \prod_{j=0}^l \frac{1}{1 + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \lambda_k}. \quad (11)$$

Обозначим $I_l(m)$ совокупность всех (упорядоченных по возрастанию) подмножеств мощности l множества $\{2, \dots, m\}$. В силу принципа инвариантности (3) при всех $l \in \{2, \dots, m\}$ и $(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})) = \mathbf{P}(D(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})).$$

Очевидно, что разные события вида $D(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$ попарно несовместны, поэтому предел (сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow 0$) вероятности произведения двух разных событий вида $D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$ равен нулю. Кроме того,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{l=1}^{m-1} \left(\bigcup_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} D(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})\right)\right) = 1$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{l=1}^{m-1} \left(\bigcup_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})\right)\right) = 1.$$

В силу сказанного и соотношений (10), (11)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp\left(-\sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k)\right) \\ &= \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k)\right); D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})\right] \\ &= \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} \prod_{j=0}^l \frac{1}{1 + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \lambda_k} \mathbf{P}(D(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})). \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть совпадает с преобразованием Лапласа случайного вектора $(Y(t_1), \dots, Y(t_m))$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp\left(-\sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k)\right) = \mathbf{E} \exp\left(-\sum_{k=1}^m \lambda_k Y(t_k)\right). \quad (12)$$

Таким образом, утверждение теоремы справедливо, если рассматривать временной промежуток $[0, 1]$. Чтобы получить утверждение теоремы в случае временного промежутка $[0, +\infty)$, достаточно показать, что при фиксированных $t > 1$, $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Y_n(t)}{Y_n(1)} \mid L_n + \varepsilon C_n \leq L_{n, [nt]} \right\} \xrightarrow{D} 1, \quad (13)$$

$$\left\{ \frac{Y_n(t)}{Y_n(1)} \mid L_n \geq L_{n, [nt]} + \varepsilon C_n \right\} \xrightarrow{D} 0. \quad (14)$$

Из формулы (5) следует, что при $i \geq n$ и $s \in [0, 1]$

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(s^{Z_i^{(n)}} \mid Z_n^{(n)}\right) = \left(1 - \frac{a_n}{a_i(1-s)^{-1} + b_i - b_n}\right)^{Z_n^{(n)}}.$$

Таким образом, при $\lambda > 0$

$$\mathbf{E} \exp\left(-\lambda \frac{Y_n(t)}{Y_n(1)}\right) = \mathbf{E} \left(1 - \frac{a_n}{c_{[nt], n} + b_{[nt]} - b_n}\right)^{Y_n(1)b_n/a_n},$$

где

$$c_{[nt],n} = \frac{a_{[nt]}}{1 - \exp(-\lambda a_{[nt]}/(Y_n(1)b_n))}.$$

Заметим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{b_{[nt]} - b_n}{b_n} \mid L_n + \varepsilon C_n \leq L_{n,[nt]} \right\} \xrightarrow{D} 0,$$

$$\left\{ \frac{c_{[nt],n}}{Y_n(1)b_n} \mid L_n + \varepsilon C_n \leq L_{n,[nt]} \right\} \xrightarrow{D} \lambda^{-1}$$

и, следовательно,

$$\left\{ \left(1 - \frac{a_n}{c_{[nt],n} + b_{[nt]} - b_n} \right)^{Y_n(1)b_n/a_n} \mid L_n + \varepsilon C_n \leq L_{n,[nt]} \right\} \xrightarrow{D} e^{-\lambda},$$

что доказывает соотношение (13). Аналогично, при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{b_n}{b_{[nt]} - b_n} \mid L_n \geq L_{n,[nt]} + \varepsilon C_n \right\} \xrightarrow{D} 0$$

и, следовательно,

$$\left\{ \left(1 - \frac{a_n}{c_{[nt],n} + b_{[nt]} - b_n} \right)^{Y_n(1)b_n/a_n} \mid L_n \geq L_{n,[nt]} + \varepsilon C_n \right\} \xrightarrow{D} 1,$$

что доказывает соотношение (14). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Пусть W — именно тот процесс Леви, по которому строится процесс Y . Из доказательства теоремы 1 следует, что если выполнено основное предположение, то при $n \rightarrow \infty$ двумерный процесс (Y_n, W_n) сходится по распределению к процессу (Y, W) :

$$\mathbf{P}(Y_n \in A, W_n \in B) \rightarrow \mathbf{P}(Y \in A, W \in B)$$

для произвольного цилиндрического множества A и произвольного борелевского множества B пространства $D[0, +\infty)$ (с топологией Скорохода).

4. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Установим сначала сходимост конечномерных распределений. Пусть $l, m \in \mathbf{N}$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = 1 < t_{l+1} < t_{l+2} < \dots < t_{l+m}$. Зафиксируем произвольное $r \in \{0, \dots, m\}$ и введем случайное событие $G_r^{(n)}$, состоящее в том, что при всех k от 1 до r включительно

$$L_n \leq L_{[nt_{l+k-1}], [nt_{l+k}]},$$

а при $k = r + 1$

$$L_n > L_{[nt_{l+k-1}], [nt_{l+k}]}.$$

Рассмотрим также случайное событие G_r , состоящее в том, что при всех k от 1 до r включительно

$$L(1) \leq L(t_{l+k-1}, t_{l+k}),$$

а при $k = r + 1$

$$L(1) > L(t_{l+k-1}, t_{l+k}).$$

Положим $I_r = \{1, \dots, l + r\}$ при $r \in \{0, \dots, m\}$. В силу теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t_k), k \in I_m \mid G_r^{(n)}\} \xrightarrow{D} \{Y(t_k), k \in I_m \mid G_r\}, \quad (15)$$

причем $Y(t_k) > 0$ п.н. при $k \in I_r$, но $Y(t_k) = 0$ п.н. при $k \in I_m \setminus I_r$.

Положим при $k \in I_m$

$$c_n(k) = \frac{b_{n \wedge \lfloor nt_k \rfloor}}{a_{\lfloor nt_k \rfloor}}.$$

Очевидно, что при $n \in \mathbf{N}$

$$\exp(-L_n) \leq b_n \leq n \exp(-L_n),$$

поэтому при $k \in I_m$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{C_n^{-1} \ln c_n(k) - C_n^{-1}(S_{\lfloor nt_k \rfloor} - L_{n \wedge \lfloor nt_k \rfloor}) \mid G_r^{(n)}\} \xrightarrow{D} 0.$$

По функциональной предельной теореме Скорохода при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{\lfloor nt_k \rfloor} - L_{n \wedge \lfloor nt_k \rfloor}}{C_n}, k \in I_m \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} \{W(t_k) - L(1 \wedge t_k), k \in I_m \mid G_r\},$$

причем $W(t_k) - L(t_k \wedge 1) = U^{(0)}(t_k)$ при $k \in I_m$. В итоге находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{C_n^{-1} \ln c_n(k), k \in I_m \mid G_r^{(n)}\} \xrightarrow{D} \{U^{(0)}(t_k), k \in I_m \mid G_r\}. \quad (16)$$

Обратим внимание на то, что $U^{(0)}(t_k) > 0$ п.н. при $k \in I_r$, следовательно,

$$\left\{ \frac{1}{c_n(k)}, k \in I_r \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} 0. \quad (17)$$

Положим при $k \in I_r$

$$\tilde{Y}_n(t_k) = \frac{Z_{\lfloor nt_k \rfloor}^{(n)} + 1}{c_n(k)}.$$

Из соотношения (15), учитывая (17), находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\tilde{Y}_n(t_k), k \in I_r \mid G_r^{(n)}\} \xrightarrow{D} \{Y(t_k), k \in I_r \mid G_r\}.$$

Случайные величины в обеих частях этого соотношения положительны п.н., поэтому при $k \in I_r$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt_k]}^{(n)} + 1 \right) - C_n^{-1} \ln c_n(k) \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} 0. \quad (18)$$

Из соотношений (16) и (18) получаем, что $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt_k]}^{(n)} + 1 \right), k \in I_r \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} \{U^{(0)}(t_k), k \in I_r \mid G_r\}. \quad (19)$$

Ввиду соотношения (16), при $n \rightarrow \infty$

$$\{C_n^{-1} \ln c_n(l+r+1) \mid G_r^{(n)}\} \xrightarrow{D} \{U^{(0)}(t_{l+r+1}) \mid G_r\},$$

причем $U^{(0)}(t_{l+r+1}) < 0$ п.н., откуда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{c_n(l+r+1) \mid G_r^{(n)}\} \xrightarrow{D} 0.$$

Ввиду соотношения (15), при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt_{l+r+1}]}^{(n)}}{c_n(l+r+1)} \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} 0.$$

Таким образом,

$$\left\{ Z_{[nt_{l+r+1}]}^{(n)} \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} 0. \quad (20)$$

Это означает, что для каждого $k \in I_m \setminus I_r$ при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ Z_{[nt_k]}^{(n)} \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} 0$$

и, следовательно,

$$\left\{ C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt_k]}^{(n)} + 1 \right) \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} 0 = U^{(0)}(t_k). \quad (21)$$

Из соотношений (19) и (21) видно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt_k]}^{(n)} + 1 \right), k \in I_m \mid G_r^{(n)} \right\} \xrightarrow{D} \{U^{(0)}(t_k), k \in I_m \mid G_r\}. \quad (22)$$

Учитывая, что случайные события $G_0, \dots, G_{m-1}$ попарно несовместны и их сумма представляет достоверное событие, из соотношения (22), рассматриваемого при разных $r \in \{0, \dots, m\}$, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt_k]}^{(n)} + 1 \right), k \in I_m \right\} \xrightarrow{D} \{U^{(0)}(t_k), k \in I_m\}.$$

Таким образом, сходимость конечномерных распределений установлена.

Поскольку процессы $U_1, U_2, \dots$ являются марковскими и сходимость их конечномерных распределений только что установлена, для справедливости теоремы достаточно доказать (см. [12, гл. 6, § 5, теорема 4]), что для произвольных $a, \varepsilon > 0$

$$\lim_{h \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x,s) \in D_a} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [s, s+h]} |U_n(t) - U_n(s)| \geq \varepsilon \mid U_n(s) = x \right) = 0, \quad (23)$$

где $D_a = \{(x, s): x \geq 0, s \in [0, a - h]\}$.

Пусть $Z_{i,j}^{(m)}$ означает численность потомков в i -м поколении от иммигрантов, присоединившихся по одному к поколениям, начиная с j -го и кончая $(j + m - 1)$ -м ($i, j, m \in \mathbf{N}$, причем $i \geq j, j + m \leq n$). Рассмотрим сначала случай, когда $a = 1$. Пусть $s \in [0, 1 - h]$, где $h \in (0, 1)$. Очевидно, что при $t \in [s, s + h]$

$$Z_{[nt]}^{(n)} = Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)}. \quad (24)$$

При этом случайный процесс $\{Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)}, t \geq s\}$ является ВПСС (без иммигрантов), причем численность начального поколения равна $Z_{[ns]}^{(n)}$. Положим при $t \in [s, s + h]$

$$U_n^{(s)}(t) = C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + 1 \right).$$

Ясно, что $U_n^{(s)}(s) = U_n(s)$. Из соотношения (24) находим, что при $t \in [s, s + h]$

$$\begin{aligned} |U_n(t) - U_n(s)| &= C_n^{-1} \left| \ln \left(\frac{Z_{[nt]}^{(n)} + 1}{Z_{[ns]}^{(n)} + 1} \right) \right| \\ &= C_n^{-1} \left| \ln \left(\frac{Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} + 1}{Z_{[ns]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + 1} \right) \right| \\ &\leq C_n^{-1} \left| \ln \left(\frac{Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + 1}{Z_{[ns]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + 1} \right) \right| + C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} + 1 \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [s, s+h]} |U_n(t) - U_n(s)| &\leq \sup_{t \in [s, s+h]} |U_n^{(s)}(t) - U_n^{(s)}(s)| \\ &\quad + \sup_{t \in [s, s+h]} C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} + 1 \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Из неравенства (25) вытекает, что для справедливости (23) достаточно показать, что

$$\lim_{h \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x,s) \in D_1} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [s, s+h]} |U_n^{(s)}(t) - U_n^{(s)}(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \mid U_n^{(s)}(s) = x \right) = 0 \quad (26)$$

и

$$\lim_{h \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, 1-h]} \mathbf{P} \left(C_n^{-1} \ln \left(Z_{\lfloor nt \rfloor, \lfloor ns \rfloor}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} + 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0. \quad (27)$$

Сначала установим (27). Заметим, что случайная последовательность $(a_0 Z_0^{(n)}, a_1 Z_1^{(n)}, \dots, a_n Z_n^{(n)})$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является неотрицательным субмартингалом. Действительно, при $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}} \left(a_{i+1} Z_{i+1}^{(n)} \mid Z_i^{(n)} \right) &= \widehat{\mathbf{E}} \left(a_{i+1} \left(Z_{i+1}^{(i)} + Z_{i+1,i}^{(1)} \right) \mid Z_i^{(n)} \right) \\ &\geq \widehat{\mathbf{E}} \left(a_{i+1} Z_{i+1}^{(i)} \mid Z_i^{(n)} \right) = a_{i+1} \exp(\kappa_{i+1}) Z_i^{(n)} = a_i Z_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Поэтому, по неравенству Дуба,

$$\mathbf{P} \left(\max_{0 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_n} Z_i^{(n)} \geq \exp \left(\frac{C_n \varepsilon}{5} \right) \right) \leq \exp \left(- \frac{C_n \varepsilon}{5} \right)$$

(здесь учтено, что $\widehat{\mathbf{E}} Z_n^{(n)} = b_n / a_n$). Применяя это неравенство к процессу $\{Z_{\lfloor nt \rfloor, \lfloor ns \rfloor}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)}, t \in [s, s+h]\}$, получаем, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{a_{\lfloor nt \rfloor} Z_{\lfloor nt \rfloor, \lfloor ns \rfloor}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)}}{b_{\lfloor n(s+h) \rfloor} - b_{\lfloor ns \rfloor}} \geq \exp \left(\frac{C_n \varepsilon}{5} \right) \right) \leq \exp \left(- \frac{C_n \varepsilon}{5} \right). \quad (28)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [s, s+h]} \frac{b_{\lfloor n(s+h) \rfloor} - b_{\lfloor ns \rfloor}}{a_{\lfloor nt \rfloor}} &\leq n \exp \left(\sup_{t \in [s, s+h]} (S_{\lfloor nt \rfloor} - L_{\lfloor ns \rfloor, \lfloor n(s+h) \rfloor}) \right) \\ &\leq n \exp \left(2C_n \sup_{t \in [s, s+h]} |W_n(t) - W_n(s)| \right), \end{aligned}$$

то при достаточно больших (в зависимости от ε) n

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{b_{\lfloor n(s+h) \rfloor} - b_{\lfloor ns \rfloor}}{a_{\lfloor nt \rfloor}} \geq \exp \left(\frac{C_n \varepsilon}{5} \right) \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\exp \left(2C_n \sup_{t \in [s, s+h]} |W_n(t) - W_n(s)| \right) \geq n^{-1} \exp \left(\frac{C_n \varepsilon}{5} \right) \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\exp \left(2C_n \sup_{t \in [s, s+h]} |W_n(t) - W_n(s)| \right) \geq \exp \left(\frac{C_n \varepsilon}{6} \right) \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [s, s+h]} |W_n(t) - W_n(s)| \geq \frac{\varepsilon}{12} \right) \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 2h]} |W_n(t)| \geq \frac{\varepsilon}{12} \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Последнее неравенство объясняется тем, что 1) блуждание $\{S_k, k \in \mathbf{N}_0\}$, по которому строится процесс W_n , удовлетворяет марковскому свойству и 2) $\lfloor (s+h)n \rfloor - \lfloor sn \rfloor \leq \lfloor 2hn \rfloor$ при достаточно больших (в зависимости от h) n .

При достаточно больших (в зависимости от ε) n

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} + 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} \geq \exp\left(\frac{C_n \varepsilon}{2}\right) - 1\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{a_{[nt]} Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)}}{b_{\lfloor n(s+h) \rfloor} - b_{\lfloor ns \rfloor}} \frac{b_{\lfloor n(s+h) \rfloor} - b_{\lfloor ns \rfloor}}{a_{[nt]}} \geq \exp\left(\frac{2C_n \varepsilon}{5}\right)\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{a_{[nt]} Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)}}{b_{\lfloor n(s+h) \rfloor} - b_{\lfloor ns \rfloor}} \geq \exp\left(\frac{C_n \varepsilon}{5}\right)\right) \\
&\quad + \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{b_{\lfloor n(s+h) \rfloor} - b_{\lfloor ns \rfloor}}{a_{[nt]}} \geq \exp\left(\frac{C_n \varepsilon}{5}\right)\right).
\end{aligned}$$

Применяя теперь соотношения (28) и (29), находим, что при достаточно больших (в зависимости от ε) n

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} + 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{C_n \varepsilon}{5}\right) + \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, 2h]} |W_n(t)| \geq \frac{\varepsilon}{12}\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что правая часть этого неравенства не зависит от s . По функциональной предельной теореме Скорохода ее предел при $n \rightarrow \infty$ равен $\mathbf{P}(\sup_{t \in [0, 2h]} |W(t)| \geq \varepsilon/12)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, 1-h]} \mathbf{P}\left(C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt], [ns]}^{(\lfloor n(s+h) \rfloor - \lfloor ns \rfloor)} + 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, 2h]} |W(t)| \geq \frac{\varepsilon}{12}\right).
\end{aligned}$$

Предел правой части этого соотношения при $h \downarrow 0$ равен нулю, ввиду непрерывности справа траекторий процесса Леви. Таким образом, соотношение (27) установлено.

Теперь установим (26). Разобьем множество D_1 на две части:

$$\begin{aligned}
D_{1,1} &= \left\{ (x, s): x \in \left[0, \frac{\varepsilon_0}{5}\right), s \in [0, 1-h] \right\}, \\
D_{1,2} &= \left\{ (x, s): x \in \left[\frac{\varepsilon_0}{5}, +\infty\right), s \in [0, 1-h] \right\},
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon/2$. Для справедливости соотношения (26) достаточно показать, что при $i \in \{1, 2\}$

$$\lim_{h \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x, s) \in D_{1,i}} \mathbf{P}(A | U_n^{(s)}(s) = x) = 0, \quad (30)$$

где $A = \{\sup_{t \in [s, s+h]} |U_n^{(s)}(t) - U_n^{(s)}(s)| \geq \varepsilon_0\}$. При этом, очевидно, $x = 0$ можно исключить из рассмотрения.

Сначала установим (30) при $i = 1$. Пусть $U_n^{(s)}(s) = x \in (0, \varepsilon_0/5)$, тогда $Z_{[ns]}^{([ns])} = y$, где $y = \exp(C_n x) - 1$, и

$$0 < Z_{[ns]}^{([ns])} < \exp\left(\frac{C_n \varepsilon_0}{5}\right) - 1. \quad (31)$$

Если выполнено событие A , то $\sup_{t \in [s, s+h]} U_n^{(s)}(t) \geq 4\varepsilon_0/5$ и, следовательно,

$$\sup_{t \in [s, s+h]} Z_{[nt]}^{([ns])} \geq \exp\left(\frac{4C_n \varepsilon_0}{5}\right) - 1. \quad (32)$$

Из соотношений (31), (32) находим, что при достаточно больших (в зависимости от ε_0) n

$$\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{a_{[nt]} Z_{[nt]}^{([ns])}}{a_{[ns]} Z_{[ns]}^{([ns])}} \sup_{t \in [s, s+h]} \frac{a_{[ns]}}{a_{[nt]}} \geq \exp\left(\frac{C_n \varepsilon_0}{2}\right). \quad (33)$$

Заметим, что случайная последовательность $\{a_{[nt]} Z_{[nt]}^{([ns])}, t \geq s\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является неотрицательным мартингалом. Поэтому, по неравенству Дуба,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{a_{[nt]} Z_{[nt]}^{([ns])}}{a_{[ns]} Z_{[ns]}^{([ns])}} \geq e^{C_n \varepsilon_0/4} \mid Z_{[ns]}^{([ns])} = y\right) \leq e^{-C_n \varepsilon_0/4}. \quad (34)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{a_{[ns]}}{a_{[nt]}} \geq e^{C_n \varepsilon_0/4} \mid Z_{[ns]}^{([ns])} = y\right) \\ & \leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} |W_n(t) - W_n(s)| \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Из соотношений (33)–(35) получаем требуемое нам соотношение (30) при $i = 1$.

Теперь установим (30) при $i = 2$. Пусть $U_n^{(s)}(s) = x \geq \varepsilon_0/5$, тогда $Z_{[ns]}^{([ns])} \geq \exp(C_n \varepsilon_0/5) - 1$. Рассмотрим случайные события

$$A_1 = \left\{ \sup_{t \in [s, s+h]} \frac{Z_{[nt]}^{([ns])} + 1}{Z_{[ns]}^{([ns])} + 1} \geq e^{C_n \varepsilon_0} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \inf_{t \in [s, s+h]} \frac{Z_{[nt]}^{([ns])} + 1}{Z_{[ns]}^{([ns])} + 1} \leq e^{-C_n \varepsilon_0} \right\}$$

и

$$B_1 = \left\{ \sup_{t \in [s, s+h]} \frac{Z_{[nt]}^{([ns])}}{Z_{[ns]}^{([ns])}} \geq e^{C_n \varepsilon_0} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \inf_{t \in [s, s+h]} \frac{Z_{[nt]}^{([ns])}}{Z_{[ns]}^{([ns])}} \leq e^{-C_n \varepsilon_0} \right\}.$$

Очевидно, что $A \subset A_1 \cup A_2$. Заметим, что если A_1 выполнено, то

$$\sup_{t \in [s, s+h]} \frac{Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + \exp(C_n \varepsilon_0)}{Z_{[ns]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + 1} \geq e^{C_n \varepsilon_0}$$

и, следовательно, выполнено событие B_1 . Если A_2 выполнено, то

$$\inf_{t \in [s, s+h]} \frac{Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + \exp(-C_n \varepsilon_0)}{Z_{[ns]}^{(\lfloor ns \rfloor)} + 1} \leq e^{-C_n \varepsilon_0}$$

и, следовательно, выполнено событие B_2 . Итак,

$$A \subset B_1 \cup B_2. \quad (36)$$

Введем случайные события

$$G = \left\{ \sup_{t \in [s, s+h]} \left| \frac{a_{[nt]} Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)}}{a_{[ns]} Z_{[ns]}^{(\lfloor ns \rfloor)}} - 1 \right| \geq \frac{1}{2} \right\},$$

$$D_s = \left\{ -\frac{C_n \varepsilon_0}{6} \leq L_{[ns], [n(s+h)]} \leq M_{[ns], [n(s+h)]} \leq \frac{C_n \varepsilon_0}{6} \right\},$$

где $M_{n_1, n_2} = \max_{n_1 \leq i \leq n_2} S_i$ при $n_1, n_2 \in \mathbf{N}_0$ ($n_1 < n_2$).

Заметим, что при достаточно больших (в зависимости от ε_0) n

$$\overline{G} \cap D_s \subset \left\{ \frac{1}{2} e^{-C_n \varepsilon_0/2} \leq \frac{Z_{[nt]}^{(\lfloor ns \rfloor)}}{Z_{[ns]}^{(\lfloor ns \rfloor)}} \leq \frac{3}{2} e^{C_n \varepsilon_0/2} \right\} \subset \overline{B_1 \cup B_2}$$

и, следовательно,

$$B_1 \cup B_2 \subset G \cup \overline{D_s} = (G \cap D_s) \cup \overline{D_s}. \quad (37)$$

Из соотношений (36) и (37) находим, что

$$A \subset (G \cap D_s) \cup \overline{D_s}. \quad (38)$$

Из функциональной предельной теоремы Скорохода следует, что

$$\lim_{h \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x, s) \in D_{1,2}} \mathbf{P}(\overline{D_s} | U_n^{(s)}(s) = x) = 0. \quad (39)$$

Покажем, что

$$\lim_{h \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x, s) \in D_{1,2}} \mathbf{P}(G \cap D_s | U_n^{(s)}(s) = x) = 0. \quad (40)$$

Полагая $y = \exp(C_n x) - 1$, заметим, что при достаточно больших (в зависимости от ε_0) n

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(G \cap D_s \mid U_n^{(s)}(s) = x) \\
&= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} \left| \frac{a_{[nt]}}{a_{[ns]}} Z_{[nt]}^{([ns])} - Z_{[ns]}^{([ns])} \right| \geq \frac{Z_{[ns]}^{([ns])}}{2}, D_s \mid Z_{[ns]}^{([ns])} = y\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [s, s+h]} \left| \frac{a_{[nt]}}{a_{[ns]}} Z_{[nt]}^{([ns])} - Z_{[ns]}^{([ns])} \right| \geq e^{C_n \varepsilon_0/6}, D_s \mid Z_{[ns]}^{([ns])} = y\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, h]} |a_{[nt]} Z_{[nt]} - Z_0| \geq e^{C_n \varepsilon_0/6}, D_0 \mid Z_0 = y\right),
\end{aligned}$$

где $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ — ВПСС без иммигрантов (последнее равенство объясняется марковским свойством ВПСС и его сопровождающего случайного блуждания). Снова применяя неравенство Дуба и учитывая (см. [13, лемма 4]), что при $0 \leq s < t$

$$\widehat{\mathbf{E}}(a_{[nt]} Z_{[nt]} - a_{[ns]} Z_{[ns]})^2 = 2(b_{[nt]} - b_{[ns]}) + (a_{[nt]} - a_{[ns]}),$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, h]} |a_{[nt]} Z_{[nt]} - Z_0| \geq e^{C_n \varepsilon_0/6}, D_0 \mid Z_0 = y\right) \\
&\leq e^{-C_n \varepsilon_0/3} \mathbf{E}(2b_{[nh]} + a_{[nh]}; D_0) \leq e^{-C_n \varepsilon_0/3} (2[nh] + 1) e^{C_n \varepsilon_0/6}.
\end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно больших (в зависимости от ε_0) n

$$\mathbf{P}(G \cap D_s \mid U_n^{(s)}(s) = x) \leq (2[nh] + 1) e^{-C_n \varepsilon_0/6},$$

откуда следует требуемое соотношение (40).

Из соотношений (38)–(40) получаем требуемое соотношение (30) при $i = 2$. Это означает, что соотношение (26), и, следовательно, соотношение (23) при $a = 1$ доказаны. Если $a > 1$, то процесс $\{Z_{[nt]}^{(n)}, t \geq 1\}$ анализируется на промежутке от s до $s + h$ (здесь $s \geq 1$ и $s + h \leq a$) точно так же, как уже рассмотренный процесс $\{Z_{[nt]}^{(ns)}, t \geq s\}$, где $s \in (0, 1)$, анализируется на промежутке от s до $s + h$, и поэтому доказательство соотношения (23) при $a > 1$ проводится аналогично. Теорема доказана.

Положим при $n \in \mathbf{N}$

$$M_n = \sup_{i \in \mathbf{N}_0} Z_i^{(n)}, \quad \Sigma_n = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^{(n)}.$$

Следствие 1. Если выполнено основное предположение, то при $n \rightarrow \infty$

$$C_n^{-1} \ln(M_n + 1) \xrightarrow{D} V(0), \quad (41)$$

$$C_n^{-1} \ln(\Sigma_n + 1) \xrightarrow{D} V(0). \quad (42)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $M_n = \sup_{t \geq 0} Z_{[nt]}^{(n)}$, поэтому при $u > 0$

$$M_n = \max \left\{ \sup_{0 \leq t \leq u} Z_{[nt]}^{(n)}, \sup_{t \geq u} Z_{[nt]}^{(n)} \right\}$$

и при $x > 0$

$$P_1(n, u) \leq \mathbf{P}(C_n^{-1} \ln(M_n + 1) \geq x) \leq P_1(n, u) + P_2(n, u), \quad (43)$$

где

$$P_1(n, u) = \mathbf{P}\left(C_n^{-1} \ln \left(\sup_{0 \leq t \leq u} Z_{[nt]}^{(n)} + 1 \right) \geq x\right),$$

$$P_2(n, u) = \mathbf{P}\left(C_n^{-1} \ln \left(\sup_{t \geq u} Z_{[nt]}^{(n)} + 1 \right) \geq x\right).$$

По теореме 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_1(n, u) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq u} U^{(0)}(t) \geq x\right)$$

и, следовательно,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(n, u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq u} U^{(0)}(t) \geq x\right) = \mathbf{P}(V(0) \geq x). \quad (44)$$

Далее, при $u > 1$

$$P_2(n, u) \leq \mathbf{P}(L_n \leq L_{n, [nu]}) + \mathbf{P}\left(C_n^{-1} \ln \left(\sup_{t \geq u} Z_{[nt]}^{(n)} + 1 \right) \geq x, L_n > L_{n, [nu]}\right).$$

Очевидно, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(L_n \leq L_{n, [nu]}) = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}(L(1) \leq L(1, u)) = 0$$

и (см. (20))

$$\left\{ \sup_{t \geq u} Z_{[nt]}^{(n)} \mid L_n > L_{n, [nu]} \right\} \xrightarrow{D} 0,$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(C_n^{-1} \ln \left(\sup_{t \geq u} Z_{[nt]}^{(n)} + 1 \right) \geq x, L_n > L_{n, [nu]}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_2(n, u) = 0. \quad (45)$$

Из соотношений (43)–(45) следует (41). Соотношение (42) устанавливается аналогично, при этом надо учесть, что

$$\sup_{0 \leq t \leq u} Z_{[nt]}^{(n)} \leq \sum_{i=1}^{[nu]} Z_i^{(n)} \leq [nu] \sup_{0 \leq t \leq u} Z_{[nt]}^{(n)}.$$

Следствие доказано.

5. Доказательство теоремы 3. Из соотношения (2) и следствия 1 получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$C_n^{-1} \ln T_n \xrightarrow{D} V(0).$$

Таким образом, сходимость одномерных распределений при $s = 1$ доказана. Заметим, что эта сходимость составляет содержание теоремы Риттера.

Установим сходимость произвольных конечномерных распределений в доказываемой теореме. Зафиксируем число $l \in \mathbf{N}$ и числа $s_1, s_2, \dots, s_l \in (0, 1]$ ($s_1 < s_2 < \dots < s_l$). Для каждого $s \in [0, 1]$ рассмотрим ВПСС $\{Z_{i, [ns]}^{(n-[ns])}, i \geq [ns]\}$ и на его основе построим случайный процесс $Y_n^{(s)}$: $Y_n^{(s)}(t) = 0$ при $t \in [0, s]$, а при $t > s$

$$Y_n^{(s)}(t) = \frac{a_{[nt]}}{b_{n \wedge [nt]} - b_{[ns]}} Z_{[nt], [ns]}^{(n-[ns])}.$$

По теореме 1 для каждого $s \in [0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$

$$Y_n^{(s)} \Rightarrow Y^{(s)}, \quad (46)$$

где $Y^{(s)} = \{Y^{(s)}(t), t \geq 0\}$ — некоторый случайный процесс, конечномерные распределения которого описываются аналогично конечномерным распределениям процесса Y , но при этом вместо временного промежутка $[0, 1]$ рассматривается промежуток $[s, 1]$.

Для каждого $s \in [0, 1]$ введем процесс $\{U_n^{(s)}(t), t \geq 0\}$: $U_n^{(s)}(t) = 0$ при $t \in [0, s]$, а при $t > s$

$$U_n^{(s)}(t) = C_n^{-1} \ln \left(Z_{[nt], [ns]}^{(n-[ns])} + 1 \right).$$

При доказательстве теоремы 2 ключевым является соотношение (18). Выписывая на основании (46) подобные соотношения для всех случайных процессов $\{Z_{i, n-[ns_j]}^{([ns_j])}, i \geq n - [ns_j], j \in \{1, \dots, l\}\}$, и объединяя их в одно соотношение для l -мерного случайного процесса (это можно сделать, поскольку справа в (18) стоит 0), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left(U_n^{(1-s_1)}(t), \dots, U_n^{(1-s_l)}(t), t \geq 0 \right) \Rightarrow \left(U^{(1-s_1)}(t), \dots, U^{(1-s_l)}(t), t \geq 0 \right). \quad (47)$$

Поскольку для каждой компоненты левой части (47) выполнено соотношение, аналогичное (23), то имеет место сходимость по распределению в пространстве $(D[0, +\infty))^k$: при $n \rightarrow \infty$

$$\left(U_n^{(1-s_1)}(t), \dots, U_n^{(1-s_l)}(t), t \geq 0 \right) \xrightarrow{D} \left(U^{(1-s_1)}(t), \dots, U^{(1-s_l)}(t), t \geq 0 \right). \quad (48)$$

Положим при $s \in [0, 1)$

$$\Sigma_n^{(s)} = \sum_{i=\lfloor ns \rfloor}^{\infty} Z_{i, \lfloor ns \rfloor}^{(n-\lfloor ns \rfloor)}$$

и введем случайный процесс $\{\Psi_n(s), s \in [0, 1]\}$: $\Psi_n(1) = 0$, а при $s \in [0, 1)$

$$\Psi_n(s) = C_n^{-1} \ln(\Sigma_n^{(s)} + 1).$$

Из соотношения (48) находим (см. следствие 1), что при $n \rightarrow \infty$

$$(\Psi_n(1 - s_1), \dots, \Psi_n(1 - s_l)) \xrightarrow{D} (V(1 - s_1), \dots, V(1 - s_l)). \quad (49)$$

Пусть $m < n$, $m \in \mathbf{N}$, тогда наряду с соотношением (1) запишем, что

$$T_m = m + 2 \sum_{i=-\infty}^m \zeta_i^{(m)},$$

причем последовательность $\{\zeta_m^{(m)}, \zeta_{m-1}^{(m)}, \zeta_{m-2}^{(m)}, \dots\}$ является ВПСС с единственным иммигрантом в каждом из первых m поколений. Если сравнивать эту последовательность с последовательностью $\{\zeta_n^{(n)}, \zeta_{n-1}^{(n)}, \zeta_{n-2}^{(n)}, \dots\}$ из (1), также являющейся ВПСС с единственным иммигрантом в каждом из первых n поколений, то видно, что первый ВПСС порожден иммигрантами второго ВПСС, присоединившимися к поколениям, начиная с $(n - m)$ -го и заканчивая $(n - 1)$ -м. Поэтому (см. (2))

$$T_m \stackrel{d}{=} m + 2 \sum_{i=n-m}^{+\infty} Z_{i, n-m}^{(m)}$$

и случайный вектор с компонентами $T_{\lfloor ns_j \rfloor}$, $j \in \{1, \dots, l\}$, имеет такое же распределение, как случайный вектор с компонентами $\lfloor ns_j \rfloor + 2\Sigma_n^{(1-s_j)}$, $j \in \{1, \dots, l\}$. Откуда, учитывая (49), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$(V_n(s_1), \dots, V_n(s_l)) \xrightarrow{D} (V(1 - s_1), \dots, V(1 - s_l)).$$

Таким образом, сходимость конечномерных распределений установлена.

Если процесс Леви W не имеет положительных скачков, то (см. [14], гл. 7) траектории процесса $\{L(s, t), s \in [0, t]\}$ п.н. непрерывны (здесь t положительно и фиксировано), поэтому п.н. непрерывны траектории процесса $\{V(1 - s), s \in [0, 1]\}$. Заметим, что траектории процесса $\{V_n(s), s \in [0, 1]\}$ не убывают. Ввиду этих двух обстоятельств, из сходимости в смысле конечномерных распределений следует (см. [15, гл. 6, теорема 3.37]) сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ritter G. A.* Random walk in a random environment, critical case. Thesis. Cornell: Cornell Univ., USA, 1976, 73 p.
2. *Kesten H., Kozlov M. V., Spitzer F.* A limit law for random walk in a random environment. — *Compositio Math.*, 1975, v. 30, p. 145–168.
3. *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2002, 638 p.
4. *Solomon F.* Random walks in a random environment. — *Ann. Probab.*, 1975, v. 3, № 1, p. 1–31.
5. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Criticality for branching processes in random environment. — *Ann. Probab.*, 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
6. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment. — *Stochastic Process. Appl.*, 2005, v. 115, № 10, p. 1658–1676.
7. *Afanasyev V. I., Boinghoff C., Kersting G., Vatutin V. A.* Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment. — *J. Theor. Probab.*, 2012, v. 25, № 3, p. 703–732.
8. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: Предельные теоремы. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, т. 48, в. 2, с. 274–300.
9. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: Конечномерные распределения. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, в. 2, с. 231–268.
10. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 1, с. 22–46.
11. *Agresti A.* On the extinction times of varying and random environment branching processes. — *J. Appl. Probab.*, 1975, v. 12, № 1, p. 39–46.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971, 664 с.
13. *Афанасьев В. И.* Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — *Дискрет. матем.*, 1997, т. 9, в. 3, с. 52–67.
14. *Bertoin J.* Levy Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 1996, 265 p.
15. *Жакод Ж., Шуряев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994, 544 с.

Поступила в редакцию
1.VI.2010

Исправленный вариант
30.VIII.2012