Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, О неулучшаемых оценках для асимптотических разложений в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 649–666

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:13:34

© 2012 г.

СЕНАТОВ В. В.*

**О НЕУЛУЧШАЕМЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ
РАЗЛОЖЕНИЙ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ**

Получены новые асимптотические разложения в центральной предельной теореме с явными оценками точности аппроксимации, которую они гарантируют. Для некоторых из этих оценок справедливо утверждение об их неулучшаемости.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации.

Цель данной работы — продемонстрировать новые асимптотические разложения в локальной форме центральной предельной теоремы (ЦПТ) для плотностей. Оценки остаточных частей этих разложений выражаются в явном виде. Некоторые из этих оценок являются неулучшаемыми в смысле, который указан ниже. Полученные разложения для плотностей можно преобразовать по простым правилам в асимптотические разложения в интегральной форме ЦПТ (для функций распределения, удовлетворяющих достаточно слабым ограничениям на их гладкость) и в разложения в локальной форме ЦПТ для решетчатых распределений (см. [1, § 15 гл. 4 и § 1 гл. 5]).

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, для которых $\mathbf{E}|X_1|^{m+2} < \infty$, где $m \geq 2$ — натуральное число. Пусть P — общее распределение этих случайных величин, P_n — распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$, p_n — плотность P_n (если она существует) и $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — плотность стандартного нормального закона. Предположим, что для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty,$$

где $f(t)$ — характеристическая функция распределения P . Выполнение этого условия гарантирует существование плотности p_n при всех $n \geq \nu$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: v.senatov@yandex.ru

и справедливость ЦПТ в локальной форме для плотностей, т.е. справедливость утверждения $p_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$, для всех действительных x . Мы хотим указать для $p_n(x)$ аппроксимации (они и называются асимптотическими разложениями), позволяющие вычислять $p_n(x)$ с точностью $O(1/n^{m/2})$, $n \rightarrow \infty$, причем нас интересуют те оценки величин $O(1/n^{m/2})$, которые можно доводить до численных значений.

Обозначим $\alpha_k = \mathbf{E} X_1^k$, $\beta_k = \mathbf{E} |X_1|^k$, $k = 1, \dots, m+2$, $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ моменты и абсолютные моменты исходных случайных величин. При построении асимптотических разложений используются многочлены Чебышёва–Эрмита $H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x)$, $k = 0, 1, \dots$; первые пять многочленов Чебышёва–Эрмита суть $H_0(x) \equiv 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$, $H_3(x) = x^3 - 3x$, $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$.

Все известные асимптотические разложения в ЦПТ являются линейными комбинациями функций $H_k(x)\varphi(x)$ с коэффициентами, зависящими от моментных характеристик распределения P и числа n . Эти моментные характеристики суть комбинации (которые становятся тем сложнее, чем больше число m) либо моментов, либо семиинвариантов, либо моментов Чебышёва–Эрмита распределения P . Далее рассматриваются только разложения, в которых используются моменты Чебышёва–Эрмита. Мы называем моментами Чебышёва–Эрмита числа

$$\theta_l = \theta_l(P) = \int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) P(dx), \quad l = 0, 1, \dots, m+2.$$

Легко проверить, что $\theta_0 = 1$ для любого распределения P , а для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\theta_3 = \alpha_3$, $\theta_4 = \alpha_4 - 3$. Моменты Чебышёва–Эрмита достаточно просто вычисляются через моменты распределения P , а именно,

$$\frac{\theta_l}{l!} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{\alpha_{l-2j}}{(l-2j)!} \frac{(-1)^j}{2^j j!}.$$

Мы будем использовать также величины $\theta_l^{(r)}$, где $0 < r < l$, которые вычисляются по указанной формуле, но в сумме по j слагаемые с $l-2j > r$, т.е. с $j < (l-r)/2$, опускаются. В оценках точности аппроксимации, которую гарантируют асимптотические разложения, нам понадобятся величины $\|\theta_l\|$ и $\|\theta_l^{(r)}\|$, которые вычисляются по тем же формулам, что θ_l и $\theta_l^{(r)}$, с той разницей, что $(-1)^j$ заменяется на 1 и, кроме того, при нечетных l вместо моментов используются их абсолютные значения и вместо старшего момента α_l используется β_l .

Известно несколько способов упорядочения слагаемых в асимптотических разложениях. В одном из них слагаемые упорядочиваются по степеням переменной $1/\sqrt{n}$ (так получаются разложения Эджворта–Крамера), в другом — по порядкам многочленов Чебышёва–Эрмита (так

получаются разложения типа Грама–Шарлье). Во избежание недоразумений отметим, что разложения Грама–Шарлье отличаются от разложений Эджворта–Крамера не только перегруппировкой слагаемых. В разложениях Грама–Шарлье коэффициенты при некоторых функциях $H_k(x)\varphi(x)$ являются суммами величин, в которые входят множителями биномиальные коэффициенты C_n^s , т.е. многочлены порядка s от переменной n . Такие величины суть суммы слагаемых (одночленов), убывающих при росте n с различными скоростями, в том числе и быстрее $1/n^{m/2}$. Для того чтобы из разложений Грама–Шарлье получить разложения Эджворта–Крамера, такие одночлены следует перенести в остаточную часть разложения и лишь затем переупорядочить слагаемые в главной части разложения (подробнее см. в [1, гл. 4]).

Можно также упорядочивать слагаемые в асимптотических разложениях по числу сомножителей θ_k в суммах, являющихся коэффициентами при функциях $H_l(x)\varphi(x)$ (см. [2]). В таких разложениях коэффициенты при функциях $H_l(x)\varphi(x)$ формируются с помощью чисел

$$\Theta_{s,l} = \sum_{\substack{t_1+\dots+t_s=l \\ 3 \leq t_1, \dots, t_s}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \cdots \frac{\theta_{t_s}}{t_s!},$$

где суммирование проводится по всем наборам целых чисел $t_1, \dots, t_s$, удовлетворяющих указанным условиям. Из разложений, которые приводятся в этой работе, можно получать разложения типа Грама–Шарлье и Эджворта–Крамера (аналогично тому, как это делается в [2]). Мы будем рассматривать только последний способ упорядочения слагаемых.

Нам понадобятся величины $\alpha(T) = \max\{|f(t)|: t \geq T\}$ и

$$B_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt,$$

где $k > 0$, $\mu(t) = \max\{|f(t)|, e^{-t^2/2}\}$, а $T > 0$ — параметр, выбор которого находится в нашем распоряжении. Этот параметр присутствует в теореме, формулировка и доказательство которой приведены ниже. Формальные ограничения на величину T в теореме не налагаются, но по существу они появляются при попытках получить явные оценки величин $B_{k,n}$ для конкретных распределений. Отметим, что для любого распределения с конечным третьим моментом при $|t| \leq 1/\beta_3$ справедливо неравенство $\mu(t) \leq e^{-t^2/3}$, а для распределения с конечным четвертым моментом можно выбрать T (зависящее от распределения P) так, что $B_{k,n} \rightarrow B_k$, $n \rightarrow \infty$, где B_k — абсолютный момент порядка k стандартного нормального закона, деленный на $\sqrt{2\pi}$. Из условия, наложенного выше на характеристическую функцию $f(t)$, следует, что $\alpha(T)$ строго меньше единицы для любого $T > 0$.

Теорема. При условиях, наложенных выше на распределение P , для любого $n \geq \max\{\nu, m+1\}$ плотность $p_n(x)$ при всех $-\infty < x < \infty$ допускает представление

$$p_n(x) = \varphi(x) + C_n^1 \left(\sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l}{l! n^{l/2}} H_l(x) \varphi(x) + \frac{\theta_{m+2}^{(m)}}{(m+2)! n^{(m+2)/2}} H_{m+2}(x) \varphi(x) \right) + \sum_{s=2}^m C_n^s \sum_{l=3s}^{m+2s} \frac{\Theta_{s,l}}{n^{l/2}} H_l(x) \varphi(x) + R + \sum_{s=1}^m (r_s + R_s) + K,$$

где

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)! n^{m/2}} B_{m+2,n}, \\ |r_1| &\leq C_n^1 \left(\frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)! n^{(m+3)/2}} B_{m+3,n} + \frac{\|\theta_{m+4}^{(m)}\|}{(m+4)! n^{(m+4)/2}} B_{m+4,n} \right), \\ |r_s| &\leq C_n^s \sum_{l=3(s-1)}^{m-1+2(s-1)} |\Theta_{s-1,l}| \left(\frac{\|\theta_{m+2s-l+1}^{(m)}\|}{(m+2s-l+1)! n^{(m+2s-l+1)/2}} B_{m+2s-l+1,n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|\theta_{m+2s-l+2}^{(m+2s-l)}\|}{(m+2s-l+2)! n^{(m+2s-l+2)/2}} B_{m+2s-l+2,n} \right), \quad s = 2, \dots, m, \\ |R_1| &\leq C_n^2 \frac{|\theta_{m+2}^{(m)}|}{(m+2)! n^{(m+5)/2}} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} B_{m+5,n} + \frac{\beta_4 + 3}{4! \sqrt{n}} B_{m+6,n} \right), \\ |R_s| &\leq C_n^{s+1} \frac{|\Theta_{s,m+2s}|}{n^{(m+2s+3)/2}} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} B_{m+2s+3,n} + \frac{\beta_4 + 3}{4! \sqrt{n}} B_{m+2s+4,n} \right), \\ &\quad s = 2, \dots, m, \end{aligned}$$

а величина K , убывающая при росте n экспоненциально быстро, не превосходит суммы слагаемых, одно из которых есть $(\sqrt{n}/\pi) \alpha^{n-\nu}(T) \times \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt$ (T — произвольное положительное число), второе равно $e^{-T^2 n/2} / (\pi T \sqrt{n})$, а остальные получаются из главной части разложения заменой моментных характеристик распределения P на их абсолютные значения и заменой функций $H_l(x) \varphi(x)$, $l \geq 3$, на величины

$$\frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^\infty t^l e^{-t^2/2} dt.$$

Обратим внимание на то, что в главной части разложения используются моменты, порядки которых не превосходят $m+1$. Момент порядка $m+2$ используется только в оценке остаточной части разложения.

Для доказательства теоремы над понадобится лемма, в которой фигурируют величины R , r_s , R_s , аналогичные тем, что участвуют в теореме, однако смысл этих величин в теореме и в лемме различен; это не

должно привести к недоразумениям. При доказательстве леммы мы, как правило, не будем выписывать выражения для этих величин, а ограничимся лишь их оценками; это также не должно привести к недоразумениям.

Лемма. Если конечен момент порядка $m+2$, то характеристическая функция $f^n(t/\sqrt{n})$ распределения P_n для всех $n \geq m+1$ и всех действительных t допускает представление

$$f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{-t^2/2} + C_n^1 \left(\sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l}{l!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l + \frac{\theta_{m+2}^{(m)}}{(m+2)!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{m+2} \right) e^{-t^2/2} \\ + \sum_{s=2}^m C_n^s \sum_{l=3s}^{m+2s} \Theta_{s,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l e^{-t^2/2} + R + \sum_{s=1}^m (r_s + R_s),$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)! n^{m/2}} |t|^{m+2} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \\ |r_1| \leq \left(\frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} + \frac{\|\theta_{m+4}^{(m)}\|}{(m+4)!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right| \right) C_n^1 \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+3} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \\ |r_s| \leq \sum_{l=3(s-1)}^{m-1+2(s-1)} |\Theta_{s-1,l}| \left(\frac{\|\theta_{m+2s-l+1}\|}{(m+2s-l+1)!} + \frac{\|\theta_{m+2s-l+2}^{(m+2s-l)}\|}{(m+2s-l+2)!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right| \right) \\ \times C_n^s \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+2s+1} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \quad s = 2, \dots, m, \\ |R_1| \leq \frac{|\theta_{m+2}^{(m)}|}{(m+2)!} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} + \frac{\beta_4+3}{4!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right| \right) C_n^2 \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+5} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \\ |R_s| \leq |\Theta_{s,m+2s}| \left(\frac{|\theta_3|}{3!} + \frac{\beta_4+3}{4!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right| \right) C_n^{s+1} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+2s+3} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \\ s = 2, \dots, m.$$

Доказательство. При доказательстве леммы нам будет удобно представлять характеристическую функцию $e^{-t^2/2}$ стандартного нормального закона, предельного в ЦПТ, в виде, аналогичном виду допредельных характеристических функций, т.е. записывать функцию $e^{-t^2/2}$ как $g^n(t/\sqrt{n})$, где $g(u) = e^{-u^2/2}$. Мы часто будем опускать аргументы у функций f, g, μ и у других функций, которые нам понадобятся, это не должно привести к недоразумениям, все эти аргументы суть $t/\sqrt{n}$.

Рассмотрим разность $f^n(t/\sqrt{n}) - g^n(t/\sqrt{n})$. Так как для любых комплексных чисел a и b и любого натурального k справедливо равенство

$$a^k - b^k = \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} b^j (a - b), \quad (1)$$

то

$$f^n - g^n = \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j (f - g) = \psi \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^{j+1},$$

где $\psi = e^{t^2/(2n)} f(t/\sqrt{n}) - 1$. Слегка модифицируя доказательство леммы 1 из [1, гл. 4, § 7], нетрудно убедиться в справедливости представления

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l}{l!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l + \frac{\theta_{m+2}^{(m)}}{(m+2)!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{m+2} + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+2} \\ & + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+3} + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+4}^{(m)}\|}{(m+4)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+4}. \end{aligned}$$

Здесь и далее символ γ обозначает комплекснозначные измеримые функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы. Эти функции могут быть различны даже в пределах одной формулы.

Используя это представления ψ , мы видим, что

$$\begin{aligned} f^n - g^n = & \left(\sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l}{l!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l + \frac{\theta_{m+2}^{(m)}}{(m+2)!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{m+2} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^{j+1} \right) \\ & + \gamma \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+2} \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j + r_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\|r_1\| \leq \left(\frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+3} + \frac{\|\theta_{m+4}^{(m)}\|}{(m+4)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+4} \right) n \mu^{n-1}.$$

Обозначив в правой части (2) первый сомножитель в первом слагаемом через A и вновь воспользовавшись равенством (1), мы можем это слагаемое записать в виде

$$\begin{aligned} A \sum_{j_1=0}^{n-1} f^{n-j_1-1} g^{j_1+1} &= A \sum_{j_1=0}^{n-2} (f^{n-j_1-1} - g^{n-j_1-1}) g^{j_1+1} + A n g^n \\ &= A C_n^1 g^n + \sum_{j_1=0}^{n-2} \left(\sum_{j_2=0}^{n-j_1-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_2} (f - g) \right) g^{j_1+1} \\ &= A C_n^1 g^n + A \sum_{\substack{j_1+j_2 \leq n-2 \\ 0 \leq j_1, j_2}} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+1} (f - g). \end{aligned}$$

В последней сумме суммирование проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел j_1, j_2 , для которых $j_1 + j_2 \leq n - 2$. Первое слагаемое в правой части последнего равенства участвует в формировании главной части разложения разности $f^n - g^n$, а второе мы можем

записать в виде

$$\left(\sum_{t_1=3}^{m+1} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1} \psi \right) \left(\sum_{\substack{j_1+j_2 \leq n-2 \\ 0 \leq j_1, j_2}} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2} \right) + R_1, \quad (3)$$

где

$$|R_1| \leq \frac{|\theta_{m+2}^{(m)}|}{(m+2)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2} C_n^2 \left(\frac{|\theta_3|}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 + \frac{\beta_4+3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) \mu^{n-1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любого $1 \leq s \leq n-1$ число наборов неотрицательных целых чисел $j_1, \dots, j_s$ таких, что $j_1 + \dots + j_s \leq n-s$, равно C_n^s , и почти очевидной оценкой

$$|f-g| \leq \frac{|\theta_3|}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 + \frac{\beta_4+3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4.$$

Рассмотрим первый сомножитель в первом слагаемом в (3). Из упоминавшейся леммы 1 из [1] следует, что для любого $3 \leq t_1 \leq m+1$

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{t_2=3}^{m+4-t_1} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_2} + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+4-t_1+1}\|}{(m+4-t_1+1)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+4-t_1+1} \\ & + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+4-t_1+2}^{(m+4-t_1)}\|}{(m+4-t_1+2)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+4-t_1+2}. \end{aligned}$$

Отметим, что наибольший порядок моментов, участвующих в формировании правой части последнего равенства, есть $m+2$: момент β_{m+2} участвует в формировании величины $\|\theta_{m+2}\|$, которая присутствует в правой части последнего равенства при $t_1 = 3$; моменты порядка $m+2$ далее нигде появляться не будут. Из указанных представлений функции ψ следует, что первый сомножитель в первом слагаемом в (3) равен

$$\sum_{t_1=3}^{m+1} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1} \sum_{t_2=3}^{m+4-t_1} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_2} + \rho, \quad (4)$$

где

$$|\rho| \leq \sum_{t_1=3}^{m+1} \left(\frac{|\theta_{t_1}|}{t_1!} \left(\frac{\|\theta_{m+5-t_1}\|}{(m+5-t_1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+5} + \frac{\|\theta_{m+6-t_1}^{(m+4-t_1)}\|}{(m+6-t_1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+6} \right) e^{t^2/(2n)}.$$

Нетрудно проверить, что сумму по t_1 из (4) можно записать в виде

$$\sum_{t_1=3}^{m+1} \sum_{t_2=3}^{m+4-t_1} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+t_2} = \sum_{l=6}^{m+4} \left(\sum_{\substack{t_1+t_2=l \\ 3 \leq t_1, t_2}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \right) \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l.$$

Из сказанного следует, что первое слагаемое в (3) равно

$$\left(\sum_{l=6}^{m+4} \left(\sum_{\substack{t_1+t_2=l \\ 3 \leq t_1, t_2}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \right) \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \right) \left(\sum_{\substack{j_1+j_2 \leq n-2 \\ 0 \leq j_1, j_2}} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2} \right) + r_2, \quad (5)$$

где

$$|r_2| \leq \sum_{t_1=3}^{m+1} \left(\frac{|\theta_{t_1}|}{t_1!} \left(\frac{\|\theta_{m+5-t_1}\|}{(m+5-t_1)!} + \frac{\|\theta_{m+6-t_1}^{(m+4-t_1)}\|}{(m+6-t_1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right| \right) \right) \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+5} C_n^2 \mu^{m-1}.$$

Второй сомножитель в первом слагаемом (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j_1+j_2 \leq n-3 \\ 0 \leq j_1, j_2}} (f^{n-j_1-j_2-2} - g^{n-j_1-j_2-2}) g^{j_1+j_2+2} + C_n^2 g^n \\ &= \sum_{\substack{j_1+j_2 \leq n-3 \\ 0 \leq j_1, j_2}} \left(\sum_{j_3=0}^{n-j_1-j_2-3} f^{n-j_1-j_2-j_3-3} g^{j_3} (f-g) \right) g^{j_1+j_2+2} + C_n^2 g^n \\ &= C_n^2 g^n + \sum_{\substack{j_1+j_2+j_3 \leq n-3 \\ 0 \leq j_1, j_2, j_3}} f^{n-j_1-j_2-j_3-3} g^{j_1+j_2+j_3+2} (f-g). \end{aligned}$$

Поэтому первое слагаемое в (5) равно

$$\begin{aligned} & C_n^2 \sum_{l=6}^{m+4} \left(\sum_{\substack{t_1+t_2=l \\ 3 \leq t_1, t_2}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \right) \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l g^n \\ &+ \left(\sum_{l=6}^{m+3} \left(\sum_{\substack{t_1+t_2=l \\ 3 \leq t_1, t_2}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \right) \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \psi \right) \\ &\times \left(\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3 \leq n-3 \\ 0 \leq j_1, j_2, j_3}} f^{n-j_1-j_2-j_3-3} g^{j_1+j_2+j_3+3} \right) + R_2, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$|R_2| \leq \left| \sum_{\substack{t_1+t_2=m+4 \\ 3 \leq t_1, t_2}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \frac{\theta_{t_2}}{t_2!} \right| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+4} C_n^3 \left(\frac{|\theta_3|}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 + \frac{\beta_4+3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) \mu^{n-1}.$$

При $m = 2$ сумма по $6 \leq l \leq m+4$ состоит из единственного слагаемого с $l = 6$, сумма по $t_1 + t_2 = 6$ состоит из единственного слагаемого $(\theta_3/3!)^2$; предпоследнее слагаемое в (6) следует опустить, и доказательство леммы на этом заканчивается.

Далее мы считаем, что $m \geq 3$. Положим

$$U_s = \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \Theta_{s,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \psi,$$

$$V_{s+1} = \sum_{\substack{j_1+\dots+j_{s+1} \leq n-(s+1) \\ 0 \leq j_1, \dots, j_{s+1}}} f^{n-j_1-\dots-j_{s+1}-(s+1)} g^{j_1+\dots+j_{s+1}+s+1}$$

и $W_s = U_s V_{s+1}$, где $s = 1, \dots, m-1$.

Легко проверить, что W_1 совпадает с первым слагаемым в (3), а W_2 — с предпоследним слагаемым в (6), и из сказанного выше следует, что

$$W_1 = C_n^2 \sum_{l=6}^{m+4} \Theta_{2,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l g^n + W_2 + r_2 + R_2.$$

Оказывается, что для любого $1 \leq s \leq m-2$

$$W_s = C_n^{s+1} \sum_{l=3(s+1)}^{m+2(s+1)} \Theta_{s+1,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l g^n + W_{s+1} + r_{s+1} + R_{s+1}, \quad (7)$$

способ формирования величин r_{s+1} и R_{s+1} станет ясен из дальнейшего, а их оценки будут указаны ниже.

Действительно, для каждого l из области суммирования в выражении для U_s мы можем представить величину ψ в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{t_{s+1}=3}^{m+2(s+1)-l} \frac{\theta_{t_{s+1}}}{t_{s+1}!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_{s+1}} \\ & + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+2(s+1)-l+1}\|}{(m+2(s+1)-l+1)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+2(s+1)-l+1} \\ & + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_{m+2(s+1)-l+2}^{(m+2(s+1)-l)}\|}{(m+2(s+1)-l+2)!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{m+2(s+1)-l+2}. \end{aligned}$$

Отметим, что при $2 \leq s$ суммирование в первой сумме ведется по непустому множеству индексов и в правой части последнего равенства используются моменты порядков не выше $m+3-s \leq m+1$. Из этих представлений функции ψ следует, что

$$W_s = \left(\sum_{l=3s}^{m-1+2s} \Theta_{s,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l \sum_{t_{s+1}=3}^{m+2(s+1)-l} \frac{\theta_{t_{s+1}}}{t_{s+1}!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_{s+1}} \right) V_{s+1} + r_{s+1}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} |r_{s+1}| \leq & \sum_{l=3s}^{m-1+2s} |\Theta_{s,l}| \left(\frac{\|\theta_{m+2(s+1)-l+1}\|}{(m+2(s+1)-l+1)!} \right. \\ & \left. + \frac{\|\theta_{m+2(s+1)-l+2}^{(m+2(s+1)-l)}\|}{(m+2(s+1)-l+2)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right| \right) \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2(s+1)+1} C_n^{s+1} \mu^{n-1}. \end{aligned}$$

Первый сомножитель в первом слагаемом в правой части (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \left(\sum_{\substack{t_1+\dots+t_s=l \\ 3 \leq t_1, \dots, t_s}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \dots \frac{\theta_{t_s}}{t_s!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+\dots+t_s} \right. \\
 & \quad \times \left. \sum_{t_{s+1}=3}^{m+2(s+1)-(t_1+\dots+t_s)} \frac{\theta_{t_{s+1}}}{t_{s+1}!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_{s+1}} \right) \\
 &= \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \sum_{\substack{t_1+\dots+t_s=l \\ 3 \leq t_1, \dots, t_s}} \sum_{t_{s+1}=3}^{m+2(s+1)-(t_1+\dots+t_s)} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \dots \frac{\theta_{t_{s+1}}}{t_{s+1}!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{t_1+\dots+t_{s+1}} \\
 &= \sum_{l=3(s+1)}^{m+2(s+1)} \Theta_{s+1,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Второй сомножитель в первом слагаемом в правой части (8) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V_{s+1} &= \sum_{\substack{j_1+\dots+j_{s+1} \leq n-(s+1)-1 \\ 0 \leq j_1, \dots, j_{s+1}}} (f^{n-j_1-\dots-j_{s+1}-(s+1)} - g^{n-j_1-\dots-j_{s+1}-(s+1)}) g^{j_1+\dots+j_{s+1}+s+1} + C_n^{s+1} g^n \\
 &= C_n^{s+1} g^n + \sum_{\substack{j_1+\dots+j_{s+1} \leq n-(s+1)-1 \\ 0 \leq j_1, \dots, j_{s+1}}} \sum_{j_{s+2}=0}^{n-j_1-\dots-j_{s+1}-(s+1)-1} f^{n-j_1-\dots-j_{s+2}-(s+2)} \\
 & \quad \times g^{j_1+\dots+j_{s+2}+s+1} (f - g) \\
 &= C_n^{s+1} g^n \sum_{\substack{j_1+\dots+j_{s+2} \leq n-(s+2) \\ 0 \leq j_1, \dots, j_{s+2}}} f^{n-j_1-\dots-j_{s+2}-(s+2)} g^{j_1+\dots+j_{s+2}+s+1} (f - g). \tag{10}
 \end{aligned}$$

Произведение правой части (9) и первого слагаемого из правой части (10) присутствует в (7), оно участвует в формировании главной части разложения $f^n - g^n$. Произведение суммы из правой части (9) без последнего слагаемого и суммы по $j_1, \dots, j_{s+2}$ из правой части (10), где мы можем записать $f - g$ как $g\psi$, равно произведению $U_{s+1}V_{s+2}$, т.е. величине W_{s+1} . Наконец, произведение последнего слагаемого из (9) и суммы по $j_1, \dots, j_{s+2}$ из (10) дает величину R_{s+1} ,

$$|R_{s+1}| \leq |\Theta_{s+1,m+2(s+1)}| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2(s+1)} C_n^{s+2} \mu^{n-1} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 + \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right).$$

Теперь равенство (7) становится очевидным.

Используя равенство (7) при $s = 1, \dots, m-2$, мы видим, что

$$\begin{aligned} f^n - g^n = & C_n^1 \left(\sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l}{l!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l + \frac{\theta_{m+2}^{(m)}}{(m+2)!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{m+2} \right) g^n \\ & + \sum_{s=2}^{m-1} C_n^s \sum_{l=3s}^{m+2s} \Theta_{s,l} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^l g^n + W_{m-1} + \sum_{s=1}^{m-1} (r_s + R_s). \end{aligned}$$

Рассмотрим величину W_{m-1} . Так как U_{m-1} состоит из единственного слагаемого, то

$$W_{m-1} = \Theta_{m-1, 3(m-1)} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{3(m-1)} \psi \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_m \leq n-m \\ 0 \leq j_1, \dots, j_m}} f^{n-j_1-\dots-j_m-m} g^{j_1+\dots+j_m+m}.$$

Для величины ψ справедливо представление

$$\psi = \frac{\theta_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_4\|}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \gamma e^{t^2/(2n)} \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5,$$

а

$$\Theta_{m-1, 3(m-1)} = \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_{m-1} = 3(m-1) \\ 3 \leq t_1, \dots, t_{m-1}}} \frac{\theta_{t_1}}{t_1!} \dots \frac{\theta_{t_{m-1}}}{t_{m-1}!} = \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^{m-1}.$$

Поэтому

$$W_{m-1} = \Theta_{m, 3m} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{3m} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_m \leq n-m \\ 0 \leq j_1, \dots, j_m}} f^{n-j_1-\dots-j_m-m} g^{j_1+\dots+j_m+m} + r_m, \quad (11)$$

где

$$|r_m| \leq \left| \frac{\theta_3}{3!} \right|^{m-1} \left(\frac{\|\theta_4\|}{4!} + \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right| \right) \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{3m+1} C_n^m \mu^{n-1}.$$

Правая часть (11) без величин r_m равна

$$\begin{aligned} & \Theta_{m, 3m} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^{3m} \left(C_n^m g^n \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{m+1} \leq n-(m+1) \\ 0 \leq j_1, \dots, j_{m+1}}} f^{n-j_1-\dots-j_{m+1}-(m+1)} g^{j_1+\dots+j_{m+1}+m+1} \right) \\ & = \Theta_{m, 3m} C_n^m g^n + R_m, \end{aligned}$$

где

$$|R_m| \leq |\Theta_{m, 3m}| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{3m+3} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} + \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right| \right) C_n^{m+1} \mu^{n-1}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы основано на том, что при $n \geq \nu$ мы можем разность $p_n(x) - \varphi(x)$ вычислять с помощью формулы обращения

$$\begin{aligned} p_n(x) - \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T\sqrt{n}} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Появление свободного параметра T связано с тем, что для некоторых распределений P содержательные оценки функции $\mu(t)$ можно получать лишь для конечных интервалов $-T \leq t \leq T$.

Абсолютная величина последнего слагаемого в (12) не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt < \frac{e^{-T^2 n/2}}{\pi T \sqrt{n}},$$

а абсолютная величина предпоследнего слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_T^{\infty} |f(t)|^n dt \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt.$$

При вычислении первого слагаемого в правой части (12) мы можем воспользоваться утверждением леммы. Оценки слагаемых в остаточной части разложения разности $f^n(t/\sqrt{n})e^{-t^2/2}$, т.е. оценки слагаемых, содержащих функции $|t|^k \mu^{n-1}(t/\sqrt{n})$, проводятся без труда. При интегрировании слагаемых главной части разложения указанной разности нужно лишь учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} (it)^l e^{-t^2/2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it)^l e^{-t^2/2} dt + k \\ &= H_l(x) \varphi(x) + k, \end{aligned}$$

где

$$|k| \leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^l e^{-t^2/2} dt.$$

После этих пояснений утверждение теоремы становится очевидным.

Приведем три следствия теоремы.

Для распределений с конечным четвертым моментом при $n \geq \max(\nu, 3)$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(\frac{\theta_4^{(2)}}{4!} H_4(x) + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 H_6(x) \right) \varphi(x) + R + K, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 |R| \leq & \frac{\beta_4}{4!} \frac{B_{4,n}}{n} + \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \frac{B_{5,n}}{n^{3/2}} + \left(\frac{n-1}{2n} \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\|\theta_4\|}{4!} + \frac{n-1}{2n} \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4^{(2)}|}{4!} \right) \frac{B_{7,n}}{n^{3/2}} \\
 & + \frac{(n-1)(n-2)}{3! n^2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 \frac{B_{9,n}}{n^{3/2}} \\
 & + \frac{\|\theta_6^{(2)}\|}{6!} \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \frac{|\theta_4^{(2)}|}{4!} \frac{\beta_4+3}{4!} \right) \frac{B_{8,n}}{n^2} \\
 & + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\beta_4+3}{4!} \frac{B_{10,n}}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Для распределений с конечным пятым моментом при $n \geq \max(\nu, 4)$

$$\begin{aligned}
 p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{1}{n} \left(\frac{\theta_4}{4!} H_4(x) + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 H_6(x) \right) \varphi(x) \\
 & + \frac{1}{n^{3/2}} \left(\frac{\theta_5^{(3)}}{5!} H_5(x) + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_4}{4!} H_7(x) \right. \\
 & \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 H_9(x) \right) \varphi(x) + R + K,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 |R| \leq & \frac{\beta_5}{5!} \frac{B_{5,n}}{n^{3/2}} + \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} \frac{B_{6,n}}{n^2} \\
 & + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\|\theta_5\|}{5!} + \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\|\theta_4\|}{4!} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_5^{(3)}|}{5!} \right) \frac{B_{8,n}}{n^2} \\
 & + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \left(\left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\|\theta_4\|}{4!} + 2 \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{|\theta_4|}{4!} \right) \frac{B_{10,n}}{n^2} \\
 & + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24n^3} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^4 \frac{B_{12,n}}{n^2} \\
 & + \frac{\|\theta_7^{(3)}\|}{7!} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} + \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} + \frac{\beta_4+3}{4!} \frac{|\theta_5^{(3)}|}{5!} \right) \frac{B_{9,n}}{n^{5/2}} \\
 & + \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} + 2 \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\beta_4+3}{4!} \right) \frac{B_{11,n}}{n^{5/2}} + \frac{1}{4!} \left| \frac{\theta_3}{3!} \right|^3 \frac{\beta_4+3}{4!} \frac{B_{13,n}}{n^{5/2}}.
 \end{aligned}$$

Для распределений с конечным шестым моментом при $n \geq \max(\nu, 5)$

$$\begin{aligned}
 p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) \\
 & + \frac{1}{n} \left(\frac{\theta_4}{4!} H_4(x) + \left(\frac{\theta_6^{(4)}}{6! n} + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \right) H_6(x) \right) \varphi(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n^{3/2}} \left(\frac{\theta_5}{5!} H_5(x) + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_4}{4!} H_7(x) \right. \\
& \quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 H_9(x) \right) \varphi(x) \\
& + \frac{1}{n^2} \left(\frac{n-1}{n} \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_5}{5!} + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \right) H_8(x) \varphi(x) \\
& + \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\theta_4}{4!} H_{10}(x) \varphi(x) \\
& + \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4! n^3} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^4 H_{12}(x) \varphi(x) + R + K,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
|R| \leq & \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{\|\theta_7^{(5)}\|}{7!} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} \\
& + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\|\theta_6\|}{6!} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \right) + \left(\frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\|\theta_5\|}{5!} + \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{|\theta_5|}{5!} \right) \right) \frac{B_{9,n}}{n^{5/2}} \\
& + \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\|\theta_5\|}{5!} + 2 \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{|\theta_5|}{5!} + \frac{|\theta_3|}{3!} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 + 2 \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{|\theta_4|}{4!} \right) \frac{B_{11,n}}{n^{5/2}} \\
& + \frac{1}{4!} \left(\left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 \frac{|\theta_4|}{4!} + 3 \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 \frac{|\theta_4|}{4!} \right) \frac{B_{13,n}}{n^{5/2}} + \frac{1}{5!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^5 \frac{B_{15,n}}{n^{5/2}} + \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \frac{B_{8,n}}{n^3} \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\|\theta_7^{(5)}\|}{7!} + \left(\frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} + \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \right) + \frac{|\theta_5|}{5!} \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \right) \frac{B_{10,n}}{n^3} \\
& + \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} + 2 \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\theta_4}{4!} \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{|\theta_5|}{5!} + \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{\beta_4 + 3}{4!} \right) \frac{B_{12,n}}{n^3} \\
& + \frac{1}{4!} \left(\left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} + 3 \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{4!} \right) \frac{B_{14,n}}{n^3} \\
& + \frac{1}{5!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^4 \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{16,n}}{n^3}.
\end{aligned}$$

О величинах K сказано в формулировке теоремы. Отметим, что $\theta_4^{(2)}/4! = -1/8$, $\theta_5^{(3)}/5! = -\alpha_3/12$, $\theta_6^{(2)}/6! = 1/24$, $\theta_6^{(4)}/6! = -\alpha_4/48 + 1/24$ и вместо величины $\|\theta_4\|/4!$ ($= (\beta_4 + 9)/4!$) можно использовать $(\beta_4 + 3)/4!$, вместо величины $\|\theta_6^{(2)}\|/6!$ ($= 1/12$) можно использовать $1/24$, вместо величины $\|\theta_6^{(4)}\|/6!$ ($= \alpha_4/48 + 1/12$) можно использовать $\alpha_4/48 + 1/24$ и вместо $\|\theta_8^{(4)}\|/8!$ ($= \alpha_4/192 + 5/384$) можно использовать $\alpha_4/192 + 1/128$.

Способ упорядочения слагаемых в главных частях указанных разложений связан с тем, что в общем случае (это проявляется и в следствиях теоремы) в них присутствует ровно одно слагаемое, убывающее при росте n как $1/\sqrt{n}$, оно связано с многочленом $H_3(x)$; присутствуют два

слагаемых, убывающих как $1/n$, они связаны с многочленами $H_4(x)$ и $H_6(x)$; при $m \geq 3$ присутствуют три слагаемых, убывающих как $1/n^{3/2}$, они связаны с многочленами $H_5(x)$, $H_7(x)$ и $H_9(x)$, и т.д.; слагаемые, убывающие как $1/n^{k/2}$, $k \geq 3$, связаны с тройками многочленов $H_{3k-4}(x)$, $H_{3k-2}(x)$ и $H_{3k}(x)$.

Для получения этих следствий использовались равенства

$$\begin{aligned}\Theta_{2,6} &= \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2, & \Theta_{2,7} &= 2\frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_4}{4!}, & \Theta_{2,8} &= 2\frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_5}{5!} + \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2, \\ \Theta_{3,9} &= \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^3, & \Theta_{3,10} &= 3\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{\theta_4}{4!}, & \Theta_{4,12} &= \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^4.\end{aligned}$$

В оценке остаточной части первого из следствий использовались явные выражения биномиальных коэффициентов, в оценке второго — явные выражения и неравенства $C_n^k \leq n^k/k!$, в оценке остаточной части третьего — только такие неравенства.

Обратим внимание на то, что все слагаемые в оценке остаточной части разложения первого из следствий, убывающие при росте n медленнее $1/n^2$, «переходят» в главную часть разложения из второго следствия: величина $\beta_4 (= \alpha_4)$ участвует в формировании θ_4 , а если во всех слагаемых оценки остаточной части первого разложения, убывающих как $1/n^{3/2}$, снять знаки модуля, нормы, верхние индексы у величин $\theta_4^{(2)}$ и $\theta_5^{(3)}$ и заменить числа $B_{k,n}$ на функции $H_k(x)\varphi(x)$, то сумма этих слагаемых совпадет с суммой величин, убывающих как $1/n^{3/2}$, в главной части разложения из второго следствия. Аналогичные слова можно сказать и о слагаемых, убывающих медленнее $1/n^{5/2}$, в оценке остаточной части разложения из второго следствия. Отметим, что при четных k справедливо равенство $\max_{-\infty < x < \infty} |H_k(x)|\varphi(x) = B_k$ и этот максимум достигается при $x = 0$; указанный максимум не превосходит B_k при всех натуральных k .

У читателя могут вызвать недоумение значения постоянных при некоторых комбинациях моментных характеристик в оценках остаточных частей разложений, точнее, в тех частях оценок величин R , которые при росте n убывают с максимальной скоростью. Так, в оценке остаточной части третьего из приведенных следствий коэффициент при $(|\theta_3|/3!)(\|\theta_7^{(5)}\|/7!)$ (в сумме при $B_{10,n}/n^3$, она входит в оценку величины r_2) равен $1/2$ (это — оценка величины $(n-1)/(2n)$). В связи с этим отметим, что в оценку остаточной части разложения для распределений с конечным седьмым моментом добавится слагаемое

$$\frac{n-1}{2n} \frac{|\theta_7^{(5)}|}{7!} \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{B_{10,n}}{n^3}$$

(оно войдет в оценку величины R_1), а для распределений с конечным

восьмым моментом главная часть разложения содержит слагаемое

$$\frac{1}{n^3} \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_7}{7!} H_{10}(x) \varphi(x).$$

Оказывается, что оценка теоремы при четных m неумлучшаема в том смысле, что если первое слагаемое в этой оценке (единственное, которое убывает как $n^{-m/2}$ при росте n) умножить на любую постоянную $c < 1$ (сколь угодно близкую к единице), то при некотором выборе $T > 0$ для $x = 0$ оценка станет неверной, начиная с некоторого n (отметим, что неудачный выбор T может привести к большим значениям чисел $B_{m+2,n}$ и сказанное может оказаться неверным). Для того чтобы убедиться в этом, покажем вначале, что для распределений с конечным четвертым моментом параметр T можно выбрать так, что $B_{k,n} \rightarrow B_k$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $k > 0$.

Прежде всего заметим, что поскольку в определение функции $\mu(t)$ входит $e^{-t^2/2}$, то $\liminf_{n \rightarrow \infty} B_{k,n} \geq B_k$ для любого $T > 0$ и нам достаточно показать, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} B_{k,n} \leq B_k$ при некотором $T > 0$. Нам будет удобнее работать с верхним пределом величин

$$\begin{aligned} B_{k,n+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n+1}}^{T\sqrt{n+1}} |t|^k \mu^n \left(\frac{t}{\sqrt{n+1}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n+1}}^{T\sqrt{n+1}} |t|^k \mu^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right) dt \\ &= \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)^{(k+1)/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt \\ &= \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)^{(k+1)/2} \bar{B}_{k,n+1}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить (см., например, [1, гл. 4, § 6]), что для распределений с $\theta_4 < 6$ справедлива оценка

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

при $|t| \leq \sqrt{2 \min(1, (6 - \theta_4)/(6 + \theta_4))}$ и, кроме того, $e^{-t^2/2} \leq 1/\sqrt{1+t^2}$ при всех действительных t . Поэтому для распределений с $\theta_4 \leq 3$ функция $\mu(t)$ не превосходит $1/\sqrt{1+t^2}$ при $|t| \leq \sqrt{2/3} = T$ и для указанного T и $n > k+1$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{k,n+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \frac{1}{(\sqrt{1+t^2/n})^n} dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty t^{k-1} \frac{1}{(1+t^2/n)^{n/2}} dt^2 \\ &= \frac{n^{(k+1)/2}}{2\pi} \int_0^\infty u^{(k-1)/2} \frac{1}{(1+u)^{n/2}} du = \frac{n^{(k+1)/2}}{2\pi} B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{n}{2} - \frac{k+1}{2}\right) \\ &= \frac{2^{(k+1)/2} \Gamma((k+1)/2)}{2\pi} \frac{(n/2)^{(k+1)/2} \Gamma(n/2 - (k+1)/2)}{\Gamma(n/2)}. \end{aligned}$$

Первая дробь в правой части последнего равенства совпадает с B_k , а вторая стремится к единице при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, для распределений P , у которых $\theta_4 \leq 3$, выбор $T = \sqrt{2/3}$ (можно брать любое $0 < T \leq \sqrt{2/3}$) приводит к соотношению $B_{k,n} \rightarrow B_k$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть для распределения P величина θ_4 строго больше 3. Так как $\theta_4(P_l) = \theta_4(P)/l$ для любого натурального l , то, взяв в качестве l целую часть числа $\theta_4(P)$, мы получим распределение $Q = P_l$, для которого $\theta_4(Q) \leq 3/2$. Нетрудно проверить (переходя, например, к симметризованным случайным величинам), что для распределений P с $\theta_4 > 0$ в некоторой окрестности нуля справедливо неравенство $|f(t/\sqrt{2})|^2 \geq e^{-t^2/2}$. Поэтому для распределения P с $\theta_4 > 3$ для некоторого $\tau > 0$ при $|t| \leq \tau$ функция $\mu(t)$ совпадает с $|f(t)|$. Введем функцию $N = N(n)$, равную целой части числа n/l , где выбор l указан выше; ясно, что $n = lN + p$, где $0 \leq p < l$. Для любого $0 < T \leq \tau$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{k,n+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \left| f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \left| f^{lN} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ &= (\sqrt{n})^{k+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T |u|^k |f^{lN}(u)| du \\ &= \left(\frac{n}{lN} \right)^{(k+1)/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{lN}}^{T\sqrt{lN}} |t|^k \left| f^{lN} \left(\frac{t}{\sqrt{lN}} \right) \right| dt \\ &= \left(1 + \frac{p}{lN} \right)^{(k+1)/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{lN}}^{T\sqrt{lN}} |t|^k \left| q^N \left(\frac{t}{\sqrt{lN}} \right) \right| dt, \end{aligned}$$

где q — характеристическая функция распределения Q . Из сказанного выше следует, что

$$|q(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{при} \quad |t| \leq \sqrt{2 \min \left(1, \frac{6 - \theta_4(Q)}{6 + \theta_4(Q)} \right)} \leq 3\sqrt{\frac{2}{15}}$$

и если $T\sqrt{l} \leq 3\sqrt{2/15}$, то для последнего интеграла справедлива та же оценка, что для интеграла из правой части первого равенства в цепочке (13) с заменой n на N .

Отсюда следует, что для распределений P , у которых $\theta_4 > 3$, выбор $T = \min(\tau, 3\sqrt{2/(15l)})$ вновь приводит к соотношению $B_{k,n} \rightarrow B_k$ при $n \rightarrow \infty$.

Можно проверить, что если при формировании главной части разложения мы будем использовать момент α_{m+2} ($= \beta_{m+2}$ для четных m), т.е. будем использовать величину

$$\frac{\theta_{m+2}}{(m+2)!} = \frac{\alpha_{m+2}}{(m+2)!} + \frac{\theta_{m+2}^{(m)}}{(m+2)!}$$

вместо $\theta_{m+2}^{(m)}/(m+2)!$, то так построенное разложение будет аппроксимировать плотность $p_n(x)$ с точностью $o(n^{-m/2})$, $n \rightarrow \infty$. Другими словами, для любого действительного x

$$p_n(x) - \left(A_n(x) + \frac{\alpha_{m+2}}{(m+2)! n^{m/2}} H_{m+2}(x) \varphi(x) \right) = o(n^{-m/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $A_n(x)$ означает главную часть разложения из утверждения теоремы. Таким образом, для $x = 0$ при четном m

$$|p_n(0) - A_n(0)| = \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)! n^{m/2}} B_{m+2} + o(n^{-m/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь мы использовали то, что для четного m абсолютная величина свободного члена в многочлене $H_{m+2}(x)$ совпадает с моментом порядка $m+2$ стандартного нормального закона и $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$.

Отсюда и из только что доказанного утверждения о поведении величин $B_{k,n}$ и следует сформулированное выше утверждение о неулучшаемости оценки теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.
2. Сенатов В. В., Соболев В. Н. О новых формах асимптотических разложений в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 1, с. 124–140.

Поступила в редакцию
15.XI.2011