Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 768–777

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:44:12

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдин М. В., Штутте В. О знаковых тестах в ARMA модели с возможно бесконечной дисперсией ошибок. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 3, с. 436–460.
2. Есаулов Д. Робастность GM-тестов в авторегрессии против выбросов. — Вестн. МГУ, сер. Матем. мех., 2011, в. 5, с. 5–9.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976, 755 с.
4. Boldin M. V., Tyurin Yu. N. On nonparametric sign procedures for autoregression models. — Math. Methods Statist., 1994, v. 3, № 4, p. 279–305.
5. Boldin M. V., Simonova G. I., Tyurin Yu. N. Sign-based methods in linear statistical models. Providence: Amer. Math. Soc., 1997, 234 p.
6. Boldin M. V. Local robustness of sign tests in AR(1) against outliers. — Math. Methods Statist., 2011, v. 20, № 1, p. 1–13.
7. Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A. Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions. New York: Wiley, 1986, 502 p.
8. Hallin M., Puri M. L. Optimal rank-based procedures for time series analysis: testing an ARMA model against other ARMA models. — Ann. Statist., 1988, v. 16, № 1, p. 402–432.
9. Hallin M., Puri M. L. Time series analysis via rank order theory: signed-rank tests for ARMA models. — J. Multivariate Anal., 1991, v. 39, № 1, p. 1–29.
10. Hallin M., Puri M. L. Aligned rank test for linear models with autocorrelated error terms. — J. Multivariate Anal., 1994, v. 50, № 2, p. 175–237.
11. Kreiss J.-P. Testing linear hypotheses in autoregression. — Ann. Statist., 1990, v. 18, № 3, p. 1470–1482.
12. Martin R. D., Yohai V. J. Influence functionals for time series. — Ann. Statist., 1986, v. 14, № 3, p. 781–818.

Поступила в редакцию
29.VI.2011

© 2012 г.

ЕЛИСЕЕВА Ю. С.*, ЗАЙЦЕВ А. Ю.**

ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. В статье рассматривается вопрос о поведении функции концентрации случайной величины $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ в зависимости от арифметической структуры коэффициентов a_k . В последнее время интерес к этому вопросу значительно возрос в связи с изучением распределений собственных чисел случайных матриц. В статье сформулированы и доказаны уточнения недавних результатов Фридланда и Содина, а также Рудельсона и Вершинина.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: pochta106@yandex.ru

** Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН; Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-1216.2012.1) и РФФИ (грант № 10-01-00242). Второй автор поддержан также РФФИ (грант № 11-01-12104) и Программой фундаментальных исследований РАН «Современные проблемы теоретической математики».

Ключевые слова и фразы: функции концентрации, суммы независимых случайных величин, проблема Литтлвуда–Оффорда.

1. Введение. Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с общим распределением $F = \mathcal{L}(X)$. Функция концентрации Леви случайной величины X определяется равенством

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}} F\{x, x + \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$. В статье рассматривается вопрос о поведении функции концентрации случайной величины $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ в зависимости от арифметической структуры коэффициентов a_k . В последнее время интерес к этому вопросу значительно возрос в связи с изучением распределений собственных чисел случайных матриц (см., например, [11], [14]–[17]). Авторы упомянутых выше статей называют этот вопрос проблемой Литтлвуда–Оффорда.

В дальнейшем F_a — распределение суммы $\sum_{k=1}^n a_k X_k$, а G — распределение случайной величины $\tilde{X}$, где $\tilde{X} = X_1 - X_2$ — симметризованная случайная величина. Обозначим

$$M(\tau) = \tau^{-2} \int_{|x| \leq \tau} x^2 G\{dx\} + \int_{|x| > \tau} G\{dx\} = \mathbf{E} \min \left\{ \frac{\tilde{X}^2}{\tau^2}, 1 \right\}, \quad \tau > 0. \quad (1)$$

Одной и той же буквой c мы будем обозначать положительные абсолютные постоянные, которые могут быть различными даже в пределах одной формулы. Запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leq cB$ и $B > 0$. Будем также писать $A \asymp B$, если $A \ll B$ и $B \ll A$. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ мы будем обозначать $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ и $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$.

Простейшие свойства функций концентрации хорошо изучены (см., например, монографии [2], [7], [12]). Очевидно, в частности, что $Q(F, \mu) \leq (1 + [\mu/\lambda]) Q(F, \lambda)$ для любых $\mu, \lambda > 0$, где $[x]$ — целая часть числа x . Следовательно,

$$Q(F, c\lambda) \asymp Q(F, \lambda) \quad (2)$$

и

$$\text{если } Q(F, \lambda) \ll K, \text{ то } Q(F, \mu) \ll K \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right). \quad (3)$$

Кроме того, для любого распределения F справедливы ставшие уже классическими неравенства Эссеена [4] (см. также [7] и [12]):

$$\lambda \int_0^{\lambda^{-1}} |\hat{F}(t)|^2 dt \ll Q(F, \lambda) \ll \lambda \int_0^{\lambda^{-1}} |\hat{F}(t)| dt, \quad \lambda > 0, \quad (4)$$

где $\hat{F}(t)$ — характеристическая функция соответствующей случайной величины. Заметим, что оценки сверху и снизу в (4) могут иметь разный порядок. Это связано с наличием второй степени $|\hat{F}(t)|^2$ в левой части формулы (4). В общем случае оба неравенства (4) оптимальны по порядку. Однако, если дополнительно предположить, что распределение F симметрично и его характеристическая функция неотрицательна при всех $t \in \mathbf{R}$, то справедлива оценка снизу

$$Q(F, \lambda) \gg \lambda \int_0^{\lambda^{-1}} \hat{F}(t) dt \quad (5)$$

и, тем самым,

$$Q(F, \lambda) \asymp \lambda \int_0^{\lambda^{-1}} \hat{F}(t) dt \quad (6)$$

(см. [2, гл. II, лемма 1.5]). Использование соотношения (6) позволит нам существенно упростить рассуждения, использованные при рассмотрении проблемы Литтлвуда–Оффорда в работах [6] и [15].

Напомним также неравенство Колмогорова–Рогозина [13] (см. [2], [7], [12]).

Предложение 1. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые случайные величины с распределениями $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — положительные числа, $\lambda_k \leq \lambda$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда

$$Q\left(\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right), \lambda\right) \ll \lambda \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 (1 - Q(W_k, \lambda_k))\right)^{-1/2}. \quad (7)$$

Эсseen [5] (см. [12, гл. III, теорема 3]) уточнил этот результат, показав, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. В условиях предложения 1 выполняется неравенство

$$Q\left(\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right), \lambda\right) \ll \lambda \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 M_k(\lambda_k)\right)^{-1/2}, \quad (8)$$

где $M_k(\tau) = \mathbf{E} \min\{\tilde{Y}_k^2/\tau^2, 1\}$.

В работах [1]–[3], [8]–[10] можно также найти уточнения неравенств (7) и (8).

Задача об оценивании функции концентрации взвешенных сумм $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ при различных условиях на вектор $a \in \mathbf{R}^n$ и распределения слагаемых была рассмотрена в работах [6], [11], [14]–[17]. В этой статье мы сформулируем и докажем уточнения результатов, полученных в [6] и [15].

Чтобы иметь возможность сравнивать результаты, мы сформулируем результаты работ [6] и [15] в единых обозначениях.

Фридланд и Седин [6] упростили рассуждения из работы Рудельсона и Вершинина [14] и получили следующий результат.

Предложение 3. Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $Q(\mathcal{L}(X), 2) \leq 1 - p$, где $p > 0$, и пусть $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$. Если для некоторых $D \geq 1/(2\|a\|_\infty)$ и $\alpha > 0$ выполняется условие

$$\|ta - m\| \geq \alpha \quad \text{для всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2\|a\|_\infty}, D\right], \quad (9)$$

то

$$Q\left(F_a, \frac{1}{D}\right) \ll \frac{1}{\|a\|D\sqrt{p}} + \exp(-cp\alpha^2). \quad (10)$$

В теореме 1.1 работы [6] утверждение предложения 3 было сформулировано и доказано в несколько ослабленной форме. Вместо p в правой части неравенства (10) фигурировало p^2 . Однако возможность заменить p^2 на p в результате работы [6] легко следует из элементарных свойств функции концентрации. Это было замечено, например, в [15] (см. предложение 4 ниже).

Кроме того, в работе [6] предполагалось, что $0 < D < 1$, а в левой части неравенства (10) вместо $Q(F_a, 1/D)$ фигурировала величина $Q(F_a, 1)$, которая, вообще говоря, существенно меньше, чем $Q(F_a, 1/D)$ при $0 < D < 1$, поскольку тогда $1/D > 1$. Но если бы авторы [6] воспользовались своим же результатом при $D = 1$, они бы вывели из него неравенство для любого $D > 0$ и с $Q(F_a, 1/D)$ вместо $Q(F_a, 1)$ столь же просто, как мы выведем ниже следствие 1 из теоремы 1.

Заметим также, что при $|t| \leq 1/(2\|a\|_\infty)$ мы имеем

$$\left(\text{dist}(ta, \mathbf{Z}^n)\right)^2 = \sum_{k=1}^n \min_{m_k \in \mathbf{Z}} |ta_k - m_k|^2 = \sum_{k=1}^n |ta_k|^2 = t^2 \|a\|^2, \quad (11)$$

где

$$\text{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) = \min_{m \in \mathbf{Z}^n} \|ta - m\|.$$

Так что предположение о том, что $|t| \geq 1/(2\|a\|_\infty)$ в условии (9), естественно. Из (11) вытекает, что если $D = 1/(2\|a\|_\infty)$, то условие (9) формально выполняется при $\alpha = \|a\|/(2\|a\|_\infty)$. Отсюда также следует, что при $D \geq 1/(2\|a\|_\infty)$ величина α в условии (9) не может быть больше, чем $\|a\|/(2\|a\|_\infty) \leq \sqrt{n}/2$.

Одномерный вариант многомерной теоремы 3.3 из работы [15] формулируется следующим образом.

Предложение 4. *Предположим, что $X, X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, причем $Q(\mathcal{L}(X), 2) \leq 1 - p$, где $p > 0$. Пусть $\alpha, D > 0, \gamma \in (0, 1)$ и $a \in \mathbf{R}^n, a \neq 0$, причем*

$$\|ta - m\| \geq \min\{\gamma t \|a\|, \alpha\} \quad \text{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ и } t \in [0, D]. \quad (12)$$

Тогда

$$Q\left(F_a, \frac{1}{D}\right) \ll \frac{1}{\gamma D \|a\| \sqrt{p}} + \exp(-2p\alpha^2). \quad (13)$$

Утверждение предложения 4 было сформулировано в [15] в ослабленной форме. В теореме 3.3 [15] предполагалось, что $\|a\| \geq 1$, причем в знаменателе дроби в правой части неравенства (13) отсутствовал множитель $\|a\|$. Однако результат предложения 4 легко выводится из утверждения предложения 4 при $\|a\| = 1$. Надо просто применить это утверждение к вектору $b = a/\|a\|$. Кроме того, в формулировке теоремы 3.3 [15] присутствует излишнее предположение о том, что $\mathbf{E} X = 0$.

Ясно, что если

$$0 < D \leq D(a) = D_{\alpha, \gamma}(a) = \inf \left\{ t > 0 : \text{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) \leq \min\{\gamma \|ta\|, \alpha\} \right\}, \quad (14)$$

то условие (12) выполнено. В [15] величина $D(a)$ названа существенным наименьшим общим знаменателем вектора $a \in \mathbf{R}^n$.

В теореме 3.3 [15] вместо неравенства (13) фигурирует его следствие, получаемое из (13) с помощью соотношений (3) и (14).

Сформулируем один из двух основных результатов настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $a \in \mathbf{R}^n, a \neq 0$ и для некоторого $\alpha > 0$ выполнено условие (9) при $D = 1$, т.е.*

$$\|ta - m\| \geq \alpha \quad \text{для всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2\|a\|_\infty}, 1 \right]. \quad (15)$$

Тогда

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\| \sqrt{M(1)}} + \exp\left(-c\alpha^2 M(1)\right),$$

где величина $M(1)$ определена в формуле (1).

Отсюда несложно вывести то, что получается в условиях предложения 3, а именно, имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 с заменой условия (15) на условие (9) с произвольным $D \geq 1/(2\|a\|_\infty)$. Тогда

$$Q\left(F_a, \frac{1}{D}\right) \ll \frac{1}{\|a\|D\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\alpha^2 M(1)).$$

Очевидно, что $M(1) \gg 1 - Q(G, 2) \geq 1 - Q(\mathcal{L}(X), 2) \geq p$ в условиях предложения 3. При этом $M(1)$ может быть существенно больше, чем p . Например, p может быть равно 0, тогда как $M(1) > 0$ для любого невырожденного распределения $F = \mathcal{L}(X)$. Поэтому следствие 1 — существенное усиление предложения 3. Ясно также, что следствие 1 так же соотносится с предложением 3, как неравенство Эссеена (8) с неравенством Колмогорова–Рогозина (7).

Отметим, что формулировки следствия 1 при каждом фиксированном D и при $D = 1$ эквивалентны. Следовательно, эквивалентны формулировки следствия 1 и при всех других D .

Если $D > 1$, то $1/D < 1$, и, пользуясь свойствами функции концентрации, из следствия 1 легко вывести оценку

$$Q(F_a, 1) \ll D \exp(-c\alpha^2 M(1)) + \frac{1}{\|a\|\sqrt{M(1)}}.$$

Приведенные ниже доказательства теоремы 1 и следствия 1 в некотором смысле проще, чем доказательства в работах [6] и [15], так как не включают сложного разбиения множеств интегрирования. Это достигается за счет использования соотношения (6). Новым по сравнению с рассуждениями из [6] и [15] является также использование методов из работы Эссеена [5] (см. доказательство леммы 4 в [12, гл. II]).

Переформулируем теперь следствие 1, применив его к величинам X_k/τ , $\tau > 0$.

Следствие 2. Пусть $V_{a,\tau} = \mathcal{L}(\sum_{k=1}^n a_k X_k/\tau)$. Тогда в условиях следствия 1 справедливо соотношение

$$Q\left(V_{a,\tau}, \frac{1}{D}\right) = Q\left(F_a, \frac{\tau}{D}\right) \ll \frac{1}{\|a\|D\sqrt{M(\tau)}} + \exp(-c\alpha^2 M(\tau)). \quad (16)$$

Выбирая, например, $\tau = D$, получим, что

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\|D\sqrt{M(D)}} + \exp(-c\alpha^2 M(D)).$$

Для доказательства следствия 2 достаточно воспользоваться соотношением (1).

Если рассмотреть частный случай, когда $D = 1/(2\|a\|_\infty)$, то ограничения на арифметические свойства вектора a фактически отсутствуют, и получается оценка

$$Q(F_a, \tau\|a\|_\infty) \ll \frac{\|a\|_\infty}{\|a\|\sqrt{M(\tau)}}. \quad (17)$$

Это в точности то, что дает неравенство Эссеена (8), примененное к сумме неодинаково распределенных случайных величин $Y_k = a_k X_k$ при $\lambda_k = a_k$, $\lambda = \|a\|_\infty$. При $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ неравенство (17) превращается в хорошо известный частный случай предложения 2:

$$Q(F^{*n}, \tau) \ll \frac{1}{\sqrt{nM(\tau)}}. \quad (18)$$

Из (18) следует и неравенство Колмогорова–Рогозина для одинаково распределенных случайных величин:

$$Q(F^{*n}, \tau) \ll \frac{1}{\sqrt{n(1 - Q(F, \tau))}}.$$

Неравенство (17) не может дать оценку лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$, поскольку правая часть (17) не меньше, чем $n^{-1/2}$. Наибольший интерес сформулированные выше результаты имеют, когда D существенно больше, чем $1/(2\|a\|_\infty)$. Тогда можно рассчитывать на получение оценок, которые значительно лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$. Именно такие оценки величины $Q(F_a, \lambda)$ требуются при изучении распределений собственных чисел случайных матриц.

В качестве примера рассмотрим случай, когда координаты вектора a имеют вид $a_k = 1 + kn^{-1}$, $k = 1, \dots, n$ (аналогичный пример приведен в работе [14]). Выбирая $D = n/2$, нетрудно показать, что условие (9) выполнено при $\alpha \gg n^{1/2}$. В этом случае следствие 1 дает оценку порядка $O(n^{-3/2})$, которую невозможно получить с помощью оценки (17).

При $0 < D < 1/(2\|a\|_\infty)$ неравенство

$$Q\left(F_a, \frac{\tau}{D}\right) \ll \frac{1}{\|a\|D\sqrt{M(\tau)}} \quad (19)$$

также справедливо. В этом случае оно вытекает из (3) и (17).

Заметим также, что в следствии 2 величина τ может быть сколь угодно малой. Устремляя τ к нулю, получаем оценку

$$Q(F_a, 0) \ll \frac{1}{\|a\|D\sqrt{\mathbf{P}(\tilde{X} \neq 0)}} + \exp(-c\alpha^2 \mathbf{P}(\tilde{X} \neq 0)).$$

Эту оценку, впрочем, можно вывести из результатов [6] и [15].

Теперь сформулируем уточнения предложения 4, аналогичные теореме 1 и следствиям 1 и 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия предложения 4 при $D = 1$, т.е. $\|ta - m\| \geq \min\{\gamma t\|a\|, \alpha\}$ при всех $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\|\gamma\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\alpha^2 M(1)).$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия предложения 4 при произвольном $D > 0$. Тогда

$$Q\left(F_a, \frac{1}{D}\right) \ll \frac{1}{\|a\|D\gamma\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\alpha^2 M(1)).$$

Теперь переформулируем следствие 3 для величин X_k/τ , $\tau > 0$.

Следствие 4. Пусть $V_{a,\tau} = \mathcal{L}(\sum_{k=1}^n a_k X_k/\tau)$. Тогда в условиях следствия 3 справедливо соотношение

$$Q\left(V_{a,\tau}, \frac{1}{D}\right) = Q\left(F_a, \frac{\tau}{D}\right) \ll \frac{1}{\|a\|D\gamma\sqrt{M(\tau)}} + \exp(-c\alpha^2 M(\tau)).$$

Выбирая, например, $\tau = D$, получим

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\|D\gamma\sqrt{M(D)}} + \exp(-c\alpha^2 M(D)).$$

Для доказательства следствия 4 достаточно воспользоваться соотношением (1).

Заметим, что в работах [6] и [15] приводятся и многомерные варианты соответствующих утверждений. Результаты настоящей работы также могут быть без особых проблем перенесены по аналогии на многомерный случай. Мы не делаем этого в данной статье, чтобы не загромождать текст, намереваясь посвятить многомерному случаю отдельную публикацию.

2. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Представим распределение $G = \mathcal{L}(\tilde{X})$ в виде смеси $G = qE + \sum_{j=0}^{\infty} p_j G_j$, где $q = \mathbf{P}(\tilde{X} = 0)$, $p_j = \mathbf{P}(\tilde{X} \in A_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $A_0 = \{x: |x| > 1\}$, $A_j = \{x: 2^{-j} < |x| \leq 2^{-j+1}\}$, E — вероятностная мера, сосредоточенная в нуле, G_j — вероятностные меры, определяемые при $p_j > 0$ формулами $G_j\{X\} = (1/p_j) G\{X \cap A_j\}$ для любого борелевского множества X . Если $p_j = 0$, то в качестве G_j можно брать произвольную меру.

При $z \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$ введем безгранично делимое распределение $H_{z,\gamma}$ с характеристической функцией

$$\hat{H}_{z,\gamma}(t) = \exp \left(-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n (1 - \cos(2a_k z t)) \right).$$

Разумеется, $H_{z,\gamma}$ зависит также от a , но мы считаем a фиксированным. Это симметричное безгранично делимое распределение, поэтому его характеристическая функция всюду положительна.

Так как для любой характеристической функции $\hat{F}(t)$ случайной величины X справедливо равенство $|\hat{F}(t)|^2 = \mathbf{E} \exp(it\tilde{X}) = \mathbf{E} \cos(t\tilde{X})$, где $\tilde{X}$ — соответствующая симметризованная случайная величина, то

$$|\hat{F}(t)| \leq \exp \left(-\frac{1}{2} (1 - |\hat{F}(t)|^2) \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{E} (1 - \cos(t\tilde{X})) \right). \quad (20)$$

В силу неравенств (4) и (20), имеем

$$Q(F_a, 1) \ll \int_0^1 |\hat{F}_a(t)| dt \ll \int_0^1 \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} (1 - \cos(2a_k t \tilde{X})) \right) dt = I.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} (1 - \cos(2a_k t \tilde{X})) &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(2a_k t x)) G\{dx\} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(2a_k t x)) p_j G_j\{dx\} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(2a_k t x)) p_j G_j\{dx\}. \end{aligned}$$

Введем обозначения $\beta_j = 2^{-2j} p_j$, $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$, $\mu_j = \beta_j / \beta$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что тогда $\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j = 1$ и $p_j / \mu_j = 2^{2j} \beta$ (при $p_j > 0$).

Теперь поступим так же, как при доказательстве леммы 4 в [12, гл. II], принадлежащей Эссеену [5]. С помощью неравенства Гёльдера нетрудно показать, что $I \leq \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j}$, где $I_j = 1$ при $p_j = 0$. А если $p_j > 0$, то

$$\begin{aligned} I_j &= \int_0^1 \exp \left(-\frac{p_j}{2\mu_j} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(2a_k t x)) G_j\{dx\} \right) dt \\ &= \int_0^1 \exp \left(-2^{2j-1} \beta \sum_{k=1}^n \int_{A_j} (1 - \cos(2a_k t x)) G_j\{dx\} \right) dt. \end{aligned}$$

Применяя к экспоненте под знаком интеграла неравенство Йенсена (см. [12, с. 49]), получаем

$$I_j \leq \int_0^1 \int_{A_j} \exp \left(-2^{2j-1} \beta \sum_{k=1}^n (1 - \cos(2a_k t x)) \right) G_j\{dx\} dt$$

$$= \int_{A_j} \int_0^1 \exp \left(-2^{2j-1} \beta \sum_{k=1}^n (1 - \cos(2a_k t x)) \right) dt G_j\{dx\} \leq \sup_{z \in A_j} \int_0^1 \hat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t) dt.$$

Оценим теперь характеристическую функцию $\hat{H}_{\pi,1}(t)$ при $|t| \leq 1$. Очевидно, что существует c такое, что $1 - \cos x \geq cx^2$ при $|x| \leq \pi$. Поэтому при $|t| \leq 1/(2\|a\|_\infty)$

$$\hat{H}_{\pi,1}(t) \leq \exp(-c\|a\|^2 t^2). \quad (21)$$

При $1/(2\|a\|_\infty) \leq |t| \leq 1$ можно действовать так же, как авторы [6] и [15], а именно: учитывая, что $1 - \cos t \geq c \min_{m \in \mathbf{Z}} |t - 2\pi m|^2$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\pi,1}(t) &\leq \exp \left(-c \sum_{k=1}^n \min_{m_k \in \mathbf{Z}} |2\pi t a_k - 2\pi m_k|^2 \right) \\ &= \exp \left(-c \sum_{k=1}^n \min_{m_k \in \mathbf{Z}} |t a_k - m_k|^2 \right) \leq \exp(-c\alpha^2) \end{aligned} \quad (22)$$

при $|t| \in [1/(2\|a\|_\infty), 1]$.

Воспользуемся теперь неравенствами (21) и (22), чтобы оценить интегралы I_j . Рассмотрим сначала случай $j = 1, 2, \dots$. Заметим, что характеристическая функция $\hat{H}_{z,\gamma}(t)$ обладает свойствами

$$\hat{H}_{z,\gamma}(t) = \hat{H}_{y,\gamma}\left(\frac{zt}{y}\right) \quad \text{и} \quad \hat{H}_{z,\gamma}(t) = \hat{H}_{z,1}^\gamma(t). \quad (23)$$

При $z \in A_j$ мы имеем $2^{-j} < |z| \leq 2^{-j+1} < \pi$. Следовательно, при $|t| \leq 1$ мы имеем $|zt/\pi| < 1$. Так что из свойств (23) при $y = \pi$ и полученных выше оценок (21) и (22) вытекает, что при $z \in A_j$

$$\hat{H}_{z,1}(t) \leq \max \left\{ \exp \left(-c \left(\frac{zt\|a\|}{\pi} \right)^2 \right), \exp(-c\alpha^2) \right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{z \in A_j} \int_0^1 \hat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t) dt &\leq \int_0^1 \exp(-ct^2\beta\|a\|^2) dt + \int_0^1 \exp(-2^{2j}c\alpha^2\beta) dt \\ &\ll \frac{1}{\sqrt{\beta}\|a\|} + \exp(-c\alpha^2\beta). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $j = 0$. Из свойств (23) следует, что при $z > 0$, $\gamma > 0$

$$Q(H_{z,\gamma}, 1) = Q\left(H_{1,\gamma}, \frac{1}{z}\right). \quad (24)$$

Таким образом, учитывая соотношения (2), (6), (23) и (24), находим, что

$$\begin{aligned} \sup_{z \in A_0} \int_0^1 \hat{H}_{z,1}^\beta(t) dt &= \sup_{z \geq 1} \int_0^1 \hat{H}_{z,\beta}(t) dt \asymp \sup_{z \geq 1} Q(H_{z,\beta}, 1) \\ &= \sup_{z \geq 1} Q\left(H_{1,\beta}, \frac{1}{z}\right) \leq Q(H_{1,\beta}, 1) \ll Q\left(H_{1,\beta}, \frac{1}{\pi}\right) \\ &= Q(H_{\pi,\beta}, 1) \asymp \int_0^1 \hat{H}_{\pi,\beta}(t) dt = \int_0^1 \hat{H}_{\pi,1}^\beta(t) dt. \end{aligned}$$

Пользуясь снова оценками (21) и (22) для характеристической функции $\hat{H}_{\pi,1}(t)$, получим:

$$\int_0^1 \hat{H}_{\pi,1}^\beta(t) dt \leq \int_0^1 \exp(-c\|a\|^2 \beta t^2) dt + \int_0^1 \exp(-c\alpha^2 \beta) dt \ll \frac{1}{\|a\|\sqrt{\beta}} + \exp(-c\alpha^2 \beta).$$

Мы оценили одинаково все интегралы I_j при $p_j \neq 0$. Учитывая соотношение $\sum_{j=0}^\infty \mu_j = 1$, получаем, что

$$I \leq \prod_{j=0}^\infty I_j^{\mu_j} \ll \frac{1}{\|a\|\sqrt{\beta}} + \exp(-c\alpha^2 \beta).$$

Оценим теперь величину β :

$$\begin{aligned} \beta = \sum_{j=0}^\infty \beta_j &= \sum_{j=0}^\infty 2^{-2j} p_j = \mathbf{P}(|\tilde{X}| > 1) + \sum_{j=1}^\infty 2^{-2j} \mathbf{P}(2^{-j} < |\tilde{X}| \leq 2^{-j+1}) \\ &\geq \int_{|x|>1} G\{dx\} + \sum_{j=1}^\infty \int_{2^{-j} < |x| \leq 2^{-j+1}} \frac{x^2}{4} G\{dx\} \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{|x|>1} G\{dx\} + \frac{1}{4} \int_{|x|\leq 1} x^2 G\{dx\} = \frac{1}{4} M(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\beta \geq \frac{1}{4} M(1). \quad (25)$$

Значит,

$$\frac{1}{\|a\|\sqrt{\beta}} + \exp(-c\alpha^2 \beta) \ll \frac{1}{\|a\|\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\alpha^2 M(1)),$$

что и требовалось доказать.

Выведем теперь следствие 1 из теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 1. Обозначим $b = Da \in \mathbf{R}^n$. Тогда справедливо равенство $Q(F_a, 1/D) = Q(F_b, 1)$. Для вектора b выполнены те же условия, которые предполагались для вектора a в теореме 1. Действительно, $\|ub - m\| \geq \alpha$ при $u \in [1/(2\|b\|_\infty), 1]$. Это следует из условия (9) следствия 1, если обозначить $u = t/D$. Остается применить теорему 1 к вектору b .

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Мы будем действовать аналогично доказательству теоремы 1. Используя обозначения теоремы 1, напомним, что

$$Q(F_a, 1) \ll \prod_{j=0}^\infty \sup_{z \in A_j} \int_0^1 \hat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t) dt \leq \prod_{j=0}^\infty \sup_{z \in A_j} \int_0^1 \hat{H}_{\pi,1}^{2^{2j}\beta}\left(\frac{zt}{\pi}\right) dt.$$

Но из условий теоремы 2 вытекает, что

$$\hat{H}_{\pi,1}(t) \leq \exp\left(-c \sum_{k=1}^n \min_{m_k \in \mathbf{Z}} |2\pi t a_k - 2\pi m_k|^2\right) \leq \exp(-c\alpha^2) + \exp(-ct^2 \gamma^2 \|a\|^2)$$

при всех $t \in [0, 1]$. Следовательно,

$$Q(F_a, 1) \ll \int_0^1 \exp(-ct^2 \gamma^2 \beta \|a\|^2) dt + \int_0^1 \exp(-c\alpha^2 \beta) dt \ll \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\|a\|} + \exp(-c\alpha^2 \beta).$$

Воспользуемся теперь оценкой (25) для величины β из доказательства теоремы 1, согласно которой $\beta \geq M(1)/4$. Тогда

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\| \gamma \sqrt{M(1)}} + \exp(-c\alpha^2 M(1)),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство следствия 3 аналогично доказательству следствия 1. Обозначим $b = Da \in \mathbf{R}^n$ и $u = t/D$. Тогда $\|ub - m\| = \|ta - m\| \geq \min\{\gamma t\|a\|, \alpha\}$ при всех $m \in \mathbf{Z}^n$ и $t \in [0, 1]$, т.е. для b выполнены те же условия, которые предполагались для a в теореме 2. Остается заметить, что $Q(F_a, 1/D) = Q(F_b, 1)$, и применить теорему 2 к вектору b .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арак Т. В. О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 2, с. 225–245.
2. Арак Т. В., Зайцев А. Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Тр. МИАН, 1986, т. 174, с. 214.
3. Bretagnolle J. Sur l'inégalité de concentration de Doeblin–Lévy, Rogozin–Kesten. — Parametric and Semiparametric Models with Applications to Reliability, Survival Analysis, and Quality of Life. Boston: Birkhäuser, 2004, p. 533–551.
4. Esséen C.-G. On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1966, v. 5, p. 210–216.
5. Esséen C.-G. On the concentration function of a sum of independent random variables. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1968, v. 9, p. 290–308.
6. Friedland O., Sodin S. Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation. — C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2007, v. 345, № 9, p. 513–518.
7. Хенгартнер В., Теодореску Р. Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 176 с.
8. Kesten H. A sharper form of the Doeblin–Lévy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions. — Math. Scand., 1969, v. 25, p. 133–144.
9. Мирошников А. Л., Rogozin Б. А. Неравенства для функции концентрации. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 1, с. 178–183.
10. Нагаев С. В., Ходжабагян С. С. Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 655–665.
11. Nguyen Hoi, Vu Van. Optimal inverse Littlewood–Offord theorems. — Adv. Math., 2011, v. 226, № 6, p. 5298–5319.
12. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
13. Rogozin Б. А. Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 1, с. 106–108.
14. Rudelson M., Vershynin R. The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices. — Adv. Math., 2008, v. 218, № 2, p. 600–633.
15. Rudelson M., Vershynin R. Smallest singular value of a random rectangular matrix. — Comm. Pure Appl. Math., 2009, v. 62, № 12, p. 1707–1739.
16. Tao T., Vu Van. Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices. — Ann. of Math., 2009, v. 169, № 2, p. 595–632.
17. Tao T., Vu Van. From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices. — Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 2009, v. 46, № 3, p. 377–396.

Поступила в редакцию
26.11.2012