Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, А. А. Муравлёв, О задаче Чернова проверки гипотез о значении сноса броуновского движения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 778–788

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:35:44

© 2012 г.

ЖИТЛУХИН М. В.*, МУРАВЛЁВ А. А.*

О ЗАДАЧЕ ЧЕРНОВА ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ЗНАЧЕНИИ СНОСА БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ¹⁾

Работа содержит подробное изложение результатов, представленных в кратком сообщении [9]. Рассматривается задача Чернова последовательной проверки гипотез о положительности или отрицательности сноса броуновского движения в предположении, что он имеет нормальное распределение. Выводится интегральное уравнение, характеризующее оптимальное решающее правило, и численно находится его решение. Полученный результат дополняет результаты работ [1]–[4].

Ключевые слова и фразы: задача Чернова, последовательная проверка гипотез, задачи об оптимальной остановке, интегральные уравнения.

1. Введение. В настоящей работе мы рассмотрим задачу последовательной проверки гипотез о положительности или отрицательности сноса броуновского движения в предположении, что он имеет нормальное распределение. Данная задача была сформулирована и изучена Г. Черновым и Дж. Бриквелом в работах [1]–[4].

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ заданы стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t \geq 0}$ и нормальная случайная величина $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ с известными параметрами $\mu_0 \in \mathbf{R}$ и $\sigma_0 > 0$, независимая от B . Предполагается, что μ непосредственно не наблюдаема, а наблюдению подлежит процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$:

$$X_t = \mu t + B_t, \quad t \geq 0.$$

Рассматриваемая задача заключается в проверке гипотез $H_1: \mu > 0$ и $H_2: \mu \leq 0$ по результатам последовательного наблюдения за X .

Каждая последовательная процедура проверки гипотез H_1 и H_2 формально задается *решающим правилом* (τ, d) , состоящим из момента остановки τ , согласованного с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$, и $\mathcal{F}_\tau$ -измеримой функции d , принимающей значения ± 1 . Момент τ является моментом прекращения наблюдения, а значение d соответствует принимаемой гипотезе в момент τ .

Согласно критерию Г. Чернова, решающее правило считается *оптимальным*, если оно минимизирует среднюю величину штрафа, определяемую по формуле

$$R(\tau, d) = \mathbf{E}[c\tau + k|\mu| \mathbf{I}\{d \neq \text{sgn}(\mu)\}],$$

где $c, k > 0$ — фиксированные константы и $\text{sgn}(0) = -1$. Первое слагаемое представляет собой плату за наблюдение (пропорциональную времени наблюдения), а второе слагаемое — штраф за неверное решение (пропорциональный абсолютному значению μ).

В работах [2], [3] была исследована асимптотика оптимального решающего правила при $\sigma_0 \rightarrow 0$ и $\sigma_0 \rightarrow \infty$. Однако точное решающее правило найдено не было. В настоящей работе мы докажем, что в оптимальном решающем правиле (τ^*, d^*)

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: mikhailzh@mi.ras.ru; almurav@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании МФТИ (грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0073), РФФИ (грант № 12-01-31449-мол_а) и Министерства образования и науки РФ (дог. 14.740.11.1144).

момент τ^* является моментом первого выхода некоторого случайного процесса (получающегося простым преобразованием из X) на определенную границу, а значение функции d^* определяется по значению X_{τ^*} . Будет получено интегральное уравнение, характеризующее оптимальную границу останова, что даст возможность найти оптимальное решающее правило численно.

2. Основная теорема.

2.1. Далее без ограничения общности будем считать, что $c = k = 1$ (иначе можно сделать замену координат; см. [1]). Зафиксируем параметры (μ_0, σ_0^2) и введем процесс $W = (W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ формулой

$$W_t = \sigma_0(1-t)X_{t/(\sigma_0^2(1-t))} - t \frac{\mu_0}{\sigma_0} \quad (1)$$

(W_1 определяется как предел W_t при $t \rightarrow 1$). Несложно проверить, что W является непрерывным гауссовским процессом с независимыми приращениями, $\mathbf{E} W_t = 0$, $\mathbf{E} W_t^2 = t$ и $W_0 = 0$. Таким образом, W является *стандартным броуновским движением* (винеровским процессом).

Мы покажем, что оптимальное решающее правило в задаче различения гипотез H_1 и H_2 может быть найдено путем решения задачи об оптимальной остановке для процесса W (см. теорему ниже):

$$V_{\mu_0, \sigma_0} = \inf_{\tau \leq 1} \mathbf{E} \left[\frac{2}{\sigma_0^3(1-\tau)} - \left| W_\tau + \frac{\mu_0}{\sigma_0} \right| \right], \quad (2)$$

где инфимум берется по всем моментам останова $\tau \leq 1$ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^W)_{t \leq 1}$, $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s; s \leq t)$. Под решением понимается момент останова, на котором достигается инфимум.

Для краткости дальнейших обозначений введем функцию

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{|x|}{t} \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

где $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ и $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ — стандартные нормальные плотность и функция распределения.

Теорема 1. 1) Пусть момент останова τ_W^* является решением задачи (2). Тогда оптимальное решающее правило (τ^*, d^*) в задаче различения гипотез H_1 и H_2 имеет вид

$$\tau^* = \frac{\tau_W^*}{\sigma_0^2(1-\tau_W^*)}, \quad d^* = \operatorname{sgn} \left(X_{\tau^*} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2} \right). \quad (4)$$

2) Момент $\tau_W^* = \tau_W^*(\mu_0, \sigma_0)$ имеет вид

$$\tau_W^*(\mu_0, \sigma_0) = \inf \left\{ 0 \leq t \leq 1: \left| W_t + \frac{\mu_0}{\sigma_0} \right| \geq a_{\sigma_0}(t) \right\},$$

где $a_{\sigma_0}(t): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$ — невозрастающая функция на $[0, 1]$, являющаяся единственным решением интегрального уравнения

$$\frac{G(1-t, a(t))}{1-t} = \int_t^1 \frac{2}{\sigma_0^3(1-s)^2} \left[\Phi\left(\frac{a(s)-a(t)}{\sqrt{s-t}}\right) - \Phi\left(\frac{-a(s)-a(t)}{\sqrt{s-t}}\right) \right] ds, \quad (5)$$

в классе непрерывных функций $a(t)$, удовлетворяющих условиям

$$a(t) > 0 \quad \text{при } t < 1, \quad a(1) = 0 \quad (6)$$

и условию

$$\int_t^1 \frac{1}{(1-s)^2} \left[\Phi\left(\frac{a(s)-x}{\sqrt{s-t}}\right) - \Phi\left(\frac{-a(s)-x}{\sqrt{s-t}}\right) \right] ds < \infty \quad (7)$$

для всех $t \in [0, 1)$, $x \in \mathbf{R}$.

2.2. Отметим, что в работе [1] задача различения H_1 и H_2 сводится к задаче об оптимальной остановке для другого процесса. А именно, вводится процесс $X' = (X'_t)_{t \geq 1/\sigma_0^2}$, $X'_t = X_{t-1/\sigma_0^2} + \mu_0/\sigma_0^2$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX'_t = \frac{X'_t}{t} dt + d\bar{B}'_t, \quad t \geq \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad (8)$$

с некоторым броуновским движением $\bar{B}'$.

В работе [1] доказывается, что оптимальное решающее правило может быть найдено посредством решения задачи об оптимальной остановке

$$V'(t, x) = \inf_{\tau \geq t} \mathbf{E}_{t,x}[\tau - G(\tau, X'_\tau)], \quad t = \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad x = \frac{\mu}{\sigma_0^2}, \quad (9)$$

где $\mathbf{E}_{t,x}$ обозначает математическое ожидание в предположении, что процесс $X' = (X'_s)_{s \geq t}$ задается уравнением (8) с начальным условием $X'_t = x$; инфимум берется по всем моментам остановки $\tau \geq t$ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_s^{X'})_{s \geq t}$, $\mathcal{F}_s^{X'} = \sigma(X'_u; t \leq u \leq s)$. Если τ^* — оптимальный момент остановки в задаче (9) для $t = 1/\sigma_0^2$, $x = \mu/\sigma_0^2$, то $(\tau^* - 1/\sigma_0^2, \text{sgn}(X'_{\tau^*}))$ является оптимальным решающим правилом для данных значений μ_0 и σ_0^2 .

Далее в [1] устанавливается, что оптимальный момент остановки в (9) имеет вид

$$\tau^*(t, x) = \inf\{s \geq t: |X'_s| \geq b(s)\},$$

где $b(s): \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ — некоторая функция, строго положительная при $t > 0$ (оптимальная граница остановки). Отметим, что эта функция не зависит от параметров μ_0, σ_0 .

Как непосредственно следует из конструкции процессов W и X' , оптимальные границы остановки в задачах (2) и (9) связаны равенством

$$b(t) = \sigma_0 t \cdot a_{\sigma_0} \left(1 - \frac{1}{\sigma_0^2 t}\right), \quad t \geq \frac{1}{\sigma_0^2}.$$

Таким образом, зная семейство $\{a_{\sigma_0}(\cdot)\}_{\sigma_0 > 0}$, можно найти $b(\cdot)$, и наоборот.

В работах [2], [3] была исследована асимптотика границы остановки $b(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$ (что эквивалентно $\sigma_0 \rightarrow 0$ и $\sigma_0 \rightarrow \infty$). С помощью же теоремы, доказываемой в настоящей работе, можно получить (по крайней мере численно) явный вид границ остановки. Таким образом, настоящая работа дополняет уже имеющиеся в литературе результаты.

2.3. Для численного нахождения решения уравнения (5) можно воспользоваться «методом обратной индукции». Пусть $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ — разбиение отрезка $[0, 1]$. Согласно (6), имеем $a(t_n) = 0$. Зная значения $a(t_k), a(t_{k+1}), \dots, a(t_n)$ и приближенно вычисляя интеграл (5) для $t = t_{k-1}$ по значениям подынтегральной функции в точках $t_{k-1}, t_k, \dots, t_n$, получим уравнение, из которого находится $a(t_{k-1})$. Повторяя данную процедуру, можно найти все значения $a(t_0), \dots, a(t_n)$.

В качестве примера на рис. 1 слева приведен график оптимальной границы остановки $\alpha_{\sigma_0}(t)$ для процесса W при $\sigma_0 = \sqrt{2}$; справа приведен график оптимальной границы $b(t)$ для процесса X' .

Рис. 1. Слева: оптимальная границы останова $a_{\sigma_0}(t)$; справа: оптимальная граница останова $b(t)$.

3. Доказательство теоремы.

3.1. Для доказательства теоремы воспользуемся стандартной схемой, используемой для подобных утверждений (см., например, [7]). Приводимое здесь доказательство во многом повторяет аналогичные рассуждения работы [10].

Сразу отметим, что, очевидно, оптимальное решающее правило следует искать среди правил (τ, d) , для которых $\mathbf{E}\tau < \infty$. Поэтому далее будем рассматривать только такие решающие правила.

Для любого решающего правила (τ, d) справедливо равенство

$$R(\tau, d) = \mathbf{E} \left[\tau + \mathbf{E}(\mu^- | \mathcal{F}_\tau) \mathbf{I}\{d = +1\} + \mathbf{E}(\mu^+ | \mathcal{F}_\tau) \mathbf{I}\{d = -1\} \right],$$

где $\mu^+ = \max\{\mu, 0\}$, $\mu^- = \max\{-\mu, 0\}$. Отсюда ясно, что для нахождения оптимального решающего правила (τ^*, d^*) достаточно найти момент останова τ^* , минимизирующий (в классе моментов останова, согласованных с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) математическое ожидание

$$\mathcal{E}(\tau) = \mathbf{E} \left[\tau + \min\{\mathbf{E}(\mu^- | \mathcal{F}_\tau), \mathbf{E}(\mu^+ | \mathcal{F}_\tau)\} \right],$$

и задать функцию d^* формулой

$$d^* = \begin{cases} +1, & \mathbf{E}(\mu^- | \mathcal{F}_{\tau^*}) \leq \mathbf{E}(\mu^+ | \mathcal{F}_{\tau^*}), \\ -1, & \mathbf{E}(\mu^- | \mathcal{F}_{\tau^*}) > \mathbf{E}(\mu^+ | \mathcal{F}_{\tau^*}). \end{cases} \quad (10)$$

Воспользовавшись нормальностью условного распределения μ :

$$\text{Law}(\mu | \mathcal{F}_t) = \mathcal{N} \left(\frac{X_t + \mu_0/\sigma_0^2}{t + 1/\sigma_0^2}, \frac{1}{t + 1/\sigma_0^2} \right) \quad (11)$$

(см. [1]), получаем, что для любого момента останова τ

$$\mathcal{E}(\tau) = \mathbf{E} \left[\tau + G \left(\tau + \frac{1}{\sigma_0^2}, X_\tau + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2} \right) \right],$$

где функция $G(t, x)$ задается формулой (3).

Из обновляющего представления для процесса X (см., например, [11, § 7.4]) следует, что процесс $\bar{B}_t = X_t - \int_0^t \mathbf{E}(\mu | \mathcal{F}_s) ds$ является стандартным броуновским движением ($\bar{B}'$ из формулы (8) связано с $\bar{B}$ соотношением $\bar{B}'_t = \bar{B}_{t-1/\sigma_0^2}$). Используя тот факт, что $\mathbf{E}(\mu | \mathcal{F}_t) = (X_t + \mu_0/\sigma_0^2)/(t + 1/\sigma_0^2)$ согласно (11), находим, что X удовлетворяет уравнению

$$dX_t = \frac{X_t + \mu_0/\sigma_0^2}{t + 1/\sigma_0^2} dt + d\bar{B}_t.$$

Заметим, что функция $G(t, x) + |x|/(2t)$ принадлежит классу $\mathcal{C}^{1,2}((0, \infty) \times \mathbf{R})$. С помощью непосредственного применения формулы Ито убеждаемся в справедливости выражения

$$\begin{aligned} G\left(t + \frac{1}{\sigma_0^2}, X_t + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) &= G\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) + \frac{|\mu_0|}{2} - \frac{|X_t + \mu_0/\sigma_0^2|}{2(t + 1/\sigma_0^2)} \\ &\quad + \int_0^t \frac{2\Phi(|X_s + \mu_0/\sigma_0^2|/\sqrt{s + 1/\sigma_0^2}) - 1}{2(s + 1/\sigma_0^2)} d\bar{B}_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда для любого момента остановки τ такого, что $\mathbf{E} \tau < \infty$, имеем

$$\mathcal{E}(\tau) = \mathbf{E} \left[\tau - \frac{|X_\tau + \mu_0/\sigma_0^2|}{2(\tau + 1/\sigma_0^2)} \right] + G\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) + \frac{|\mu_0|}{2},$$

где мы воспользовались тем, что подынтегральная функция стохастического интеграла в формуле (12) ограничена и, следовательно, его математическое ожидание равно 0, так как $\mathbf{E} \tau < \infty$.

Непосредственно проверяется, что процесс $M = (M_t)_{t \geq 0}$, задаваемый формулой

$$M_t = \frac{X_t + \mu_0/\sigma_0^2}{\sigma_0(t + 1/\sigma_0^2)} - \frac{\mu_0}{\sigma_0},$$

является мартингалом с нулевым средним, и с помощью замены времени его можно преобразовать к броуновскому движению. А именно, процесс $W = (W_t)_{t \leq 1}$,

$$W_t = M_{t/(\sigma_0^2(1-t))},$$

является стандартным броуновским движением (данная формула связана с (1) простым преобразованием). Тогда

$$\mathcal{E}(\tau) = \frac{\sigma_0}{2} \mathbf{E} \left[\frac{2}{\sigma_0^3(1-\tau_W)} - \left| W_{\tau_W} + \frac{\mu_0}{\sigma_0} \right| \right] + G\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) + \frac{|\mu_0|}{2} - \frac{1}{\sigma_0^2},$$

где τ_W — момент остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^W)_{t \leq 1}$, $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s; s \leq t)$, задаваемый формулой

$$\tau_W = \frac{\sigma_0^2 \tau}{1 + \sigma_0^2 \tau}. \quad (13)$$

Таким образом, для нахождения оптимального решающего правила (τ^*, d^*) в задаче различения гипотез H_1 и H_2 достаточно найти решение τ_W^* задачи об оптимальной остановке (2) и определить τ^* и d^* по формулам (4) (выражение для τ^* следует непосредственно из (13), а выражение для d^* следует из (10) после вычисления условных математических ожиданий).

3.2. Чтобы найти решение задачи (2), положим для краткости $c = 2/\sigma_0^3$ и введем функцию цены, позволяя двумерному процессу (t, W_t) начинаться из любой точки $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}$:

$$V(t, x) = \inf_{\tau_W \leq 1-t} \mathbf{E} \left[\frac{c}{1 - (\tau_W + t)} - |W_{\tau_W} + x| \right] - \frac{c}{1-t}, \quad (14)$$

где мы полагаем $V(1, x) = 0$ для всех x . Ясно, что $V_{\mu_0, \sigma_0} = V(0, \mu_0/\sigma_0) + c$.

Далее для краткости будем вместо τ_W писать просто τ , поскольку это не приведет к недоразумению.

С помощью общего метода теории оптимальной остановки (см., например, [7, гл. I]) устанавливается, что фазовое пространство $[0, 1] \times \mathbf{R}$ разбивается на *множество остановки* D и *множество продолжения наблюдения* C :

$$D = \{(t, x): V(t, x) = -|x|\}, \quad C = \{(t, x): V(t, x) < -|x|\}$$

(здесь $-|x|$ является выигрышем от мгновенной остановки). При этом инфимум в (14) достигается на моменте первого попадания рассматриваемого процесса в множество D :

$$\tau^*(t, x) = \inf\{s \leq 1-t: (s+t, W_s+x) \in D\}.$$

Ясно, что каждое из множеств D и C симметрично относительно прямой $x = 0$. Доказывается, что функция $V(t, x)$ непрерывна (см. п. 4.1), и, следовательно, множество D замкнуто.

Несложно заметить, что функция $V(t, x) + |x|$ не убывает по t и $x \geq 0$, так как для любого момента остановки τ

$$\begin{aligned} \frac{c}{1 - (\tau + t)} - \frac{c}{1-t} &\leq \frac{c}{1 - (\tau + t')} - \frac{c}{1-t'} && \text{для любых } t \leq t', \\ |x| - |W_\tau + x| &\leq |x'| - |W_\tau + x'| && \text{для любых } 0 \leq x \leq x', \end{aligned}$$

причем если $t \leq t'$, то инфимум в (14) для t берется по большему классу моментов остановки, чем для t' .

Кроме того, $V(t, 0) < 0$ для всех $t < 1$, так как $\mathbf{E}|W_s| \sim \sqrt{s}$ и, следовательно, в (14) можно положить $\tau_W = \tau \equiv s$ для такого малого s , что $\mathbf{E}|W_s| > c(1 - (s+t))^{-1} - c(1-t)^{-1}$.

Отсюда следует, что множество C представимо в виде

$$C = \{(t, x): t \in [0, 1], |x| < a(t)\},$$

где $a(t): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$ — некоторая невозрастающая функция на $[0, 1]$ и $a(t) > 0$ при $t < 1$ (отметим, что функция $a(t)$ зависит от c , или, что эквивалентно, от σ).

Покажем, что $a(t)$ непрерывна на $[0, 1]$. Так как $a(t)$ не возрастает и множество остановки D замкнуто, то $a(t)$ непрерывна справа. Докажем непрерывность слева. Заметим, что, поскольку $\mathbf{E}W_{\tau^*} = 0$, справедлива формула

$$V(t, x) = \mathbf{E} \left[\frac{c}{1 - (\tau^* + t)} + W_{\tau^*} - |W_{\tau^*} + x| \right] - \frac{c}{1-t}, \quad (15)$$

где $\tau^* = \tau^*(t, x)$.

Предположим, что $a(t-) > a(t)$ для некоторого $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значения функции (15) в точках $(t - \varepsilon, x)$ для $x = (a(t-) + a(t))/2$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Обозначим $A_\varepsilon = \{\omega: W_s(\omega) + x \in [a(t), a(t-)], s \leq \varepsilon\}$ и $r_\varepsilon = c(1-t)^{-1} - c(1-(t-\varepsilon))^{-1}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} V(t-\varepsilon, x) &\stackrel{(a)}{\geq} \mathbf{E}[(r_\varepsilon - x)\mathbf{I}(A_\varepsilon)] + \mathbf{E}\left[\left(W_{\tau^*} - |W_{\tau^*} + x|\right)\mathbf{I}(\Omega \setminus A_\varepsilon)\right] \\ &\stackrel{(b)}{\geq} r_\varepsilon - x - \mathbf{P}(\Omega \setminus A_\varepsilon) \left(r_\varepsilon - x + \sqrt{\mathbf{E}(W_{\tau^*} - |W_{\tau^*} + x|)^2}\right). \end{aligned}$$

В (а) для того, чтобы получить первое слагаемое, мы воспользовались тем, что $\tau^*(\omega) = t$ и $W_{\tau^*} - |W_{\tau^*} + x| = -x$ на множестве A_ε , а чтобы получить второе — неравенством $c(1-(\tau^*+t))^{-1} - c(1-t)^{-1} \geq 0$. В (b) мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского–Шварца для $\mathbf{E}[(W_{\tau^*} - |W_{\tau^*} + x|)\mathbf{I}(\Omega \setminus A_\varepsilon)]$.

Согласно неравенству Дуба,

$$\mathbf{P}(\Omega \setminus A_\varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{(a(t-)-a(t))^2}{8\varepsilon}\right).$$

Так как $r_\varepsilon = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то найдется такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что $V(t-\varepsilon, x) > -x$, что противоречит тому, что $(t-\varepsilon, x) \in C$. Это доказывает непрерывность границы $a(t)$.

С помощью аналогичных рассуждений доказывается, что $a(1) = 0$. Отсюда и из непрерывности следует, в частности, что $a(t)$ конечно для всех $t \in [0, 1]$.

Покажем, как получить уравнение (5). Пусть $\mathcal{L}$ обозначает инфинитезимальный оператор двумерного процесса (t, W_t) :

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Следуя общим методам теории оптимальной остановки (см. [7, §§ 7–9]), доказываем, что

$$V(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}(C) \cup \mathcal{C}^{1,2}(D^0), \quad (16)$$

$$\mathcal{L}V(t, x) = -c(1-t)^{-2}, \quad (t, x) \in C, \quad (17)$$

$$V(t, x) = -|x|, \quad (t, x) \in D, \quad (18)$$

$$V'_{x+}(t, \pm a(t)) = V'_{x-}(t, \pm a(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (19)$$

где D^0 обозначает внутренность множества D .

Свойства (16)–(18) следуют из *марковского* характера задачи (см. [7, § 7]) и определения множества D . Свойство (19) является *принципом гладкого склеивания* (см. п. 4.2), из него следует равенство $V'_x(t, \pm a(t)) \equiv \mp 1$, поскольку $V'_{x\pm}(t, \pm a(t)) = G'_x(t, \pm a(t)) = \mp 1$. Кроме того, так как математическое ожидание $\mathbf{E}[\cdot]$ под знаком $\inf$ в (14) есть вогнутая функция от x , то

$$\text{функция } x \mapsto V(t, x) \text{ вогнута, } t \in [0, 1].$$

Итак, в рассматриваемой задаче выполнены следующие свойства: (а) функция $V(t, x)$ входит в $\mathcal{C}^{1,2}(C) \cup \mathcal{C}^{1,2}(D^0)$ и непрерывна на $[0, 1] \times \mathbf{R}_+$, функция $a(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию; (b) $\mathcal{L}V(t, x)$ локально ограничено на C и на D^0 (следует из (17)–(18)); (c) $x \mapsto V(t, x)$ является вогнутой функцией для каждого $t \in [0, 1]$; (d) $V'_x(t, \pm a(t)) = \mp 1$ для $t \in [0, 1]$. Это позволяет применить к $V(t, x)$ формулу Ито с локальным временем на кривых [5]:

$$\mathbf{E}V(1, W_{1-t} + x) = V(t, x) + \mathbf{E} \int_t^1 \mathcal{L}V(s, W_{s-t} + x) \mathbf{I}\{W_{s-t} + x \neq \pm a(s)\} ds$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{E} \int_t^1 V'_x(s, W_{s-t} + x) \mathbf{I}\{W_{s-t} + x \neq \pm a(s)\} dW_{s-t} \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{E} \int_t^1 \Delta V'_x(s, a(s)) \mathbf{I}\{W_{s-t} + x = a(s)\} dL_{s-t}^{a(\cdot)} \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{E} \int_t^1 \Delta V'_x(s, -a(s)) \mathbf{I}\{W_{s-t} + x = -a(s)\} dL_{s-t}^{-a(\cdot)}, \quad (20)
\end{aligned}$$

где $L^{\pm a(\cdot)}$ — процессы локального времени процесса W на кривых $\pm a(s)$ (см. подробнее [5]).

В силу определения функции $V(t, x)$ имеем $V(1, W_{1-t} + x) = -|W_{1-t} + x|$. Из принципа гладкого склеивания (19) следует, что два последних слагаемых в (20) равны нулю. Также заметим, что производная $V'_x(t, x)$ равномерно ограничена, так как для любых $x_1 \leq x_2$ и $t \in [0, 1]$ выполнены неравенства $x_1 - x_2 \leq V(t, x_2) - V(t, x_1) \leq x_2 - x_1$. Действительно, в силу четности функции $V(t, x)$ по x достаточно проверить данное утверждение для $0 \leq x_1 \leq x_2$. Тогда левое неравенство следует из того, что, как было отмечено выше, функция $V(t, x) + |x|$ не убывает при $x \geq 0$, а правое неравенство следует из соотношения

$$V(t, x_2) - V(t, x_1) \leq \sup_{\tau \leq 1-t} \mathbf{E} [|W_\tau + x_1| - |W_\tau + x_2|] \leq x_2 - x_1.$$

Из ограниченности $V'_x(t, x)$ вытекает равенство нулю математического ожидания стохастического интеграла в (20).

Используя (17) и равенство $\mathcal{L}V(t, x) = 0$ при $(t, x) \in D^0$ (которое справедливо, поскольку $V(t, x) = |x|$ на D), получаем

$$V(t, x) = -\mathbf{E}|W_{1-t} + x| + \int_t^1 \frac{c}{(1-s)^2} \mathbf{P}(|W_{s-t} + x| < a(s)) ds.$$

Беря $x = a(t)$ и используя равенство $V(t, a(t)) = -a(t)$ (которое справедливо, поскольку $(t, a(t)) \in D$), получаем уравнение (5) после непосредственного вычисления математического ожидания и вероятности, входящих в правую часть.

3.3. Докажем единственность решения уравнения (5), применяя метод, предложенный в [6]. Пусть $a(t)$ — решение этого уравнения, являющееся оптимальной границей остановки, а $\bar{a}(t)$ — некоторое другое решение, являющееся непрерывной функцией, удовлетворяющей (6) и (7). Рассмотрим функцию

$$\bar{V}(t, x) = -\mathbf{E}|W_{1-t} + x| + \int_t^1 \frac{c}{(1-s)^2} \mathbf{P}(|W_{s-t} + x| < \bar{a}(s)) ds.$$

Заметим, что $\bar{V}(t, \bar{a}(t)) = -\bar{a}(t)$ в силу того, что $\bar{a}(t)$ удовлетворяет (5).

Пользуясь строго марковским свойством броуновского движения, можно проверить, что для любого момента остановки $\tau \leq 1 - t$ справедливо равенство

$$\bar{V}(t, x) = \mathbf{E} \bar{V}(\tau + t, W_\tau + x) + \mathbf{E} \int_t^{\tau+t} \frac{c}{(1-s)^2} \mathbf{I}(|W_{s-t} + x| < \bar{a}(s)) ds. \quad (21)$$

Для фиксированных (t, x) рассмотрим момент $\tau_{\bar{a}} = \inf\{s \geq 0: |W_s + x| = \bar{a}(s + t)\}$. Учитывая, что $\mathbf{I}(|W_{s-t} + x| < \bar{a}(s)) = 0$ при $t \leq s \leq \tau_{\bar{a}} + t$, если $|x| \geq \bar{a}(t)$, и $\mathbf{I}(|W_{s-t} + x| < \bar{a}(s)) = 1$ при $t \leq s < \tau_{\bar{a}} + t$, если $|x| < \bar{a}(t)$, находим

$$\begin{aligned}
\bar{V}(t, x) &= -\mathbf{E}|W_{\tau_{\bar{a}}} + x| = -|x|, \quad |x| \geq \bar{a}(t), \\
\bar{V}(t, x) &= \mathbf{E} \left[\frac{c}{1 - (\tau_{\bar{a}} + t)} - \frac{c}{1 - t} - |W_{\tau_{\bar{a}}} + x| \right], \quad |x| < \bar{a}(t).
\end{aligned}$$

Во втором равенстве первой формулы мы воспользовались тем, что при $x \geq \bar{a}(t)$ имеем $|W_{\tau_{\bar{a}}} + x| = \bar{a}(\tau_{\bar{a}}) \geq 0$ и, следовательно, $\mathbf{E}|W_{\tau_{\bar{a}}} + x| = \mathbf{E}W_{\tau_{\bar{a}}} + x = x$. Аналогично, $\mathbf{E}|W_{\tau_{\bar{a}}} + x| = -x$ при $x \leq -\bar{a}(t)$. Во второй формуле мы воспользовались тем, что $\int_t^{\tau_{\bar{a}}+t} c(1-s)^{-2} ds = c(1-(\tau_{\bar{a}}+t))^{-1} - c(1-t)^{-1}$. Из этих формул следует, что $\bar{V}(t, x) \geq V(t, x)$ для всех $t \in [0, 1]$, $x \in \mathbf{R}$.

Предположим, что $\bar{a}(t) > a(t)$ для некоторого $t \in [0, 1]$. Возьмем $x = \bar{a}(t)$ и рассмотрим момент остановки $\tau_a = \inf\{s \geq 0: |W_s + x| = a(t+s)\}$. Тогда из (21), используя соотношения $\bar{V}(t, x) = -x$ и $\mathbf{E}\bar{V}(t + \tau_a, W_{\tau_a} + x) \geq \mathbf{E}V(t + \tau_a, W_{\tau_a} + x) = -\mathbf{E}(W_{\tau_a} + x) = -x$, получаем

$$-x \geq -x + \mathbf{E} \int_t^{\tau_a+t} \frac{c}{(1-s)^2} \mathbf{I}(|W_{s-t} + x| < \bar{a}(s)) ds.$$

Однако математическое ожидание в правой части строго положительно, так как $W_{s-t} + x$ мгновенно попадает в область ниже кривой $\bar{a}(s)$. Полученное противоречие означает, что $\bar{a}(t) \leq a(t)$ для всех $t \in [0, 1]$.

Предположим, $\bar{a}(t) < a(t)$ для некоторого $t \in [0, 1]$ и возьмем $x = \bar{a}(t)$. Тогда $\bar{V}(t, x) = -x$ и $\bar{V}(t + \tau_a, W_{\tau_a} + x) = -|W_{\tau_a} + x|$, так как $a(t + \tau_a) \geq \bar{a}(t + \tau_a)$ по доказанному выше. Из формулы (21) следует, что

$$-x \leq -\mathbf{E}|W_{\tau_a} + x| + \mathbf{E} \int_t^{\tau_a+t} \frac{c}{(1-s)^2} ds = V(t, x).$$

Таким образом, $V(t, x) \geq -x$, что противоречит $(t, x) \in C$. Значит, $\bar{a}(t) \geq a(t)$, что доказывает равенство $\bar{a}(t) = a(t)$ для всех $t \in [0, 1]$.

Теорема доказана.

4. Приложение.

4.1. Докажем непрерывность функции цены $V(t, x)$. Так как $V(t, x)$ не убывает по t и $x \geq 0$, то непрерывность достаточно доказать лишь по каждой переменной. Непрерывность по x очевидна, так как для любых $t \in [0, 1]$, $x, x' \in \mathbf{R}$, справедливо неравенство

$$|V(t, x') - V(t, x)| \leq \sup_{\tau \leq 1-t} \mathbf{E} \left| |W_{\tau} + x| - |W_{\tau} + x'| \right| \leq |x' - x|.$$

Для доказательства непрерывности по t зафиксируем $x \in \mathbf{R}$ и рассмотрим произвольные $0 \leq t < 1$, $0 \leq \varepsilon < 1 - t$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\frac{c}{1-(\tau+t)} - |W_{\tau} + x| \right] - \frac{c}{1-t} \\ & \geq \mathbf{E} \left[\frac{c}{1-(\tau \vee \varepsilon + t)} - |W_{\tau \vee \varepsilon} + x| + |W_{\varepsilon} + x| - |W_{\tau \wedge \varepsilon} + x| \right] - \frac{c}{1-(\varepsilon + t)} \\ & \geq \mathbf{E}V(t + \varepsilon, W_{\varepsilon} + x) + \mathbf{E}|W_{\varepsilon} + x| - \mathbf{E}|W_{\tau \wedge \varepsilon} + x|, \end{aligned} \quad (22)$$

где первое неравенство следует из непосредственных алгебраических преобразований, а во втором неравенстве мы воспользовались марковским свойством броуновского движения. Далее, имеем

$$\left| \mathbf{E}|W_{\varepsilon} + x| - \mathbf{E}|W_{\tau \wedge \varepsilon} + x| \right| \leq \mathbf{E}|W_{\varepsilon} - W_{\tau \wedge \varepsilon}| = \mathbf{E}|\widetilde{W}_{\varepsilon - \tau \wedge \varepsilon}| \leq \sqrt{2\varepsilon}, \quad (23)$$

где процесс $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t \leq \varepsilon}$, $\widetilde{W}_t = W_{\varepsilon} - W_{\varepsilon-t}$, является броуновским движением. Доказательство правого неравенства в (23) можно найти, например, в [8]. Беря в (22)

инфимум по всем моментам $\tau \leq 1 - t$, получаем, что

$$V(t, x) \geq \mathbf{E} V(t + \varepsilon, W_\varepsilon + x) - \sqrt{2\varepsilon}.$$

По доказанному выше, $|\mathbf{E} V(t + \varepsilon, W_\varepsilon + x) - V(t + \varepsilon, x)| \leq \mathbf{E} |W_\varepsilon| = \varepsilon \sqrt{2/\pi}$. Таким образом,

$$0 \geq V(t, x) - V(t + \varepsilon, x) \geq -\left(\sqrt{2\varepsilon} + \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right),$$

что доказывает непрерывность функции $V(t, x)$ по t .

4.2. Докажем принцип гладкого склеивания (19). Заметим, что левая и правая производные $V'_{x-}(t, a(t))$ и $V'_{x+}(t, a(t))$ существуют в силу вогнутости функции $V(t, x)$ по x , причем $V'_{x+}(t, a(t)) = -1$, так как $V(t, x) = -x$ при $x \geq a(t)$ (точки из множества остановки).

Рассмотрим левую производную. Зафиксируем $t \in [0, 1)$ и возьмем $x = a(t)$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{V(t, x - \varepsilon) - V(t, x)}{-\varepsilon} = \frac{V(t, x - \varepsilon) + x}{-\varepsilon} \geq \frac{\varepsilon - x + x}{-\varepsilon} = -1,$$

где в левом равенстве мы воспользовались тем, что $V(t, x) = -|x|$, а в правом — тем, что $V(t, x - \varepsilon) \leq -|x - \varepsilon|$. Следовательно,

$$V'_{x-}(t, x) \geq -1.$$

Докажем противоположное неравенство. Выберем малое $\varepsilon > 0$, и пусть τ^* — оптимальный момент остановки для $V(t, x - \varepsilon)$, т.е. $\tau^* = \inf\{s \geq 0: |W_s + x - \varepsilon| \geq a(t + s)\}$. Тогда

$$\frac{V(t, x - \varepsilon) - V(t, x)}{-\varepsilon} \leq \frac{\mathbf{E} |W_{\tau^*} + x| - \mathbf{E} |W_{\tau^*} + x - \varepsilon|}{-\varepsilon},$$

где мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} V(t, x) &\leq \mathbf{E} \left[c(1 - (\tau^* + t))^{-1} - |B_{\tau^*} + x| \right] - c(1 - t)^{-1}, \\ V(t, x - \varepsilon) &= \mathbf{E} \left[c(1 - (\tau^* + t))^{-1} - |B_{\tau^*} + x - \varepsilon| \right] - c(1 - t)^{-1}. \end{aligned}$$

Преобразовывая получившееся выражение, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |W_{\tau^*} + x| - \mathbf{E} |W_{\tau^*} + x - \varepsilon| &= \varepsilon \mathbf{P}(W_{\tau^*} + x - \varepsilon = a(t + \tau)) \\ &+ \mathbf{E} \left[(|W_{\tau^*} + x| - |W_{\tau^*} + x - \varepsilon|) \mathbf{I}(W_{\tau^*} + x - \varepsilon = -a(t + \tau)) \right]. \end{aligned}$$

Второе слагаемое по модулю оценивается величиной $\varepsilon \mathbf{P}(W_{\tau^*} + x - \varepsilon = -a(t + \tau)) = o(\varepsilon)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{V(t, x - \varepsilon) - V(t, x)}{-\varepsilon} \leq -1,$$

что доказывает неравенство $V'_{x-}(t, x) \leq -1$, откуда следует справедливость принципа гладкого склеивания.

Авторы выражают благодарность А. Н. Ширяеву, обратившему их внимание на рассматриваемую задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution. — Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 1. Berkeley: Univ. of California Press, 1961, p. 79–91.
2. *Breakwell J., Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution II (large t). — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, № 1, p. 162–173.
3. *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution III (small t). — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 1, p. 28–54.
4. *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution IV (discrete case). — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 1, p. 55–68.
5. *Peskir G.* A change-of-variable formula with local time on curves. — J. Theoret. Probab., 2005, v. 18, p. 499–535.
6. *Peskir G.* On the American option problem. — Math. Finance, 2005, v. 15, p. 169–181.
7. *Peskir G., Shiryaev A.* Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Birkhäuser, 2006, 500 p.
8. *Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н.* Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 288–330.
9. *Житлухин М. В., Муравлёв А. А.* Об уравнениях для оптимальных границ в задаче Чернова различения двух гипотез. — Успехи матем. наук, 2011, т. 66, № 5, с. 183–184.
10. *Житлухин М. В., Ширяев А. Н.* Байесовские задачи о разладке на фильтрованных вероятностных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 453–470.
11. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.

Поступила в редакцию
07.VIII.2012

© 2012 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

МНОГОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРИЗНАКОВ ЧАСТИЦ В НАДКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ¹⁾

Рассматриваются надкритические ветвящиеся процессы с дискретным временем, в которых каждая частица обладает несколькими случайными признаками. Нас интересуют максимумы этих признаков в популяции. Рассмотрены два случая: регулярный (когда число непосредственных потомков имеет конечные первый и второй моменты, а совместное распределение признаков принадлежит области притяжения некоторого многомерного экстремального закона), а затем более общий. Описаны классы невырожденных предельных законов для многомерных экстремумов при линейной нормировке. Особое внимание уделено структурам зависимости, описываемым копулами. Для них получено функциональное уравнение и доказана теорема о продолжении. Установлена связь с макс-полуустойчивыми распределениями.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ 07-01-00077, 07-01-00373, 11-01-00050.