Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Болдин, Робастность знаковых тестов для гипотез о порядке авторегрессии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 761–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:28:08

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2012 г.

БОЛДИН М. В.*

РОБАСТНОСТЬ ЗНАКОВЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ ГИПОТЕЗ О ПОРЯДКЕ АВТОРЕГРЕССИИ

Наблюдения авторегрессии засорены независимыми аддитивными выбросами с неизвестным произвольным распределением. Интенсивность выбросов γ_n равна $\min(1, n^{-1/2}\gamma)$, где $\gamma \geq 0$ неизвестно, а n — объем данных. Устанавливается робастность знаковых тестов для гипотез о порядке авторегрессии. Результат формулируется в терминах равностепенной непрерывности предельной мощности по γ в точке $\gamma = 0$.

Ключевые слова и фразы: авторегрессия, знаковые тесты, гипотезы о порядке авторегрессии, робастность против выбросов, равностепенная непрерывность мощности.

1. Введение и постановка задачи. Ранговому, знако-ранговому и знаковому статистическому анализу семипараметрических моделей временных рядов посвящена обширная литература. Выделим, в частности, квадратические ранговые и знако-ранговые тесты в $AR(p)$ - и $ARMA(p, q)$ -моделях (см. [8]–[10]). Родственные им непараметрические локально оптимальные знаковые тесты в $AR(1)$ были построены чуть позже в [4] и распространены на $AR(p)$ (включая линейные гипотезы) в [5] и на $ARMA(p, q)$ в [1]. При этом упомянутые знаковые тесты для линейных гипотез в [5], [1] строились тем же методом, что и асимптотически оптимальные (максимальные в локальном смысле) тесты из [11].

Сосредоточимся далее на знаковых тестах в $AR(p)$. Во многих ситуациях они являются хорошей альтернативой общеупотребительным тестам наименьших квадратов. Причин этому несколько. В частности, асимптотическая относительная эффективность по Питмену знаковых тестов относительно тестов наименьших квадратов может быть больше единицы (и вообще сколь угодно большой) для инноваций с тяжелыми хвостами. Их предельная мощность на локальных альтернативах существует при более слабых моментных ограничениях на инновации, чем у тестов наименьших квадратов. Наконец, для простых семипараметрических гипотез (т.е. при полностью определенном гипотезой векторе параметров) знаковые тестовые статистики распределены свободно при конечных объемах данных. Подробности см. в [1].

Особо выделим свойство устойчивости (робастности) знаковых тестов к грубым выбросам (ошибкам) в данных. К сожалению, это фундаментальное свойство знаковых тестов из [5], [1] (и ранговых из [8]–[10]) систематически не исследовалось. (Мы имеем в виду теоретическое исследование. Экспериментальные факты, полученные,

---

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: boldin_m@hotmail.com

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00350).

например, статистическим моделированием, в этой заметке обсуждаться не будут.) Исклчением является работа [6], в которой установлена локальная качественная робастность знакового теста в $AR(1)$ в схеме засорения данных независимыми аддитивными выбросами. Эта качественная робастность формулируется в терминах равностепенной непрерывности уровня и мощности теста относительно уровня засорения.

Цель настоящей работы — в схеме засорения данных из [6] установить робастность знаковых тестов для гипотез о порядке авторегрессии.

Рассматриваемая $AR(p)$ -модель имеет вид

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbf{Z}. \quad (1.1)$$

Случайные величины $\{\varepsilon_t\}$ независимы и одинаково распределены с неизвестной функцией распределения G , $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ — вектор неизвестных параметров, и T означает транспонирование. Пусть вектор β разбит на два подвектора, $\beta^T = (\beta^{(1)T}, \beta^{(2)T})$, размера m и $p - m$ соответственно, $1 \leq m < p$. Нас интересует проверка гипотезы $H_0: \beta^{(2)} = \mathbf{0}$, при этом $\beta^{(1)}$ — мешающий параметр. Если H_0 верна, то порядок (1.1) не больше m . Мощность тестов будем изучать при локальных альтернативах вида $H_{1n}(\tau): \beta = \beta_n := \beta_0 + n^{-1/2}\tau$, где $\beta_0^T = (\beta^{(1)T}, \mathbf{0}^T)$, $\tau \in \mathbf{R}^p$.

Мы будем предполагать, что наблюдения авторегрессии содержат грубые выбросы и имеют вид

$$y_t = u_t + z_t^{\gamma_n} \xi_t, \quad t = 1 - p, \dots, n. \quad (1.2)$$

В (1.2) $\{u_t\}$ — авторегрессионная последовательность из (1.1); $\{z_t^{\gamma_n}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Бернулли с параметром

$$\gamma_n = \min(1, n^{-1/2}\gamma), \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \text{ неизвестно};$$

$\{\xi_t\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестным произвольным распределением μ ; последовательности $\{u_t\}$, $\{z_t^{\gamma_n}\}$, $\{\xi_t\}$ предполагаются независимыми.

Величины $\{\xi_t\}$ играют роль выбросов (засорений), γ_n есть уровень засорения. Схема (1.2) — локальный вариант общепотребительной во временных рядах схемы засорения данных аддитивными независимыми выбросами (см., например, [12]). Для независимых данных родственные схемы для исследования робастности тестов функциями влияния Хампеля рассматривались очень давно. Подробности и библиографию можно найти, например, в [7, гл. 3].

По наблюдениям $\{y_t\}$ из (1.2) мы строим знаковый тест для H_0 так же, как знаковый тест в [1], [5] строился по самим $\{u_t\}$. Мощность этого теста в схеме (1.2) будем обозначать $W_n(\tau, \gamma, \mu)$. Мы найдем для $W_n(\tau, \gamma, \mu)$ предельную при $n \rightarrow \infty$ мощность $W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)$, которая зависит от τ лишь через вектор $\tau^{(2)}$ размера $p - m$, определяемый равенством $\tau^T = (\tau^{(1)T}, \tau^{(2)T})$. Эта предельная мощность найдена в теореме 2.1 и следствии 2.1. В теореме 2.2 показано, что если $W(\tau^{(2)}) := W(\tau^{(2)}, 0, \mu)$, то

$$\sup_{\tau^{(2)}, \mu} |W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu) - W(\tau^{(2)})| \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

т.е. семейство функций $\{W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)\}$ равностепенно непрерывно по γ в точке $\gamma = 0$. Это свойство знакового теста и характеризует его робастность против выбросов. Точнее, выражает качественную робастность предельной мощности. Оно гарантирует при малых γ равномерную по произвольным μ и τ близость асимптотических уровня и мощности в схеме (1.2) соответствующим величинам в схеме без засорения с $\gamma = 0$. В силу (1.3) для знакового теста невозможны патологические ситуации, реализующиеся для тестов наименьших квадратов, когда при сколь угодно малом $\gamma > 0$ для некоторого μ асимптотический уровень значимости может быть сколь угодно близок к единице.

Отличная от (1.3) характеристика робастности при конечных n (в духе [6]) упомянута в замечании 2.5.

2. Основные результаты. Будем предполагать выполненными следующие условия.

У с л о в и е (i). $\mathbf{P}(\varepsilon_1 < 0) = \mathbf{P}(\varepsilon_1 > 0) = 1/2$.

У с л о в и е (ii). $\mathbf{E}|\varepsilon_1| < \infty$, $\mathbf{E}\varepsilon_1 = 0$.

У с л о в и е (iii). Существует производная $g = G'$, причем $g(0) > 0$, $\sup_x g(x) < \infty$ и g непрерывна в нуле.

У с л о в и е (iv). Характеристический полином $A(z) = z^p - \beta_1 z^{p-1} - \dots - \beta_p$ не имеет корней при $|z| \geq 1$.

Определим последовательность $\{\alpha_t = \alpha_t(\beta)\}$ рекуррентным соотношением

$$\alpha_t = \beta_1 \alpha_{t-1} + \dots + \beta_p \alpha_{t-p}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

с $\alpha_t = 0$ для $t < 0$ и $\alpha_0 = 1$. При условиях (ii), (iv) уравнение (1.1) имеет п.н. единственное строго стационарное решение $\{u_t, t \in \mathbf{Z}\}$,

$$u_t = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(\beta) \varepsilon_{t-j},$$

ряд сходится в L^1 . См. подробности в [3, гл. 5].

Пусть $u_{1-p}, \dots, u_n$ в (1.2) являются выборкой из строго стационарного решения. Далее мы строим статистику знакового теста для H_0 по $\{y_t\}$ в точности так же, как в [5], [1] локально оптимальные знаковые тесты строились по самим $\{u_t\}$. В [1] можно найти подробности, мотивацию к такому построению и свойства оптимальности. Здесь комментарии будут короткими.

Итак, для $\theta^T = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbf{R}^p$ положим

$$S_k(\theta) = \text{sgn}(y_k - \theta_1 y_{k-1} - \dots - \theta_p y_{k-p}), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\Gamma_{tn}(\theta) = \frac{1}{n-t} \sum_{k=t+1}^n S_{k-t}(\theta) S_k(\theta), \quad t = 1, \dots, n-1.$$

$\Gamma_{tn}(\theta)$ — знаковая корреляция порядка t . Положим также

$$l_{in}(\theta) = \sum_{t=0}^{n-i-1} \alpha_t(\theta)(n-t-i) \Gamma_{t+i,n}(\theta), \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\mathbf{l}_n(\theta) = (l_{1n}(\theta), \dots, l_{pn}(\theta))^T.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Статистики $l_{in}(\theta)$ возникают в схеме без засорения с $\gamma = 0$ следующим образом. Рассмотрим одномерную гипотезу H_i^+ : $\beta_i = \beta_i^0$ в предположении, что оставшиеся $p-1$ компонент β_j , $j \neq i$, известны и фиксированы. Рассмотрим вектор β_i^0 с i -й компонентой β_i^0 и фиксированными прочими. Тогда $l_{in}(\beta_i^0)$ есть статистика локально наиболее мощного знакового теста для H_i^+ при правосторонней альтернативе. См. подробности в [1, разд. 2].

Введем матрицу

$$\mathbf{K}(\beta) = (k_{i,j}(\beta))_{1 \leq i,j \leq p}, \quad k_{i,j}(\beta) = \sum_{t \geq 0} \alpha_t(\beta) \alpha_{t+|i-j|}(\beta).$$

З а м е ч а н и е 2.2. Матрица $\mathbf{K}(\beta)$ играет центральную роль в нашем рассмотрении и возникает следующим образом. Пусть $\gamma = 0$. Тогда (см. [1, разд. 2]), если $\mathbf{I}_n(\beta, \theta)$ — информация Фишера о векторе β , содержащаяся в знаках $S_1(\theta), \dots, S_n(\theta)$, то

$$\mathbf{I}_n(\beta, \beta) \sim (2g(0) \mathbf{E}|\varepsilon_1|)^2 n \mathbf{K}(\beta), \quad n \rightarrow \infty.$$

Определим матрицы $\mathbf{J}(\beta)$ порядка $m \times m$, $\mathbf{M}(\beta)$ порядка $(p-m) \times (p-m)$ и $\mathbf{B}^T(\beta)$ порядка $m \times (p-m)$ равенством

$$\mathbf{K}(\beta) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}(\beta) & \mathbf{B}^T(\beta) \\ \mathbf{B}(\beta) & \mathbf{M}(\beta) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{V}(\beta) := \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1/2}(\beta) & -\mathbf{J}^{-1}(\beta)\mathbf{B}^T(\beta)\mathbf{C}^{-1/2}(\beta) \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1/2}(\beta) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{C}(\beta) = \mathbf{M}(\beta) - \mathbf{B}(\beta)\mathbf{J}^{-1}(\beta)\mathbf{B}^T(\beta).$$

Все обратные матрицы определены, так как $\mathbf{K}(\beta) > 0$.

Пусть $\hat{\beta}_n$ — последовательность, зависящая от наблюдений $\{y_t\}$, такая, что $n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta_n) = O_{\mathbf{P}}(1)$ при $H_{1n}(\tau)$. В частности, можно взять $\hat{\beta}_n$ равным вектору $\hat{\beta}_{n0}$, где

$$\hat{\beta}_{n0}^T := (\hat{\beta}_n^{(1)T}, \mathbf{0}^T),$$

а $\hat{\beta}_n^{(1)}$ есть $n^{1/2}$ -состоятельная оценка $\beta^{(1)}$. В качестве $\hat{\beta}_n$ можно взять, например, обобщенную M -оценку из [2]. Обозначим $\hat{\mathbf{V}}_n$ состоятельную при $H_{1n}(\tau)$ оценку матрицы $\mathbf{V}(\beta_0)$. Например, можно положить $\hat{\mathbf{V}}_n = \mathbf{V}(\hat{\beta}_n)$. В качестве тестовой статистики для H_0 возьмем

$$L_n := n^{-1} \left| \pi \circ \hat{\mathbf{V}}_n^T \mathbf{1}_n(\hat{\beta}_{n0}) \right|^2,$$

где π — ортогональная проекция на последние $p - m$ координат, а $|\cdot|$ означает евклидову норму вектора.

З а м е ч а н и е 2.3. В случае $\gamma = 0$ статистика L_n построена по аналогии со статистиками асимптотически локально оптимальных тестов из [11]. См. [1, замечание 4.1] по этому поводу. Смысл построения также проясняется доказательством теоремы 2.1 в п. 3.

Введем вектор

$$\Delta(\beta, \mu) = (\delta_1(\beta, \mu), \dots, \delta_p(\beta, \mu))^T,$$

где

$$\delta_j(\beta, \mu) := \sum_{t=0}^{p-j} \alpha_t(\beta) \sum_{k=0}^{p-t-j} \mathbf{E} [1 - 2G(\beta_k \xi_1)] [1 - 2G(\beta_{t+j+k} \xi_1)],$$

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$, $\beta_0 = -1$, $j = 1, \dots, p$. Вектор $\Delta(\beta, \mu)$ будет характеризовать асимптотическое влияние засорения на знаковые тестовые статистики.

З а м е ч а н и е 2.4. Вектор $\Delta(\beta, \mu)$ уже встречался в знаковом анализе авторегрессии. А именно, в схеме (1.1) можно построить знаковую оценку вектора β . Функционал влияния этой оценки пропорционален как раз $\Delta(\beta, \mu)$. См. подробности в [5, § 7.5, § 7.6].

Разобьем вектор $\Delta(\beta, \mu)$ на подвекторы размера m и $p - m$:

$$\Delta^T(\beta, \mu) = (\Delta^{(1)T}(\beta, \mu), \Delta^{(2)T}(\beta, \mu)).$$

Далее до конца пункта аргумент β_0 у матриц $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{J}$ ради краткости опущен, также опущены аргументы β_0 , μ у $\Delta^{(1)}$. Через $\chi^2(k, \nu^2)$ обозначено нецентральное распределение хи-квадрат с k степенями свободы и параметром нецентральности ν^2 , через $F_k(x, \nu^2)$ — его функция распределения. Через $\chi_{1-\alpha}^k$ обозначена квантиль уровня $1 - \alpha$ центрального распределения хи-квадрат $\chi^2(k)$.

Напомним, что вектор $\tau^{(2)}$ размера $p - m$ определяется соотношением $\tau^T = (\tau^{(1)T}, \tau^{(2)T})$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (i)–(iii) и условие (iv) с $\beta = \beta_0$. Тогда при альтернативе $H_{1n}(\tau)$ имеет место сходимость по распределению

$$L_n \rightarrow \chi^2(p - m, \lambda^2(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\lambda^2(\tau^{(2)}, \gamma, \mu) = \left| 2g(0) \mathbf{E} |\varepsilon_1| \mathbf{C}^{1/2} \tau^{(2)} - \mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \Delta^{(1)} \gamma \right|^2.$$

При гипотезе H_0 и $\gamma = 0$ имеет место сходимость по распределению

$$L_n \rightarrow \chi^2(p-m), \quad n \rightarrow \infty.$$

Мы используем знаковый тест в схеме (1.2) так же, как в схеме без засорения с $\gamma = 0$. Поэтому H_0 отвергается с асимптотическим уровнем значимости α при $L_n > \chi_{1-\alpha}^{p-m}$, и мощность такого теста есть

$$W_n(\tau, \gamma, \mu) := P_{\beta_n}(L_n > \chi_{1-\alpha}^{p-m}).$$

Пусть

$$W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu) := 1 - F_{p-m}(\chi_{1-\alpha}^{p-m}, \lambda^2(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)).$$

Теорема 2.1 влечет за собой следующее утверждение.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда при альтернативе $H_{1n}(\tau)$ для $W_n(\tau, \gamma, \mu)$ существует предельная мощность:

$$W_n(\tau, \gamma, \mu) \rightarrow W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu), \quad n \rightarrow \infty.$$

Свойства предельной мощности описывает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для предельной мощности $W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)$ выполнено (1.3) и, следовательно, семейство функций $\{W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)\}$ равномерно непрерывно по γ в точке $\gamma = 0$.

При этом супремум в (1.3) есть $O(\gamma)$, а для асимптотических уровней $\sup_{\mu} |W(0, \gamma, \mu) - W(0)| = O(\gamma^2)$, $\gamma \rightarrow 0$.

Как отмечалось во введении, утверждение теоремы 2.2 означает качественную робастность предельной мощности знакового теста против выбросов.

З а м е ч а н и е 2.5. Качественная робастность знакового теста в схеме (1.2) может быть сформулирована и для конечных n . А именно, пусть $W_n(\tau) := W_n(\tau, 0, \mu)$ — мощность при конечных n в схеме без засорения. Можно показать, что знаковый тест удовлетворяет условию локальной качественной робастности (определение введено в [6]), т.е.

$$\sup |W_n(\tau, \gamma, \mu) - W_n(\tau)| \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Супремум в (2.1) берется по произвольным μ , $|\tau| \leq \Theta$ (Θ произвольно и конечно) и $n > n_0(\Theta)$.

Доказательство соотношения (2.1) кропотливо и будет представлено в отдельной публикации. Здесь отметим лишь, что в отличие от теоремы 2.1 (где речь идет о слабой сходимости при фиксированных μ , τ , γ) оно требует равномерной по произвольным μ , $|\tau| \leq \Theta$, $\gamma \leq \Gamma < \infty$ слабой сходимости L_n к пределу. Утверждение (2.1) родственно теореме 3.2 из [6].

3. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 2.1 лишь техническими деталями отличается от доказательства теоремы 4.1 в [1]. Это позволяет избежать утомительных подробностей.

Введем знаковые корреляции

$$\tilde{\Gamma}_{tn} := \frac{1}{n-t} \sum_{k=t+1}^n \operatorname{sgn} \varepsilon_{k-t} \operatorname{sgn} \varepsilon_k, \quad t = 1, \dots, n-1.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{in}(\beta_0) &:= \sum_{t=0}^{n-i-1} \alpha_t(\beta_0)(n-t-i) \tilde{\Gamma}_{t+i,n}(\beta_0), \quad i = 1, \dots, p, \\ \tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) &:= (\tilde{l}_{1n}(\beta_0), \dots, \tilde{l}_{pn}(\beta_0))^T. \end{aligned}$$

В силу [1, соотношение (2.19)] имеет место сходимость по распределению

$$n^{-1/2}\tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{K}(\beta_0)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Повторяя схему рассуждений доказательства теоремы 3.1 в [1], получаем стохастическое разложение: для любого $0 \leq T < \infty$

$$\begin{aligned} \sup_{|\theta| \leq T} \left| \mathbf{l}_n(\beta_n + n^{-1/2}\theta) - \tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) \right. \\ \left. + 2g(0) \mathbf{E} |\varepsilon_1| \mathbf{K}(\beta_0)\theta - \Delta(\beta_0, \mu)\gamma \right| = o_{\mathbf{P}}(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Далее ради краткости будем опускать аргумент β_0 у матриц $\mathbf{K}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{C}$ и аргументы у векторов $\Delta(\beta_0, \mu)$, $\Delta^{(1)}(\beta_0, \mu)$.

По предположению, $n^{1/2}(\hat{\beta}_{n0} - \beta_n) = O_{\mathbf{P}}(1)$ при $H_{1n}(\tau)$. Повторяя доказательство следствия 6.4.1 в [5], получаем в силу (3.2):

$$\mathbf{l}_n(\hat{\beta}_{n0}) - \tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) + 2g(0) \mathbf{E} |\varepsilon_1| \mathbf{K} n^{1/2}(\hat{\beta}_{n0} - \beta_n) - \Delta\gamma = o_{\mathbf{P}}(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Из определения матрицы $\mathbf{V}$ следует равенство

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{1/2} & \mathbf{J}^{-1/2}\mathbf{B}^T \\ 0 & \mathbf{C}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$(\mathbf{V}^T)^{-1}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{K}. \quad (3.4)$$

Используя (3.3), (3.4) и состоятельность $\hat{\mathbf{V}}_n$, получаем:

$$\begin{aligned} n^{-1/2}\hat{\mathbf{V}}_n^T \mathbf{l}_n(\hat{\beta}_{n0}) &= n^{-1/2}\hat{\mathbf{V}}_n^T \tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) - 2g(0) \mathbf{E} |\varepsilon_1| \hat{\mathbf{V}}_n^T \mathbf{K} n^{1/2}(\hat{\beta}_{n0} - \beta_n) \\ &\quad + \hat{\mathbf{V}}_n^T \Delta\gamma + o_{\mathbf{P}}(1) \\ &= n^{-1/2}\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) - 2g(0) \mathbf{E} |\varepsilon_1| \mathbf{V}^T \mathbf{K} n^{1/2}(\hat{\beta}_{n0} - \beta_n) \\ &\quad + \mathbf{V}^T \Delta\gamma + o_{\mathbf{P}}(1) \\ &= n^{-1/2}\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) - 2g(0) \mathbf{E} |\varepsilon_1| \mathbf{V}^{-1} (n^{1/2}(\hat{\beta}_{n0}^{(1)} - \beta_n^{(1)})^T, -\tau^{(2)T})^T \\ &\quad + \mathbf{V}^T \Delta\gamma + o_{\mathbf{P}}(1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) влечет

$$\begin{aligned} \pi \circ n^{-1/2}\hat{\mathbf{V}}_n^T \mathbf{l}_n(\hat{\beta}_{n0}) &= \pi \circ n^{-1/2}\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{l}}_n(\beta_0) \\ &\quad + 2g(0) \mathbf{E} |\varepsilon_1| \mathbf{C}^{1/2} \tau^{(2)} + \pi \circ \mathbf{V}^T \Delta\gamma + o_{\mathbf{P}}(1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для слагаемых в правой части (3.6) справедливо следующее. Во-первых, в силу (3.1), (3.4) имеет место сходимость по распределению

$$\pi \circ \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{l}}(\beta_0) \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{E}_{p-m}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

$\mathbf{E}_{p-m}$ — единичная матрица порядка $p - m$.

Во-вторых, если выполнено условие (i), то $\Delta^T = (\Delta^{(1)T}, \mathbf{0}^T)$. Поэтому

$$\pi \circ \mathbf{V}^T \Delta\gamma = -\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \Delta^{(1)} \gamma. \quad (3.8)$$

Соотношения (3.6)–(3.8) и определение L_n влекут за собой сходимость по распределению

$$L_n \rightarrow \chi^2(p - m, \lambda^2(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Прежде всего покажем, что

$$|F_k(x, \nu_1^2) - F_k(x, \nu_2^2)| \leq 2 \sup_x \varphi(x) |\nu_1 - \nu_2|, \quad (3.9)$$

где $\varphi(x)$ — стандартная гауссовская плотность. Действительно, пусть $\xi_1, \dots, \xi_k$ — стандартные независимые гауссовские величины. Тогда при $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_k(x, \nu_1^2) &= \mathbf{P}\left((\xi_1 + \nu_1)^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2 \leq x\right) \\ &= \mathbf{E} \left\{ I\left(|\xi_1 + \nu_1| \leq (x - \xi_2^2 - \dots - \xi_k^2)^{1/2}\right) I(\xi_2^2 + \dots + \xi_k^2 \leq x) \right\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ \left[\Phi(-\nu_1 + (x - \xi_2^2 - \dots - \xi_k^2)^{1/2}) - \Phi(-\nu_1 - (x - \xi_2^2 - \dots - \xi_k^2)^{1/2}) \right] \right. \\ &\quad \left. \times I(\xi_2^2 + \dots + \xi_k^2 \leq x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где Φ — функция Лапласа. Из соотношения (3.10) и формулы Лагранжа следует (3.9).

Далее нам понадобится оценить сверху $\sup_{\mu} |\Delta^{(1)}(\beta_0, \mu)|$. Для этого введем вектор

$$\overline{\Delta}^{(1)}(\beta_0) = (\bar{\delta}_1(\beta_0), \dots, \bar{\delta}_m(\beta_0))^T$$

с компонентами

$$\bar{\delta}_j(\beta_0) := \sum_{t=0}^{p-j} |\alpha_t(\beta_0)| (p - t - j + 1), \quad j = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что $\sup_{\mu} |\delta_j(\beta_0, \mu)| \leq \bar{\delta}_j(\beta_0)$, а потому

$$\sup_{\mu} |\Delta^{(1)}(\beta_0, \mu)| \leq |\overline{\Delta}^{(1)}(\beta_0)| < \infty. \quad (3.11)$$

Пусть $|\cdot|$ означает евклидову норму не только вектора, но и матрицы. Тогда из определения параметра нецентральности $\lambda(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)$ и (3.11) следует, что

$$\begin{aligned} |\lambda(\tau^{(2)}, \gamma, \mu) - \lambda(\tau^{(2)}, 0, \mu)| &\leq |\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \Delta^{(1)}| \gamma \\ &\leq |\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1}| |\overline{\Delta}^{(1)}| \gamma = A(\beta_0) \gamma. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В (3.12) матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ зависят от β_0 , вектор $\Delta^{(1)}$ зависит от β_0 и μ , скалярная функция $A(\beta_0)$ зависит от β_0 , но от μ не зависит.

Соотношения (3.9), (3.12) и определение

$$W(\tau^{(2)}, \gamma, \mu) := 1 - F_{p-m}(\chi_{1-\alpha}^{p-m}, \lambda^2(\tau^{(2)}, \gamma, \mu)) \quad (3.13)$$

влекут за собой соотношение (1.3) и утверждение теоремы о скорости сходимости в (1.3).

При $\tau^{(2)} = \mathbf{0}$

$$\lambda(\mathbf{0}, \gamma, \mu) = |\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \Delta^{(1)}| \gamma. \quad (3.14)$$

Поэтому в силу (3.10), (3.13), (3.14) предельную мощность $W(\mathbf{0}, \gamma, \mu)$ можно разложить по степеням γ до второго порядка. При этом линейный член, очевидно, равен нулю, а коэффициент перед γ^2 не превосходит

$$\sup_x |\varphi'(x)| |\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \Delta^{(1)}|^2 \leq \sup_x |\varphi'(x)| A^2(\beta_0)$$

в силу (3.12). Значит,

$$\sup_{\mu} |W(\mathbf{0}, \gamma, \mu) - W(\mathbf{0})| \leq \sup_x |\varphi'(x)| A^2(\beta_0) \gamma^2.$$

Теорема 2.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдин М. В., Штутте В. О знаковых тестах в ARMA модели с возможно бесконечной дисперсией ошибок. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 3, с. 436–460.
2. Есаулов Д. Робастность GM-тестов в авторегрессии против выбросов. — Вестн. МГУ, сер. Матем. мех., 2011, в. 5, с. 5–9.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976, 755 с.
4. Boldin M. V., Tyurin Yu. N. On nonparametric sign procedures for autoregression models. — Math. Methods Statist., 1994, v. 3, № 4, p. 279–305.
5. Boldin M. V., Simonova G. I., Tyurin Yu. N. Sign-based methods in linear statistical models. Providence: Amer. Math. Soc., 1997, 234 p.
6. Boldin M. V. Local robustness of sign tests in AR(1) against outliers. — Math. Methods Statist., 2011, v. 20, № 1, p. 1–13.
7. Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A. Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions. New York: Wiley, 1986, 502 p.
8. Hallin M., Puri M. L. Optimal rank-based procedures for time series analysis: testing an ARMA model against other ARMA models. — Ann. Statist., 1988, v. 16, № 1, p. 402–432.
9. Hallin M., Puri M. L. Time series analysis via rank order theory: signed-rank tests for ARMA models. — J. Multivariate Anal., 1991, v. 39, № 1, p. 1–29.
10. Hallin M., Puri M. L. Aligned rank test for linear models with autocorrelated error terms. — J. Multivariate Anal., 1994, v. 50, № 2, p. 175–237.
11. Kreiss J.-P. Testing linear hypotheses in autoregression. — Ann. Statist., 1990, v. 18, № 3, p. 1470–1482.
12. Martin R. D., Yohai V. J. Influence functionals for time series. — Ann. Statist., 1986, v. 14, № 3, p. 781–818.

Поступила в редакцию
29.VI.2011

© 2012 г.

ЕЛИСЕЕВА Ю. С.*, ЗАЙЦЕВ А. Ю.**

ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. В статье рассматривается вопрос о поведении функции концентрации случайной величины $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ в зависимости от арифметической структуры коэффициентов a_k . В последнее время интерес к этому вопросу значительно возрос в связи с изучением распределений собственных чисел случайных матриц. В статье сформулированы и доказаны уточнения недавних результатов Фридланда и Содина, а также Рудельсона и Вершинина.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: pochta106@yandex.ru

** Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН; Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-1216.2012.1) и РФФИ (грант № 10-01-00242). Второй автор поддержан также РФФИ (грант № 11-01-12104) и Программой фундаментальных исследований РАН «Современные проблемы теоретической математики».