Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Условие равномерной интегрируемости в сильных предельных теоремах для отношений. III, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 682–700

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:19:01

© 2012 г.

ШУР М. Г.*

УСЛОВИЕ РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В СИЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ОТНОШЕНИЙ. III

В отличие от предыдущих частей работы (см. [22] и [30]), где речь шла о сильных предельных теоремах для отношений (СПТО) в близком к традиционному смысле, теперь предлагаются новые СПТО с исключительными параметрическими множествами. Особенность таких теорем состоит в игнорировании в их утверждениях некоторых значений временного параметра, образующих то или иное множество плотности 0. В качестве иллюстрации общей теории приводятся СПТО указанного типа для случайных блужданий на унимодулярных локально компактных группах.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, сильная предельная теорема для отношений, случайное блуждание на группе.

10. Введение в часть III. При рассмотрении СПТО в литературе неоднократно ставился вопрос о проверке условий типа (1.1), (7.4) или близких к ним (см. [4], [6], [11] или [22, предложение 4.2]). Однако такая проверка по-прежнему вызывает большие трудности, и в данной части, завершающей исследование, проведенное в [22] и [30], мы отказываемся от упомянутых условий, правда, лишь в случае цепей Маркова из семейства $\mathcal{X}_1$ (см. § 6). Этот отказ заставляет иметь дело со специфическим СПТО, а именно с СПТО с исключительными параметрическими множествами, для чего потребуются следующие определения.

Рассмотрим множество $\mathcal{J}$ всевозможных (в том числе и конечных) подпоследовательностей $\mathcal{N}$ натурального ряда $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$; пустая последовательность, т.е. пустое множество $\emptyset$, также включается в $\mathcal{J}$. Число членов $m \in \mathcal{N}$, не превышающих некоторое $n \geq 1$, где $\mathcal{N} \in \mathcal{J}$ и $\mathcal{N} \neq \emptyset$, обозначим $q_n(\mathcal{N})$ и положим $q_n(\emptyset) = 0$. Будем говорить, что $\mathcal{N} \in \mathcal{J}$ имеет плотность 0 (точнее, верхнюю асимптотическую плотность 0 [25]), если $q(\mathcal{N}) = 0$, где положено $q(\mathcal{N}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} q_n(\mathcal{N})/n$. Рассмотрим также $\mathcal{J}_0 = \{\mathcal{N} \in \mathcal{J} : q(\mathcal{N}) = 0\}$.

Пусть для последовательности вещественных чисел $\{b_n; n \geq k\}$ существует частичный предел $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} b_n$, где $k \geq 1$ и $\mathcal{N} \in \mathcal{J}_0$.

*Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия.

Тогда β и $\mathcal{N}$ назовем соответственно аппроксимативным пределом данной последовательности и исключительным параметрическим множеством (ИПМ) для нее и будем писать

$$\beta = \text{ар-}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (10.1)$$

Если этот предел существует, то его значение не зависит от выбора конкретного ИПМ. Если же найдется конечное ИПМ, то последнее можно считать пустым, и в этом случае $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Теперь можно охарактеризовать СПТО с ИПМ как отличающиеся от традиционных СПТО наличием в их утверждениях аппроксимативных пределов вместо обычных. Впервые СПТО с ИПМ появились в [14].

Основными результатами этой части служат теоремы 12.2–12.4, 13.1 и 13.2. Им предшествует теорема 11.1, касающаяся существования ИПМ с подходящими свойствами. Теоремы 12.2–12.4 являются новыми СПТО с ИПМ; в них, в частности, упразднено не слишком удачное условие (A4) из [14]. Отметим, что в теоремах 12.3 и 12.4 исследуются цепи Маркова на локально компактных пространствах, и, что отдаленной предшественницей первой из них следует считать теорему 1 из [2]. Иллюстрацией общей теории служат теоремы 13.1 и 13.2, в которых речь идет о случайных блужданиях на унимодулярных (т.е. имеющих двусторонне инвариантные меры Хаара) локально компактных группах. В дальнейшем мы планируем охватить весь класс блужданий, рассмотренных в [2], а пока заметим, что для широкого круга случаев наши условия выглядят несколько предпочтительнее (например, в теореме 13.2 не предполагается непрерывность соответствующих функций).

11. Существование адаптированных ИПМ. Рассмотрим неприводимую цепь Маркова X с пространством состояний $(E, \mathcal{E})$ и непустыми множествами $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ всевозможных малых функций и нетривиальных малых мер соответственно. Если для всех $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$ выполняются равенства

$$\text{ар-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(P^{n+k}f)}{\nu(P^n f)} = 1, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.1)$$

с некоторым ИПМ $\mathcal{N}$, общим для всех указанных f , ν и k , то это ИПМ назовем адаптированным. Существование таких ИПМ обсуждается в следующей теореме, являющейся основным результатом этого параграфа.

Теорема 11.1. *Если апериодическая цепь $X \in \mathcal{X}_1$ с непустыми $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ имеет параметр сходимости $R = 1$, то для нее существует адаптированное ИПМ.*

Эта теорема выводится из серии лемм 11.1–11.5. Напомним, что обозначения $\mathcal{J}_0$, q и q_n введены в § 10.

Лемма 11.1. Если $\mathcal{N}_n \in \mathcal{J}_0$, $n \geq 1$, то найдется последовательность $\mathcal{N} \in \mathcal{J}_0$, содержащая некоторую хвостовую часть любой из $\mathcal{N}_n$ (т.е. содержащая $\widetilde{\mathcal{N}}_n = \{i \in \mathcal{N}_n: i \geq a_n\}$ с подходящим $a_n \geq 1$).

Доказательство. Поскольку $q(\mathcal{N}) = 0$, $n \geq 1$, то можно подобрать $a_n \geq 1$ так, чтобы $q_m(\mathcal{N}_n) \leq 2^{-n}m$ при всех $m \geq a_n$, а затем, рассмотрев вышеуказанное $\widetilde{\mathcal{N}}_n$, можно положить

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n \geq 1} \widetilde{\mathcal{N}}_n. \quad (11.2)$$

Чтобы доказать равенство $q(\mathcal{N}) = 0$, заметим, что $\mathcal{N}_n^* = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \widetilde{\mathcal{N}}_i$, $n \geq 1$, имеет плотность 0 и, следовательно, $q_m(\mathcal{N}_n^*) \leq 2^{-n}m$, если n фиксировано, а m достаточно велико. Но $q_m(\mathcal{N}_n) \leq 2^{-n}m$ при $m, n \geq 1$, и поэтому при заданном $n \geq 1$ и достаточно большом n

$$q_m(\mathcal{N}) \leq q_m(\mathcal{N}_n^*) + \sum_{j \geq n+1} 2^{-j}m \leq 2^{-n+1}m,$$

что дает нужное равенство и доказывает лемму.

Действуя в рамках этой леммы, назовем соответствующие наборы $\{a_n; n \geq 1\}$, $\{\widetilde{\mathcal{N}}_n; n \geq 1\}$, а также $\mathcal{N} \in \mathcal{J}_0$ (см. (11.2)) ассоциированными с $\{\mathcal{N}_n; n \geq 1\}$.

В леммах 11.2–11.5 будем считать выполненными условия, указанные в теореме 11.1.

Лемма 11.2. Для всех $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$

$$\text{ар-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(P^{n+1}f)}{\nu(P^n f)} = 1. \quad (11.3)$$

Доказательство. Сначала зададим $\varepsilon > 0$, положим $b_i = \nu(P^{i+1}f)/\nu(P^i f)$, если $\nu(P^i f) > 0$, и $b_i = 0$ в противном случае и покажем, что $\mathcal{N}_0 = \{i \geq 1: b_i > 1 + \varepsilon\}$ содержится в $\mathcal{J}_0$. В самом деле, пусть это не так, т.е. $q(\mathcal{N}_0) \neq 0$. Для всякого $\beta \in (0, 1)$ найдется $m \geq 1$ такое, что $b_i > 1 - \beta$ при всех $i \geq m$ (см. определение $\mathcal{X}_1$ в § 6). Ясно, что $\delta > 0$, где $\delta = q(\mathcal{N}_0')$, а $\mathcal{N}_0' = \{i \geq m: b_i > 1 + \varepsilon\}$, и при $n \geq m$

$$\frac{\nu(P^{n+1}f)}{\nu(P^n f)} = \prod_{m \leq i \leq n} b_i \geq (1 - \beta)^{n+1-m-r_n} (1 + \varepsilon)^{r_n} \geq (1 - \beta)^n (1 + \varepsilon)^{r_n}, \quad (11.4)$$

где r_n — число всех $i \in \mathcal{N}_0' \cap [m, n]$. Так как $r_n \geq \delta n/2$ для бесконечного множества значений n , то отсюда получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [\nu(P^n f)]^{1/n} \geq (1 - \beta)(1 + \varepsilon)^{\delta/2} > 1$$

при подходящем β . Однако указанный нижний предел равен 1, поскольку $R = 1$ [13], так что неравенство $\delta > 0$ исключено и $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{J}_0$.

Теперь, определив $\mathcal{N}_n$, $n \geq 1$, по образцу $\mathcal{N}_0$, но с $\varepsilon = 1/n$, образуем наборы $\{a_n\}$, $\{\widetilde{\mathcal{N}}_n\}$ и $\mathcal{N}$, ассоциированные с $\{\mathcal{N}_n; n \geq 1\}$ в смысле, указанном перед леммой, и рассмотрим $n \notin \mathcal{N}$. Если $n > a_m$ при каком-то m , то $n \notin \mathcal{N}_m$, и, таким образом, $b_n \leq 1 + 1/m$. Поэтому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} b_n \leq 1$, тогда как согласно определению $\mathcal{X}_1$ аналогичный нижний предел равен 1, а это влечет (11.3) с нашим ИПМ $\mathcal{N}$.

Лемма 11.3. Пусть $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$. Тогда применимы равенства (11.1) с некоторым общим для них ИПМ $\mathcal{N} = \mathcal{N}(f, g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 11.2 найдется ИПМ $\mathcal{N}_m^1$, $m \geq 1$, отвечающее (11.3) с $P^{m-1}f$ вместо f . Пусть наборы $\{a_n^1\}$, $\{\mathcal{N}_n^1\}$ и $\mathcal{N}^1$ ассоциированы с $\{\mathcal{N}_n^1; n \geq 1\}$. Если $n \notin \mathcal{N}^1$ и $n > a_m$ при некотором $m \geq 1$, то $n \notin \mathcal{N}_m^1$, вследствие чего

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}^1} \frac{\nu(P^{n+m}f)}{\nu(P^{n+m-1}f)} = 1. \quad (11.5)$$

Из (11.5) и из равенства, участвующего в (11.4), выводится (11.1) с ИПМ $\mathcal{N}^1$ и любым $k \geq 1$.

В соответствии с (11.5)

$$\frac{\nu(P^{n-m}f)}{\nu(P^n f)} \rightarrow 1, \quad (11.6)$$

где $m \geq 1$, а $n \rightarrow \infty$ вне $\mathcal{N}_m^2 = \{n \geq m: n-m \in \mathcal{N}^1\} \in \mathcal{J}_0$. Задав наборы $\{a_n^2\}$, $\{\widetilde{\mathcal{N}}_n^2\}$ и $\mathcal{N}^2$, ассоциированные с $\{\mathcal{N}_n^2\}$, снова получаем (11.6), но на этот раз $n \notin \mathcal{N}^2$ стремится к ∞ . Отсюда и из (11.5) следует наша лемма с $\mathcal{N} = \mathcal{N}^1 \cup \mathcal{N}^2$.

Лемма 11.4. Пусть $f \in \mathcal{S}$, $\nu \in \mathcal{S}^*$ и реализуются равенства (11.1) с одним и тем же ИПМ $\mathcal{N}$. Тогда для любых фиксированных $g, v \in \mathcal{S}$ и $\mu \in \mathcal{S}^*$

$$C_1 \leq \frac{\nu(P^n g)}{\mu(P^n v)} \leq C_2 \quad (11.7)$$

при некоторых $C_1, C_2 > 0$ и всех достаточно больших $n \notin \mathcal{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению малой функции имеем $aP^s g \geq f$ и $bP^m f \geq g$ при некоторых $a, b > 0$ и целых $m, s \geq 0$ (подобным же образом связаны μ и ν). Поэтому $b\nu(P^{n+m}f) \geq \nu(P^n g) \geq a^{-1}\nu(P^{n-s}f)$, $n \geq s$. Ввиду отмеченной связи между μ и ν неравенства типа последних справедливы и с $\mu(P^n v)$ вместо $\nu(P^n g)$, и наша лемма легко выводится из предыдущей.

Лемма 11.5. Пусть $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$, причем f подчиняется равенствам (11.1) с одним и тем же ИПМ $\mathcal{N}$. Тогда те же равенства применимы с любой функцией $g \in \mathcal{S}$ в роли f , но с $\mathcal{N}$, замененным некоторым ИПМ $\mathfrak{N}$, общим для всех таких g и целых $k \neq 0$.

Доказательство. Предположим на время, что (11.3) применимо с упомянутым ИПМ $\mathcal{N}$ и любыми $g \in \mathcal{S}$, а значит, и с любыми $P^m g$, где $m \geq 1$ и $g \in \mathcal{S}$, вместо f . Тогда из равенства, подобного указанному в (11.4), вытекает (11.1) с $k \geq 1$, но с g вместо f , и, повторив конец доказательства леммы 11.3, мы получаем доказываемую сейчас лемму с $\mathfrak{N} = \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$, где $\mathcal{N}'$ определяется аналогично $\mathcal{N}^2$.

Остается обосновать введенное предположение, для чего придется переработать доказательство теоремы 6.1. Пусть $g \in \mathcal{S}$. Тогда и $w = bP^m f - g \in \mathcal{S}$ при некоторых $b > 0$ и $m \geq 0$, как это видно из упомянутого доказательства. Зададим такое n_0 , что $\nu(P^n f) > 0$ при $n > n_0$, и, учитывая равенство $P^m f = b^{-1}(w + g)$, запишем отношение $\nu(P^{n+m+1}f)/\nu(P^{n+m}f)$, $n > n_0$, в следующем виде:

$$\frac{\nu(P^{n+1}g) + \nu(P^{n+1}w)}{\nu(P^n g) + \nu(P^n w)} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = 1 + \alpha_n, \quad (11.8)$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$ вне $\mathcal{N}$ (см. (11.1)), и положено $a_n = \nu(P^n g)$ и $b_n = \nu(P^n w)$ при $n \geq 0$.

Допустим, что, вопреки нашему предположению, a_{n+1}/a_n не стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$ вне $\mathcal{N}$. Так как по определению $\mathcal{X}_1$ нижний предел последнего из выписанных отношений не может быть меньше 1, то найдутся $\lambda > 0$ и последовательность $\mathcal{N}^* \subset \mathbf{N} \setminus \mathcal{N}$, для которых $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1 + \lambda$, когда $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathcal{N}^*$ (случай $\lambda = +\infty$ исключается леммой 11.4). Положим $\lambda_n = a_{n+1}/a_n - 1$ и $\beta_n = b_{n+1}/b_n - 1$ при достаточно больших n и отметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \geq 0$ по определению $\mathcal{X}_1$ и что $\lambda_n \rightarrow \lambda$, когда $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathcal{N}^*$. Заменяя в (11.8) a_{n+1} и b_{n+1} на $(1 + \lambda_n)a_n$ и $(1 + \beta_n)b_n$ соответственно, получаем равенство $(\lambda_n - \alpha_n)a_n = (\alpha_n - \beta_n)b_n$, согласно которому $\alpha_n \geq \beta_n$ для достаточно больших $n \in \mathcal{N}^*$. Следовательно, $\beta_n \rightarrow 0$ и $\alpha_n - \beta_n \rightarrow 0$, так что в силу того же равенства $a_n/b_n \rightarrow 0$, где $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}^*$. Этот вывод несовместим с леммой 11.4, и тем самым истинность нашего предположения установлена.

Доказательство теоремы 11.1. Леммы 11.3 и 11.5 позволяют для произвольно выбранных $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$ найти ИПМ $\mathfrak{N}$, упомянутое в последней из них. Покажем, что для всех $f \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathfrak{N}} \frac{\mu(P^{n+1}f)}{\mu(P^n f)} = 1, \quad (11.9)$$

если $\mu \in \mathcal{S}^*$. Для этого возьмем $c > 0$ и $j \geq 0$, при которых $\varkappa = c\nu P^j - \mu \in S^*$ (ср. с выбором b и m в предыдущем доказательстве). Затем при достаточно больших n запишем отношение $\nu(P^{n+j+1}f)/\nu(P^{n+j}f)$ в виде второго из отношений в (11.8), где на этот раз $a_n = \mu(P^n f)$ и $b_n = \varkappa(P^n f)$ и где снова $\alpha_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$ вне $\mathfrak{N}$. Копируя сказанное

вслед за (11.8), легко приходим к противоречию, допустив, что a_{n+1}/a_n не стремится к 1, когда $n \rightarrow \infty$ вне $\mathfrak{N}$. Отсюда и следует (11.9).

Теперь, как и в предыдущем доказательстве, из (11.9) выводится вариант (11.1) с μ вместо ν , любыми $f \in \mathcal{S}$ и с новым ИПМ, не зависящим от выбора f , μ и k . Теорема доказана.

Проанализировав два последних доказательства, можно без труда убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 11.1. Пусть выполняются условия теоремы 11.1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} [\nu(P^{n+1}f)/\nu(P^n f)] = 1$ для некоторых $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$, то это же верно для любых $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$.

12. СПТО с исключительными параметрическими множествами. В этом параграфе приведены новые СПТО с ИПМ (см. теоремы 12.2–12.4), которым предшествует теорема 12.1, играющая роль, подобную прежней роли теорем 2.1 и 2.2.

Рассмотрим апериодическую неприводимую цепь Маркова X с непустыми множествами $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$. Пусть при всех $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$ выполняются равенства (11.1) с одним и тем же адаптированным ИПМ $\mathcal{N}$. Назовем эту цепь подчиняющейся условию $(2A)_{\mathcal{N}}$, если для каких-либо f и ν указанного вида семейство $\mathcal{F}_0 = \{f_n; n \geq n_0, n \notin \mathcal{N}\}$ равномерно интегрируемо по каждой мере νP^m , $m \geq 0$ (как и в § 2, мы фиксируем такое $n_0 \in \mathbf{N}$, что $\nu(P^n f) > 0$ при $n \geq n_0$, и полагаем $f_n = P^n f / \nu(P^n f)$). Если не говорить о зависимости n_0 от выбора f и ν , то в остальном $(2A)_{\mathcal{N}}$ не зависит от этого выбора (в этом убеждает доказательство предложения 6.1 с очевидными изменениями, обусловленными привлечением (11.1) взамен (6.2)). В определенных случаях условие $(2A)_{\mathcal{N}}$ легко проверяется (см. следствие 13.2).

Теорема 12.1. Пусть апериодическая неприводимая цепь Маркова X с непустыми $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ подчиняется условию $(2A)_{\mathcal{N}}$, имеет параметр сходимости $R = 1$ и обладает ν -свойством Лиувилля, где $\mathcal{N}$ — адаптированное ИПМ, а $\nu \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}^*$. Тогда для любых $f \in \mathcal{S}$ и $\mu \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}^*$ имеем

$$\mu(P^n f) \sim \nu(P^n f), \quad n \notin \mathcal{N} \quad (12.1)$$

(т.е. $\mu(P^n f)/\nu(P^n f) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ вне $\mathcal{N}$; ср. с (1.5)).

Н а б р о с о к д о к а з а т е л ь с т в а. Отправной точкой служат леммы 12.1 и 12.2, родственные леммам 3.1 и 3.3. В леммах 12.1 и 12.2 используются те же условия, что и в теореме 12.1, исключая, возможно, условие Лиувилля. При этом фиксируются $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$ и им сопоставляются недавно упомянутые функции f_n , $n \geq n_0$.

Лемма 12.1. Функции f_n слабо сходятся в пространстве $L(\mu)$ к 1 при $n \rightarrow \infty$, $n \notin \mathcal{N}$, если $\mu \in \mathcal{S}^*$.

При доказательстве леммы следует с точностью до очевидных изменений повторить начало доказательства леммы 3.1; при этом надлежит, изъясв из рассмотрения все $n \in \mathcal{N}$, вместо (1.5) использовать (11.1) и заметить, что прежняя мера ξ теперь является малой, а $\mathcal{P}_1(\nu)$ совпадает с множеством $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}^*$ (см. § 9).

Лемма 12.2. *Всякая бесконечная последовательность $\mathcal{N}_1 \in \mathcal{J}_0$, для которой $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N} = \emptyset$, содержит такую последовательность $\mathcal{N}_2 \in \mathcal{J}_0$, что $P^m f_n \xrightarrow{w} P^m F$ в $L(\mu)$, $n \in \mathcal{N}_2$, сразу для всех $m \geq 0$ и $\mu \in \mathcal{S}^*$, где $F \geq 0$ — некоторая измеримая функция.*

Доказательство этой леммы сводится к небольшому изменению доказательства лемм 3.2 и 3.3.

Наконец, леммы 12.1 и 12.2 позволяют после простой переработки доказательства теоремы 2.1 придти к равенству (3.7) с любыми $\mu \in \mathcal{S}^*$, из которого подобно прежнему следует обсуждаемая теорема.

Впредь, рассматривая наряду с цепью X двойственную ей цепь $\hat{X}$ (точнее, налагая условие (6A)) и работая с функциями или мерами, малыми для X , как и прежде, указание «для X » будем часто опускать, тогда как в аналогичных случаях, связанных с $\hat{X}$, указание «для $\hat{X}$ » будет присутствовать. Под $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ будем подразумевать аналоги семейств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ для $\hat{X}$.

В теореме 12.2 речь идет о паре апериодических неприводимых цепей Маркова $X, \hat{X} \in \mathcal{X}_1$ с одинаковым параметром сходимости $R = 1$, которые удовлетворяют условию (6A) и для каждой из которых мера π из (6A) служит мерой неприводимости. Для обеих цепей совокупности соответствующих малых функций и мер предполагаются непустыми. Наконец, требуется, чтобы обе цепи удовлетворяли условию $(2A)_{\mathcal{N}}$ с одним и тем же ИПМ $\mathcal{N}$, адаптированным для X и $\hat{X}$ (кстати, если X подчиняется условию $(2A)_{\mathcal{N}_1}$, а $\hat{X}$ — условию $(2A)_{\mathcal{N}_2}$, где $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ — адаптированные ИПМ для X и $\hat{X}$ соответственно, то можно взять $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$).

Теорема 12.2. *Пусть в только что описанной ситуации найдется функция $f \in \mathcal{S}$ такая, что $f\pi \in \widehat{\mathcal{S}}$ и цепь $\hat{X}$ обладает $f\pi$ -свойством Лиувилля (мера $f\pi$ определяется согласно § 2). Тогда*

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{\nu(P^n f)}{\nu(P^n g)} = \frac{\pi(f)}{\pi(g)}, \quad (12.2)$$

если $g \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$. При наличии у X ν -свойства Лиувилля в этом случае имеем также

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{\kappa(P^{n+m} f)}{\nu(P^n g)} = \frac{\pi(f)}{\pi(g)}, \quad m \geq 0, \quad (12.3)$$

если $\kappa \in \mathcal{S}^*$ и $\kappa(E) = \nu(E)$. Равенства (12.2) и (12.3) сохраняют силу и с любой малой функцией в роли f .

Напомним, что ν -свойство Лиувилля цепи X с некоторой мерой $\nu \in \mathcal{S}^*$ равносильно такому же свойству с любой другой малой мерой (см. § 9), начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма 12.3. *Если справедливо условие (6A) и множество $\widehat{\mathcal{S}}$ не пусто, то каждая мера $\nu \in \mathcal{S}^*$ представима в виде*

$$\nu = u\pi, \quad u \in \widehat{\mathcal{S}}. \quad (12.4)$$

Доказательство. Пусть $\nu \in \widehat{\mathcal{S}}$ и $\nu \leq a(\nu\pi)P^j$ при подходящих $a > 0$, $j \geq 0$. Тогда $\nu(w) \leq a(\nu, P^j w) = a(\widehat{P}^j \nu, w)$, если $w \in \mathcal{B}_+$. Таким образом, $\nu = u\pi$ с некоторой функцией $u \in \mathcal{B}_+$, не превышающей $a\widehat{P}^j \nu$, и лемма доказана.

К представлению (12.4) мы вернемся в леммах 12.6 и 13.1.

Доказательство теоремы 12.2. Как и при доказательстве теорем 7.1 и 7.2, ограничимся случаем, когда $\pi(f) = \pi(g) = 1$.

Учитывая лемму 12.3, докажем (12.2), требуя лишь, чтобы $u \in \widehat{\mathcal{S}}$ и $\nu = u\pi$. По теореме 12.1, примененной к цепи $\widehat{X}$, имеем

$$\mu(\widehat{P}^n u) \sim (f\pi)(\widehat{P}^n u), \quad n \notin \mathcal{N}, \quad (12.5)$$

для всех $\mu \in \mathcal{P} \cap \widehat{\mathcal{S}}^*$. Так как $g \in \mathcal{S}$, то $g\pi \leq (aP^j f)\pi$ при некоторых $a > 0$ и $j \geq 0$, откуда получаем, что $(g\pi)(w) \leq a(f, \widehat{P}^j w) = (af\pi)(\widehat{P}^j w)$, если $w \in \mathcal{B}_+$. Таким образом, $g\pi \leq a\pi_f \widehat{P}^j$ и $g\pi \in \widehat{\mathcal{S}}^*$. Из (12.5) с $\mu = g\pi$ видно, что обе части (8.1) стремятся к 1, когда $n \rightarrow \infty$ вне $\mathcal{N}$, а отсюда вытекает (12.2), поскольку $\pi(f) = \pi(g)$. Правомерность же подстановки в (12.2) любой малой функции вместо f очевидна (ср. начало доказательства теоремы 7.2).

Если X обладает еще и ν -свойством Лиувилля, где $\nu \in \mathcal{S}^*$, то на основании теоремы 12.1 можно применить (12.1) с $\mu = \kappa P^m$, $m \geq 0$, и затем вывести (12.3) из (12.2). При этом (12.3) сохранит силу и после замены f любой малой функцией. Доказательство закончено.

При применении доказанной теоремы целесообразно иметь в виду следующее.

Лемма 12.4. *Пусть σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена и имеет место условие (6A) с мерой π , служащей мерой неприводимости для обеих цепей X и $\widehat{X}$. Тогда параметры сходимости этих цепей равны друг другу. Если же цепь X апериодична, то апериодична и цепь $\widehat{X}$.*

Доказательство. Мера π является максимальной мерой неприводимости и для X , и для $\widehat{X}$ (см. предложение 6.2), и $\pi(A) < \infty$ для малых $A \subset E$, как это следует из определения малого множества. Заменяя при необходимости такое A некоторой его частью, будем считать A малым и для $\widehat{X}$ [8; предложение 2.6]. Пусть X и $\widehat{X}$ имеют параметры сходимости R и $\widehat{R}$ соответственно. Если $0 < \beta < R$, то $G^\beta 1_A < \infty$ π -п.в.,

и, более того, функцию $G^\beta 1_A$ можно предположить ограниченной на A (иначе следовало бы заменить A множеством $A \cap \{x \in E: G^\beta 1_A(x) < N\}$ с подходящим $N > 0$). В этом случае $(G^\beta 1_A, 1_A) = (1_A, \hat{G}^\beta 1_A) < \infty$, где $\hat{G}^\beta$ — аналог G^β для $\hat{X}$, так что $\hat{R} \geq R$ (см. определение параметра сходимости в § 4). Подобным же образом $R \geq \hat{R}$, т.е. $R = \hat{R}$, как и утверждает лемма.

Теперь предположим, что цепь X апериодическая, а цепь $\hat{X}$ имеет период $d > 1$. Рассмотрим два разных элемента A и B некоторого d -цикла для $\hat{X}$ в смысле [8], а также малые множества $F \subset A$ и $V \subset B$. Ясно, что $0 = (1_A, \hat{P}^{nd} 1_B) = (1_B, P^{nd} 1_A)$, $n \geq 1$, т.е. $P^{nd} 1_A = 0$ п-п.в. на B . С другой стороны, если n достаточно велико, то $1_V \leq a_n P^n 1_F$ с некоторым $a_n > 0$ (см. предложение 9.3), и, следовательно, $P^{nd} 1_A \geq P^{nd} 1_F > 0$ на V вопреки последнему равенству. Тем самым наше предположение опровергнуто, и лемма доказана.

Доказанную теорему можно охарактеризовать как СПТО с ИПМ, аналогичную обычной СПТО типа теоремы 7.2. Такой же аналог нетрудно предложить и для теоремы 7.3, однако мы предпочтем получить теорему 12.3, относящуюся к числу СПТО с ИПМ, свободных от требования (6А). С этой целью рассмотрим следующее условие:

(12А) *пространство E является локально компактным и хаусдорфовым и обладает счетной базой; σ -алгебра $\mathcal{E}$ совпадает с борелевской σ -алгеброй в E ; оператор P , отвечающий цепи X , отображает в себя семейство $\mathcal{C}_K(E)$ всех непрерывных в E функций с компактными носителями.*

Это условие влечет условие (7Е) и позволяет наделить E полной метрикой [28]. Одновременно с (12А) в теоремах 12.3 и 12.4 будут налагаться следующие условия:

(12Б) *существует единственная (с точностью до постоянного множителя) нетривиальная мера π , инвариантная для X , конечная на любых компактах в E и плотная в E в смысле § 7;*

(12В) *эта мера служит мерой неприводимости для X ; кроме того, $X \in \mathcal{X}_1$, цепь X апериодична и имеет параметр сходимости $R = 1$; наконец, множества $\mathcal{C}_K^+ \cap \mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ непусты, где $\mathcal{C}_K^+ = \{f \in \mathcal{C}_K(E): f \geq 0\}$.*

Лемма 12.5 (ср. с предложением 9.1). *Пусть выполняется условие (12А). Пусть апериодическая неприводимая цепь X обладает мерой неприводимости ξ , плотной в E , и пусть $\mathcal{C}_K^+ \cap \mathcal{S}$ непусто. Тогда $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$, где $\mathcal{S}_2$ — совокупность всех функций $f \in \mathcal{B}_+$ таких, что $\xi(f) > 0$ и множество $\{x \in E: f(x) > 0\}$ относительно компактно в E .*

Доказательство. Пусть $h \in \mathcal{C}_K^+ \cap \mathcal{S}$. Если $f \in \mathcal{S}$, то $\xi(f) > 0$ и $f \leq a P^j h$ при некоторых $a > 0$ и $j \geq 0$. Поскольку $P^j h \in \mathcal{C}_K^+$, то $f \in \mathcal{S}_2$. Иначе говоря, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_2$.

Далее, любая точка $x \in E$ обладает окрестностью V_x , являющейся

малым множеством (действительно, задав $x \in E$, можно ввиду (12В) найти $n \geq 1$, при котором $P^n h(x) > 0$, и положить $V_x = \{y \in E: P^n h(y) > P^n h(x)/2\}$). Выберем компактное $A \subset E$ с $\pi(A) > 0$ и из его открытого покрытия $\{V_x; x \in A\}$ выделим конечное подпокрытие. Объединение элементов последнего мало, а с ним мало и A . Отсюда следует, что $\mathcal{S} \supset \mathcal{S}_2$, и лемма доказана.

Лемма 12.6. *Рассмотрим те же E и $\mathcal{E}$, что и в условии (12А). Пусть выполняется условие (6А), причем участвующая в нем мера π конечна на компактах в E , а переходный оператор $\hat{P}$ цепи $\hat{X}$ отображает $\mathcal{S}_2$ в себя (иначе говоря, множество $\{x \in E: \hat{P}1_A(x) > 0\}$ относительно компактно всякий раз, когда $A \subset E$ компактно). Тогда каждая мера $\nu \in \mathcal{S}^*$ представима в виде (12.4) с $u \in \widehat{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}_2$.*

Для доказательства нужно повторить доказательство леммы 12.3, взяв на этот раз $v \in \widehat{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}_2$.

Теорема 12.3. *Пусть осуществляются условия (12А)–(12В). Если $f, g \in \mathcal{C}_K^+$ и $g \not\equiv 0$, то, какова бы ни была мера $\nu \in \mathcal{S}^*$, справедливо равенство (12.2), а при наличии у X ν -свойства Ливилля применимо еще и равенство (12.3) с теми $\kappa \in \mathcal{S}^*$, для которых $\kappa(E) = \nu(E)$, причем в (12.2) и (12.3) под $\mathcal{N}$ подразумевается любое адаптированное ИПМ для X .*

Доказательство. Положим $\alpha_n = \nu(P^n h)$, $n \geq 0$, и $\mu_n = \alpha_n^{-1} \nu P^n$, $n \geq n_0$, где $h \in \mathcal{C}_K^+ \cap \mathcal{S}$, а натуральное n_0 таково, что $\alpha_n > 0$ при $n \geq n_0$. В соответствии с леммами 11.4 и 12.5, задав $f \in \mathcal{C}_K^+$ ($f \not\equiv 0$), имеем оценку $C_1 \leq \mu_n(f) \leq C_2$ с некоторыми $C_1, C_2 > 0$ и $n \geq n_0$ ($n \notin \mathcal{N}$). Критерий Прохорова слабой относительной компактности семейства мер Радона [27] позволяет извлечь из $\mathcal{A} = \{\mu_n; n \geq n_0, n \notin \mathcal{N}\}$ подпоследовательность $\{\mu_{i_n}; n \geq 1\}$, широко сходящуюся к некоторой мере μ (таким образом, $\mu_{i_n}(f) \rightarrow \mu(f) < \infty$ для любых $f \in \mathcal{C}_K(E)$).

Заметим, что если n , а с ним $i = i_n$ достаточно велики, то выполнено неравенство $\nu(P^i f) > 0$ и

$$\mu_{i_n}(Pf) = \frac{\nu(P^{i+1}f)}{\nu(P^i f)} \cdot \frac{\nu(P^i f)}{\nu(P^i h)} = \frac{\nu(P^{i+1}f)}{\nu(P^i f)} \mu_{i_n}(f),$$

где $f \in \mathcal{C}_K^+$, $f \not\equiv 0$. Когда $n \rightarrow \infty$, последнее из выписанных соотношений в силу (11.1) стремится к 1, поскольку $i \notin \mathcal{N}$. В то же время $\mu_{i_n}(Pf) \rightarrow \mu(Pf)$ и $\mu_{i_n}(f) \rightarrow \mu(f)$, так как $f, Pf \in \mathcal{C}_K^+$. Поэтому, в соответствии с приведенными равенствами, $\mu(Pf) = \mu(f)$ для $f \in \mathcal{C}_K^+$. Последнее равенство легко распространить на индикаторы компактных множеств, а затем (например, с помощью леммы 2 из [26, гл. 1]) и на индикаторы любых множеств из $\mathcal{E}$. В результате устанавливается как инвариантность меры μ , так и равенство $\mu = c\pi$ с некоторым $c > 0$ (см. условие (12Б)). Разумеется, $1 = \mu(h) = c\pi(h)$, т.е. $c = 1/\pi(h)$, так

что пределом любой широко сходящейся подпоследовательности, извлеченной из $\mathcal{A}$, служит одна и та же мера $\mu = \text{сп.}$ Это, в свою очередь, доказывает широкую сходимость $\mathcal{A}$ к μ .

Для вывода (12.2) в теперешних условиях остается заметить, что отношение из левой части (12.2) при достаточно больших n совпадает с $\mu_n(f)/\mu_n(g)$, и затем принять во внимание сказанное. Переход же к (12.3) совершается так же, как в случае теоремы 12.2. Теорема 12.3 доказана.

Как видно из следующей теоремы, утверждение теоремы 12.3 можно распространить на все $f, g \in \mathcal{S}_2$ (см. лемму 12.5), если наряду с условиями (12А)–(12В) наложить следующее требование:

(12Г) справедливо условие (6А) с мерой π , указанной в (12Б), и существуют функция $u \in \mathcal{S}_2$ и адаптированное ИПМ $\mathcal{N}$ для X такие, что семейство функций $\{\hat{P}^n u / (u, P^n u); n \geq N, n \notin \mathcal{N}\}$ равномерно ограничено на каждом компакте в E , где натуральное N выбирается так, чтобы $(u, P^n u) > 0$ при всех $n \geq N$.

В связи с этим требованием, вспомнив лемму 12.5, заметим, что если справедливы условия (12А)–(12В) и $u \in \mathcal{S}_2$, то $(u, P^n u) > 0$ при любых достаточно больших $n \geq 1$.

Теорема 12.4. При условиях (12А)–(12Г) утверждение предыдущей теоремы распространяется на все $f, g \in \mathcal{S}_2$, но при этом в роли соответствующего ИПМ $\mathcal{N}$ берется указанное в (12Г).

Доказательство. Фиксируем $f, g \in \mathcal{S}_2$ и $\mu, \nu \in \mathcal{S}^*$ и найдем $f_n, g_n \in \mathcal{C}_K^+$, $n \geq 1$, обращающиеся в 0 вне некоторого компакта $A \subset E$ и такие, что $\pi(w_n) + \pi(\tilde{w}_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $w_n = |f - f_n|$ и $\tilde{w}_n = |g - g_n|$.

Покажем, что для всех $w \in \mathcal{B}_+$, обращающихся в 0 вне A , и всех достаточно больших $n \notin \mathcal{N}$ справедлива оценка

$$\mu(P^n w) \leq a\pi(w)\nu(P^n f) \quad (12.6)$$

с некоторым $a > 0$, зависящим от выбора μ, ν, f и A . Действительно, рассмотрим $u \in \mathcal{S}_2$ из условия (12Г). Так как $\mu \leq (b\pi)P^j$ при некоторых $b > 0$ и $j \geq 0$, то для указанных w имеем

$$\begin{aligned} \mu(P^n w) &\leq [(b\pi)P^{n+j}](w) = b(u, P^{n+j}w) = b\left(\frac{\hat{P}^n u}{(u, P^n u)}, P^j w\right)(u, P^n u) \\ &\leq b_1 \pi(P^j w)(u, P^n u) = b_1 \pi(w)(u, P^n u), \end{aligned} \quad (12.7)$$

где $n \geq N$ и $b_1 > 0$ (следует учесть, что $P^j w = 0$ вне некоторого компакта, общего для наших w , см. (12А), и использовать (12Г)). Но $u \in \mathcal{S}_2$ по лемме 12.5, и, воспользовавшись леммой 11.4 с f, u, π в роли прежних g, v, μ соответственно, мы получаем (12.6) как следствие (12.7).

Пусть теперь $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\mu(E) = \nu(E)$. Применив (12.6) с $\mu = \nu$ и $w = w_m$, заключаем, что $\nu(P^n w_m) \leq a\pi(w_m)\nu(P^n f) \leq \varepsilon\nu(P^n f)$ при $n \geq$

$N_m, n \notin \mathcal{N}$, если m достаточно велико, а $N_m \geq 0$ выбрано надлежащим образом. В силу сходных соображений одновременно можно считать выполненным и неравенство $\nu(P^n \tilde{w}_m) \leq \varepsilon \nu(P^n g)$. Следовательно,

$$\nu(P^n f_m) \leq \nu(P^n f)[1 + a\pi(w_m)] \leq (1 + \varepsilon)\nu(P^n f),$$

и аналогично этому $\mu(P^n g_m) \geq (1 - \varepsilon)\mu(P^n g)$ ($n \geq N_m, n \notin \mathcal{N}$). Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{\nu(P^n f)}{\mu(P^n g)} \geq \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{\nu(P^n f_m)}{\mu(P^n g_m)} = \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \frac{\pi(f_m)}{\pi(g_m)} \quad (12.8)$$

согласно теореме 12.3, примененной к f_m и g_m . Последнее из выписанных отношений стремится к $\delta = \pi(f)/\pi(g)$ при $m \rightarrow \infty$, тогда как ε можно выбрать сколь угодно близким к 0. Поэтому нижний предел, открывающий (12.8), не может быть меньшим δ , и точно также аналогичный нижний предел отношения $\mu(P^n g)/\nu(P^n f)$ не может быть меньшим $1/\delta$. Это значит, что предел последнего отношения при $n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}$, равен $1/\delta$, и соотношения (12.2) и (12.3) становятся очевидными.

13. СПТО для случайных блужданий на группах. В этом параграфе конкретизируются предшествующие результаты применительно к широкому классу случайных блужданий на группах (см. теоремы 13.1 и 13.2).

Под E всюду далее подразумевается некоторая сепарабельная локально компактная хаусдорфова группа. Групповая операция в E записывается как умножение и с ней связывается стандартная символика [29]. Под $\mathcal{E}$ понимается борелевская σ -алгебра в E , а под π — некоторая борелевская правая мера Хаара для E (таким образом, π является сужением на $\mathcal{E}$ некоторой правой меры Хаара в смысле [29]). Вводится также левая мера Хаара π_1 , для которой $\pi_1(A) = \pi(A^{-1})$, $A \in \mathcal{E}$, где $A^{-1} = \{x \in E: x^{-1} \in A\}$ (см. [29, теорема 15.15]).

Зададим (однородную) цепь Маркова X с пространством состояний $(E, \mathcal{E})$, являющуюся правым случайным блужданием на E с законом ϑ (т.е. имеющую переходные вероятности $p(x, A) = \vartheta(x^{-1}A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$). Мера π инвариантна для X , а правое случайное блуждание $\hat{X}$ на E с законом $\hat{\vartheta}$ таким, что $\hat{\vartheta}(A) = \vartheta(A^{-1})$, $A \in \mathcal{E}$, является двойственным для X относительно π [9, гл. 2].

Случайное блуждание X будет предполагаться несингулярным (соответствующий английский термин — «a spread out random walk») в том смысле, что некоторая сверточная степень $\vartheta^n, n \geq 1$, меры ϑ несингулярна относительно π (эти степени определяются рекуррентно: $\vartheta^1 = \vartheta$ и $\vartheta^n = \vartheta^{n-1} * \vartheta$ при $n \geq 2$, где звездочка обозначает свертку). Более того, будет налагаться следующее условие.

(13A) Для любого $f \in \mathcal{C}_K^+$ найдутся такие $\gamma > 0$ и $j \geq 1$, что

$$\vartheta^j \geq (\gamma f)\pi. \quad (13.1)$$

Неравенство (13.1) равносильно неравенству

$$\vartheta^j \geq (\beta f)\pi_1, \quad (13.2)$$

в котором $\beta > 0$ зависит от j, γ и f . Несингулярное блуждание удовлетворяет требованию (13А), если его закон неприводим и непериодичен, т.е. если наименьшая замкнутая полугруппа группы E , содержащая носитель этого закона, совпадает с E и этот носитель не содержится ни в каком смежном классе группы по ее замкнутой нормальной подгруппе [9, гл. 3].

В последующем всюду налагается условие 13(А), хотя чаще всего это не оговаривается. Леммы 13.1–13.3 показывают, что из (13А) вытекает ряд предположений, вошедших в теоремы 12.3 и 12.4.

Лемма 13.1. *Справедливы утверждения:*

(а) закон $\hat{\vartheta}$ удовлетворяет условию (13А), но, быть может, с иными значениями j и γ ;

(б) цепи Маркова X и $\hat{X}$ являются неприводимыми и апериодическими и имеют одинаковые параметры сходимости; при этом π служит максимальной мерой неприводимости для обеих цепей;

(в) семейство $\mathcal{S}_2$ (см. лемму 12.5) совпадает с $\mathcal{S}$ и $\hat{\mathcal{S}}$, а семейство $\mathcal{S}_2^*$ всех мер вида $f\pi$, $f \in \mathcal{S}_2$, совпадает с $\mathcal{S}^*$ и $\hat{\mathcal{S}}^*$;

(г) каковы бы ни были $f \in \mathcal{C}_K^+$, кроме $f \equiv 0$, и компакт $F \subset E$, всюду на F имеем $P^n f > 0$ и $\hat{P}^n f > 0$ при $n \geq n_1$, где $n_1 = n_1(f, K) > 0$.

Доказательство. (а) Если $f \in \mathcal{B}_+$, а $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$, $x \in E$, то

$$\hat{\vartheta}^n(f) = \hat{\vartheta}^n(\hat{f}), \quad n \geq 1. \quad (13.3)$$

Действительно, пусть $n \geq 2$ (случай $n = 1$ тривиален). Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}^n(f) &= \int f(x_1 x_2 \cdots x_n) \hat{\vartheta}(dx_1) \cdots \hat{\vartheta}(dx_n) \\ &= \int f(x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_n^{-1}) \vartheta(dx_1) \cdots \vartheta(dx_n) \\ &= \int \hat{f}(x_n x_{n-1} \cdots x_1) \vartheta(dx_1) \cdots \vartheta(dx_n) \end{aligned}$$

и, вычисляя последний интеграл, можно сначала интегрировать по x_n , затем по x_{n-1} и т.д., что и дает (13.3).

Теперь докажем вариант неравенства (13.2) с $\hat{\vartheta}$ вместо ϑ , хотя, возможно, с иным β . Мы можем рассмотреть лишь случай, когда $f = \hat{f}$, поскольку требуемый вариант достаточно получить с $f_1 = f + \hat{f}$ вместо f и поскольку $f_1 = \hat{f}_1$. Но в этом случае в силу (13.1) и (13.3)

$$\hat{\vartheta}^j(A) = \vartheta^j(A^{-1}) \geq \gamma \pi(f 1_{A^{-1}}) = \gamma \pi_1(\hat{f} 1_{A^{-1}}) = \gamma \pi_1(f 1_A) = (\gamma f \pi_1)(A) \quad (13.4)$$

для $A \in \mathcal{E}$, и нужный вариант получен, что и дает утверждение (а).

(б) В силу (13А) мера π служит мерой неприводимости для X , причем она максимальна по предложению 6.2.

Далее, пусть X имеет период $d \geq 2$. Тогда $\pi(A \cap F) > 0$ и $\pi(B \cap F) > 0$ для некоторого компакта F и двух различных циклических множеств A и B из некоторого d -цикла в смысле [8, § 2.4], и, как нетрудно вывести из (13А), найдется $m \geq 1$ такое, что $P_m(\cdot, A) > 0$ всюду на $(A \cup B) \cap F$. Последнее обстоятельство противоречит определению d -цикла, и, таким образом, $d = 1$.

Ввиду утверждения (а) все сказанное здесь переносится и на $\hat{X}$.

(в) Учитывая утверждение (а), докажем утверждение (в) лишь в части, касающейся X . Нам достаточно проверить, что $1_F \in \mathcal{S}$ и $1_F \pi \in \mathcal{S}^*$, коль скоро $F \subset E$ компактно и $\pi(F) > 0$. Но в последнем случае найдется относительно компактное открытое $W \subset E$, содержащее $F^{-1}F = \{z = x^{-1}y; x, y \in F\}$. В силу (13.2) при подходящих $n \geq 1$ и $b > 0$ имеем $\vartheta^n \geq b 1_W \pi_1$ и для всех $x \in F$ и $A \subset F$ ($A \in \mathcal{E}$) получаем:

$$p_n(x, A) \geq b \int 1_A(xy) 1_W(y) \pi_1(dy) = b \int_A 1_W(x^{-1}y) \pi_1(dy) = b \pi_1(A), \quad (13.5)$$

так как $x^{-1}y \in F^{-1}F \subset W$, если $y \in A$. Итак, $p_n(x, A) \geq b 1_F(x) \nu(A)$, где $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $\nu = 1_F \pi$ и $\nu(F) > 0$. Отсюда и следует доказываемое (см. [8, определение 2.3]).

(г) Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{C}_K^+$, $f \neq 0$, и компакт $F \subset E$ с $\pi(F) > 0$. По доказанному цепи X и $\hat{X}$ апериодичны, а функции f и 1_F малы для них. Поэтому $1_F \leq a_n P^n f$ и $1_F \leq b_n P^n f$ при достаточно больших n и подходящих $a_n, b_n > 0$ (см. предложение 9.3), и утверждение (г) становится очевидным.

Следствие 13.1. *Всякое адаптированное ИПМ для X является таковым и для $\hat{X}$.*

Действительно, пусть $g \in \hat{\mathcal{S}}$ и $\mu \in \hat{\mathcal{S}}^*$. Тогда по предыдущей лемме $g \in \mathcal{S}$ и $\mu \in \mathcal{S}^*$, причем $\mu = f\pi$ с $f \in \mathcal{S}$, так что $\mu(\hat{P}^{n+m}g)/\mu(\hat{P}^n g) = \nu(P^{n+m}f)/\nu(P^n f)$ при любом заданном целом m и достаточно большом n , где $\nu = g\pi$. Когда $n \rightarrow \infty$ вдоль какого-либо адаптированного ИПМ для X , то второе, а с ним и первое из двух последних отношений стремится к 1, что и требовалось доказать.

Лемма 13.2. *Если параметр сходимости цепи X равен 1, то $X, \hat{X} \in \mathcal{X}_1$.*

Доказательство. Сначала договоримся о следующем. Для функций $f, g \in \mathcal{B}_b$, обращающихся в 0 вне какого-либо компакта в E , свертку $f * g \in \mathcal{C}_K(E)$ определим посредством равенства

$$f * g(x) = \int f(xy) g(y^{-1}) \pi_1(dy), \quad x \in E \quad (13.6)$$

(ср. [29, теорема 20.16]). Мери ν отнесем к семейству $\mathcal{M}_2$, если найдутся такие $a > 0$ и окрестность W единицы e группы E , что $\nu \geq a 1_W \pi_1$. Как легко заметить, свертка любых двух мер из $\mathcal{M}_2$ сама принадлежит $\mathcal{M}_2$.

Покажем, что при некотором $i \geq 1$

$$\vartheta^i \in \mathcal{M}_2 \quad \text{и} \quad \vartheta^{i+1} \in \mathcal{M}_2. \quad (13.7)$$

Рассмотрим относительно компактную окрестность V точки e и компакт $F \subset E$ с $\vartheta(F) > 0$. Множество $F^{-1}V$ лежит в некоторой относительно компактной окрестности W точки e и, заменив в случае необходимости W на $W \cup W^{-1}$, можно считать, что $W = W^{-1}$. Так как $\vartheta^i \geq a 1_W \pi_1$ при некоторых $i \geq 1$ и $a > 0$ (см. (13.2)), то $\vartheta^i \in \mathcal{M}_2$. Кроме того, $\vartheta^{i+1} \geq a \vartheta * 1_W \pi_1$ и для $A \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \vartheta^{i+1}(A) &\geq a \int_{F \times E} 1_A(xy) 1_W(y) \vartheta(dx) \pi_1(dy) \\ &= a \int_F \left[\int_A 1_W(x^{-1}y) \pi_1(dy) \right] \vartheta(dx). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Если $A \subset V$, указанная здесь точка $x^{-1}y$ лежит в $F^{-1}V \subset W$, так что внутренний интеграл в (13.8) равен $\pi_1(A)$ и $\vartheta^{i+1}(A) \geq a_1 \pi_1(A)$ с $a_1 > 0$. Итак, $\vartheta^{i+1} \geq a_1 1_V \pi_1$ и соотношения (13.7) установлены.

Выберем $i \geq 1$, соблюдая (13.7), и подберем натуральное N так, чтобы любое $m \geq N$ представлялось в виде $m = ji + k(i+1)$ с целыми $j, k \geq 0$. Ясно, что $\vartheta^m \in \mathcal{M}_2$ в силу инвариантности $\mathcal{M}_2$ относительно свертки. Если же $N \leq m \leq n$, то $\vartheta^m \geq \nu_n$ при некотором $\nu_n \in \mathcal{M}_2$ (так как $\vartheta^m \geq f_m \pi_1$, где $f_m \in \mathcal{C}_K^+$ и $f_m(e) > 0$, то можно взять $\nu_n = \varphi_n \pi_1$ с $\varphi_n(\cdot) = \min\{f_m(\cdot); m \in [N, n]\}$). Пусть $q_n(x, A) = \nu_n(x^{-1}A)$, когда $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ и $n \geq N$. Очевидно, что $q_n(x, E) = \nu_n(E) > 0$ и $p_m(x, A) = \vartheta^m(x^{-1}A) \geq q_n(x, A)$, $n \leq m \leq N$, откуда по теореме 4.1 (поправку см. в конце §5) вытекает принадлежность X к $\mathcal{X}_1$. Согласно утверждению (а) леммы 13.1 также и $\hat{X} \in \mathcal{X}_1$. Доказательство завершено.

Как и в §12, под $\mathcal{F}_0 = \{f_n = P^n f / \nu(P^n f); n \geq n_0, n \notin \mathcal{N}\}$ будет пониматься семейство функций, отвечающее некоторым $f \in \mathcal{S}$ и $\nu \in \mathcal{S}^*$, где $\mathcal{N}$ — какое-либо адаптированное ИПМ для X . Разумеется, теперь $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_2^*$ согласно лемме 13.1, (в).

Лемма 13.3. Пусть параметр сходимости цепи X равен 1, и пусть $f \in \mathcal{S}_2$, а $\nu \in \mathcal{S}_2^*$. Тогда соответствующее семейство $\mathcal{F}_0$ равномерно ограничено на любом компакте в E , а если $f \in \mathcal{C}_K^+$, $f \not\equiv 0$, то оно еще и равномерно непрерывно на любом компакте в E .

Доказательство. Зададим $f \in \mathcal{C}_K^+$, $f \not\equiv 0$, и компакт $F \subset E$. По теореме 3.1 из [12] при подходящем $m \geq 0$ семейство $\{P^n f / \nu(P^{n+m} f); n \geq n_0\} = \{a_n f_n; n \geq n_0\}$, где $a_n = \nu(P^n f) / \nu(P^{n+m} f)$,

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на F . Ввиду определения адаптированного ИПМ $a_n \rightarrow 1$, когда $n \rightarrow \infty$ вне $\mathcal{N}$, откуда и следует утверждение леммы для функций f указанного вида. Теперь случай $f \in \mathcal{S}_2$ можно рассмотреть столь же просто, как и независимость условия $(2A)_{\mathcal{N}}$ от выбора соответствующих функций и мер (см. § 12).

Ясно, что из доказанной леммы вытекает следующее утверждение.

Следствие 13.2. *Если закон ϑ имеет компактный носитель, то выполняется условие $(2A)_{\mathcal{N}}$.*

Очевидно также, что при наличии у ϑ компактного носителя оператор P обладает свойством, упомянутым в условии (12A).

Лемма 13.4. *Если $f \in \mathcal{C}_K^+$, $f \not\equiv 0$ и $F \subset E$ компактно, то*

$$C^{-1} \leq \frac{P^n f(x)}{P^n f(y)} \leq C \quad (13.9)$$

при некотором $C > 0$, всех $x, y \in F$ и достаточно больших $n \notin \mathcal{N}$.

Доказательство. Покажем, что при всех $x, z \in F$ и $n \geq t$

$$C_1^{-1} P^{n-m} f(z) \leq P^n f(x) \leq C_1 P^{n+m} f(z), \quad (13.10)$$

если $C_1 > 0$ и $m \geq 1$ выбраны надлежащим образом. Для этого, задав относительно компактное $W_1 \supset FF^{-1}$, воспользуемся неравенством $P^n f(yz) \leq C_1 P^{n+m} f(z)$, $n \geq 1$, выполняющимся при всех $z \in E$ и $y \in W$ и некоторых $C_1 > 0$ и $m \geq 1$ [12, лемма 3.2]. Пусть $W = W^{-1}$, так как иначе можно было бы W заменить на $W \cup W^{-1}$. В силу упомянутого неравенства $P^{n-m} f(y^{-1}yz) \leq C_1 P^n f(yz)$, $n > m$, для всех $y \in W$, а следовательно, справедливо (13.10) с $x = yz$ при тех же n и y и любых $z \in F$, что и влечет (13.10) при всех $x, z \in F$.

Пусть теперь $\nu \in \mathcal{S}_2^*$, $\nu(E \setminus F) = 0$ и $\nu(P^n f) > 0$ при $n \geq n_1$, где n_1 превышает m и n_0 . В соответствии с (13.10)

$$C_1^{-1} \frac{\nu(P^{n-m} f)}{\nu(P^n f)} \leq f_n(x) = \frac{P^n f(x)}{\nu(P^n f)} \leq C_1 \frac{\nu(P^{n+m} f)}{\nu(P^n f)}, \quad (13.11)$$

если $n \geq n_1$, $x \in F$. Ясно, что крайние отношения в (13.11) стремятся к 1, когда $n \rightarrow \infty$, $n \notin \mathcal{N}$, и поэтому $C_1^{-1}/2 \leq f_n(x) \leq 2C_1$, если $x \in F$ и $n \notin \mathcal{N}$ достаточно велико. Отсюда следует (13.9), так как $P^n f(x)/P^n f(y)$ совпадает с $f_n(x)/f_n(y)$, когда $x, y \in F$.

Теорема 13.1. *Пусть группа E является унимодулярной, а случайное блуждание X удовлетворяет условию (13A) и имеет закон ϑ с компактным носителем. Пусть этому блужданию отвечает параметр сходимости $R = 1$ и мера Хаара π является единственной*

(с точностью до множителя) мерой, инвариантной для X , плотной в E и конечной на компактах в E . Если $f, g \in \mathcal{C}_K^+$ и $g \not\equiv 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{P^n f(x)}{P^n g(y)} = \frac{\pi(f)}{\pi(g)}, \quad (13.12)$$

где $x, y \in E$ и $\mathcal{N}$ — любое адаптированное ИМП для X . При этом стремление к пределу в (13.12) происходит равномерно относительно точек x и y , когда они пробегают любой компакт в E .

Случай $f, g \in \mathcal{S}_2$ отложен до следующей теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задав $f, g \in \mathcal{C}_K^+$, $g \not\equiv 0$, покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{P^n f(e)}{P^n g(e)} = \frac{\pi(f)}{\pi(g)}. \quad (13.13)$$

Для этого наряду с семейством $\mathcal{F}_0$, отвечающим f и $\nu \in \mathcal{S}_2^*$, рассмотрим относительно компактные окрестности $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ точки e , пересечение замыканий которых содержит лишь e , и меры $\mu_n \in \mathcal{S}_2^* \cap \mathcal{P}$, для которых $\mu_n(E \setminus V_n) = 0$, $n \geq 1$. Пусть при всех достаточно больших $n \in \mathcal{N}$ выполняются как неравенства (13.9) с любыми x и y из носителя ν , так и такие же неравенства с функцией g вместо f . При заданном $\varepsilon \in (0, C^{-1})$ найдутся такие $i \geq 0$ и $n_1 > 0$, что $|f_n(x) - f_n(e)| < \varepsilon$ в V_i и $\nu(P^n f) > 0$, если $n > n_1$, $n \notin \mathcal{N}$ (см. лемму 13.3). Поэтому при тех же n величина $\mu_j(P^n f) = \mu_j(f_n)\nu(P^n f)$, $j \geq i$, превышает

$$[f_n(e) - \varepsilon]\nu(P^n f) = P^n f(e) - \varepsilon\nu(P^n f) \geq [1 - C\varepsilon]P^n f(e),$$

а увеличив при необходимости i и n_1 , одновременно получим неравенство $\mu_j(P^n g) < [1 + C\varepsilon]P^n g(e)$. Стало быть,

$$\frac{\pi(f)}{\pi(g)} = \lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{\mu_j(P^n f)}{\mu_j(P^n g)} \geq \frac{1 - C\varepsilon}{1 + C\varepsilon} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{P^n f(e)}{P^n g(e)},$$

где на первом этапе использовано (12.2) применительно к мере μ_j . Отсюда, устремив ε к 0, получаем неравенство

$$\frac{\pi(f)}{\pi(g)} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{P^n f(e)}{P^n g(e)},$$

а следовательно, и аналогичное ему, возникающее при перемене ролей f и g . Из этих неравенств легко выводится (13.13).

В свою очередь, (13.12) получается из равенства (13.13), когда в последнем, учитывая унимодулярность E , функции f и g заменяются их сдвигами f_x и g_y , где, например, $f_x(z) = f(xz)$, $z \in E$.

Обратимся к последнему утверждению теоремы. Пусть $\tilde{f}_n = a_n f_n = P^n f / P^n f(e)$ и $\tilde{g}_n = P^n g / P^n g(e)$ при достаточно больших $n \geq 1$, где

$a_n = \nu(P^n f)/P^n f(e)$, а f_n — элемент семейства $\mathcal{F}_0$. Каков бы ни был компакт $F \subset E$, семейство функций $\tilde{f}_n$ равностепенно непрерывно на нем, поскольку таково $\mathcal{F}_0$ (лемма 13.3) и $a_n < C_1$ при некотором $C_1 > 0$ (лемма 13.4). Этот факт, а также стремление $\tilde{f}_n(x)$ к 1, $x \in E$, когда $n \rightarrow \infty$ вне $\mathcal{N}$ (см. (13.12)), устанавливают равномерность такого стремления к пределу на множестве F . Разумеется, и $\tilde{g}_n(x) \rightarrow 1$ равномерно на F , а так как $P^n f(x)/P^n g(y)$ отличается от $\tilde{f}_n(x)/\tilde{g}_n(y)$ лишь множителем $P^n f(e)/P^n g(e)$, где n по-прежнему достаточно велико, то отсюда и из (13.13) вытекает обсуждаемое утверждение.

Теорема 13.2. Пусть реализуются условия, вошедшие в две первые фразы предыдущей теоремы. Тогда для любых функций $f, g \in \mathcal{S}_2$ и мер $\mu, \nu \in \mathcal{S}_2^* \cap \mathcal{P}$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin \mathcal{N}} \frac{\nu(P^n f)}{\mu(P^n g)} = \frac{\pi(f)}{\pi(g)} \quad (13.14)$$

с любым адаптированным ИПМ $\mathcal{N}$ для X . При этом требование $f \in \mathcal{S}_2$ можно заменить предположением, что $f \in \mathcal{B}_+$ и $f = 0$ вне некоторого компакта в E .

Доказательство. Пусть сначала $f, g \in \mathcal{C}_K^+$ и $f \neq 0$. По теореме 13.1 отношение $P^n g/\nu(P^n f)$ стремится к $\pi(f)/\pi(g)$ равномерно на любом компакте в E , когда $n \rightarrow \infty$, $n \notin \mathcal{N}$. Поэтому к тому же пределу стремится и интеграл этого отношения по μ , и мы приходим к (13.14).

Теперь зададим $f, g \in \mathcal{S}_2$ и подберем функции f_n и g_n , $n \geq 1$, так, как это делалось в доказательстве теоремы 12.4. Каково бы ни было $\varepsilon \in (0, 1)$, мы вновь имеем (12.8) при достаточно больших $m \geq 1$ (только прежнюю ссылку на теорему 12.3 следует заменить ссылкой на первый абзац этого доказательства). Прежние рассуждения позволяют из (12.8) вывести (13.14), что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 13.1. Пусть имеются неунимодулярная группа E и мера π_0 , плотная в E и конечная на компактах в E . Тогда, как можно показать, найдется случайное блуждание X на E , которое подчиняется всем условиям теоремы 13.1 (кроме, быть может, условия, касающегося π), но к которому нельзя применить утверждения теорем 13.1 и 13.2, даже заменив в них π на π_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

25. Бредихин Б. М. Асимптотическая плотность. — Математическая энциклопедия, т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977, с. 332.
26. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003, 399 с.

27. Бурбаки Н. Интегрирование: Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М.: Наука, 1977, 600 с.
28. Дынкин Е. Б. Основания теории марковских процессов. М.: Физматгиз, 1959, 654 с.
29. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, т. 1. М.: Наука, 1975, 654 с.
30. Шур М. Г. Условие равномерной интегрируемости в сильных предельных теоремах для отношений. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 3, с. 446–461.
31. Шур М. Г. Асимптотическая равномерность симметричных случайных блужданий на унимодулярных группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 347–360.

Поступила в редакцию
22.III.2011