Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 788–794

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 02:46:14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution. — Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 1. Berkeley: Univ. of California Press, 1961, p. 79–91.
2. *Breakwell J., Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution II (large t). — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, № 1, p. 162–173.
3. *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution III (small t). — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 1, p. 28–54.
4. *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution IV (discrete case). — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 1, p. 55–68.
5. *Peskir G.* A change-of-variable formula with local time on curves. — J. Theoret. Probab., 2005, v. 18, p. 499–535.
6. *Peskir G.* On the American option problem. — Math. Finance, 2005, v. 15, p. 169–181.
7. *Peskir G., Shiryaev A.* Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Birkhäuser, 2006, 500 p.
8. *Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н.* Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 288–330.
9. *Житлухин М. В., Муравлёв А. А.* Об уравнениях для оптимальных границ в задаче Чернова различения двух гипотез. — Успехи матем. наук, 2011, т. 66, № 5, с. 183–184.
10. *Житлухин М. В., Ширяев А. Н.* Байесовские задачи о разладке на фильтрованных вероятностных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 453–470.
11. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.

Поступила в редакцию
07.VIII.2012

© 2012 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

МНОГОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРИЗНАКОВ ЧАСТИЦ В НАДКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ¹⁾

Рассматриваются надкритические ветвящиеся процессы с дискретным временем, в которых каждая частица обладает несколькими случайными признаками. Нас интересуют максимумы этих признаков в популяции. Рассмотрены два случая: регулярный (когда число непосредственных потомков имеет конечные первый и второй моменты, а совместное распределение признаков принадлежит области притяжения некоторого многомерного экстремального закона), а затем более общий. Описаны классы невырожденных предельных законов для многомерных экстремумов при линейной нормировке. Особое внимание уделено структурам зависимости, описываемым копулами. Для них получено функциональное уравнение и доказана теорема о продолжении. Установлена связь с макс-полуустойчивыми распределениями.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ 07-01-00077, 07-01-00373, 11-01-00050.

Ключевые слова и фразы: надкритические ветвящиеся процессы, максимумы, многомерные экстремумы, копулы, макс-полуустойчивые распределения.

1. Введение. В работах [1], [2] изучались максимумы на ветвящихся процессах с дискретным временем. А именно, рассматривался классический процесс Гальтона–Ватсона [3], в котором каждая частица обладает некоторым случайным признаком, причем признаки всех частиц независимы и одинаково распределены. Изучалось асимптотическое поведение максимумов признака в популяции. В [4] подведены некоторые итоги зарубежных исследований. Обычно предполагалось, что исходное распределение признака принадлежит области притяжения некоторого экстремального закона для максимумов [5], [6]. Однако автором в [7], [8] было показано, что отказ от этого предположения существенно расширяет класс возможных предельных распределений. Наличие дискретного времени также является существенным. В случае марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем [9] не наблюдается такого разнообразия.

Далее мы рассмотрим ситуацию, когда частицы обладают несколькими (возможно, зависимыми) признаками, и нас интересует совместное распределение их максимумов в популяции.

Сначала будет рассмотрен регулярный случай (когда число непосредственных потомков имеет конечные первый и второй моменты, а совместное распределение принадлежит области притяжения некоторого многомерного экстремального закона), а затем, по аналогии с [7], [8], более общий случай, где возникает более широкий класс многомерных предельных законов. В обоих случаях предполагается, что ветвящийся процесс Z_n начинается с одной частицы и является надкритическим, причем каждая частица имеет не менее одного потомка. Обозначим производящую функцию числа непосредственных потомков через $f(s)$. Заметим, что она осуществляет непрерывное и взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя.

Пусть частицы имеют $m \geq 2$ признаков. Будем обозначать через $M_i(n)$ максимум i -го признака в n -м поколении.

2. Регулярный случай. Обозначим среднее число непосредственных потомков частицы через μ , и пусть $1 < \mu < \infty$. Дисперсию также полагаем конечной.

Для надкритического процесса Z_n в регулярном случае имеет место сходимость почти наверное [3, § 1.8]:

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \rightarrow W > 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

причем преобразование Лапласа–Стилтьеса $\varphi(t) = \mathbf{E} e^{-tW}$ однозначно определяется условиями

$$\varphi(\mu t) = f(\varphi(t)), \quad t \geq 0; \quad \varphi'(0) = -1. \quad (2)$$

Пусть признаки каждой частицы имеют совместное распределение $F(x_1, \dots, x_m)$. Предположим, что F принадлежит области притяжения какого-либо многомерного невырожденного закона для максимумов, т.е. существуют такие функции $\alpha_i(r) > 0$, $\beta_i(r)$, $r > 0$, и невырожденное (по каждой компоненте) распределение G , что

$$F^r(\alpha_1(r)x_1 + \beta_1(r), \dots, \alpha_m(r)x_m + \beta_m(r)) \rightarrow G(x_1, \dots, x_m), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1) и (3), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_1(n) \leq \alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \dots, M_m(n) \leq \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n)) \\ \rightarrow \varphi(-\ln G(x_1, \dots, x_m)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_1(n) \leq \alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \dots, M_m(n) \leq \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n)) \\ = \mathbf{E} F^{Z_n}(\alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \dots, \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n)) \\ = \mathbf{E} \left(F^{\mu^n}(\alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \dots, \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n)) \right)^{Z_n/\mu^n} \\ \rightarrow \mathbf{E} G^W(x_1, \dots, x_m) = \varphi(-\ln G(x_1, \dots, x_m)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Понятно, что маргинальные распределения любого многомерного предельного закона являются одномерными предельными законами. Более существенной здесь является структура зависимости между компонентами, которая не может быть произвольной.

Согласно знаменитой теореме Склера, любую функцию многомерного распределения можно представить в виде некоторой функции от ее маргинальных распределений:

$$F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)),$$

где $C(y_1, \dots, y_m)$ — функция распределения на $[0, 1]^m$ с равномерными маргинальными распределениями, называемая функцией зависимости [6, § 5.2] или копулой [10], [11, гл. 5]. В случае непрерывных распределений такое представление единственно.

Пусть многомерный экстремальный закон G имеет копулу D . Тогда для нее выполняется условие (необходимое и достаточное) [6, § 5.4], [11, § 7.5]:

$$D(y_1^s, \dots, y_m^s) = D^s(y_1, \dots, y_m) \quad \forall s > 0.$$

Из этого свойства, в частности, следует существование такого $\nu > 0$, что

$$D(y, \dots, y) = y^\nu \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (5)$$

Обозначим копулу предельного распределения Ψ через E .

Следствие 1. Если выполнены условия (1) и (3), то

$$E(y_1, \dots, y_m) = \varphi \left(-\ln D \left(e^{-\varphi^{-1}(y_1)}, \dots, e^{-\varphi^{-1}(y_m)} \right) \right).$$

Следствие легко доказать, исходя из определения копулы и предельного соотношения (1) применительно как к совместному распределению, так и к маргинальным (последнее эквивалентно теореме 5 работы [8]).

П р и м е р 1. Пусть $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$ (признаки независимы), тогда $E(y_1, y_2) = \varphi(\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2))$ (ЛТ-архимедова копула).

П р и м е р 2. Пусть $f(s) = s/(\mu - (\mu - 1)s^k)^{1/k}$, $k \geq 1$, тогда $\varphi(t) = 1/(1 + kt)^{1/k}$. Если $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$, то $E(y_1, y_2) = (y_1^{-k} + y_2^{-k} - 1)^{-1/k}$ (купула Клейтона).

П р и м е р 3. Пусть $f(s) = s/(\mu - (\mu - 1)s^k)^{1/k}$ и

$$D(y_1, y_2) = \exp \left\{ -((-\ln y_1)^\gamma + (-\ln y_2)^\gamma)^{1/\gamma} \right\}, \quad \gamma > 1$$

(экстремальная копула Гумбеля), тогда

$$E(y_1, y_2) = \left(((y_1^{-k} - 1)^\gamma + (y_2^{-k} - 1)^\gamma)^{1/\gamma} + 1 \right)^{1/k}$$

(обобщенная копула Клейтона).

Заметим, что изучение копул в явном виде представляет собой непростую задачу. Часто используют некоторые более простые характеристики. Рассмотрим коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости, обозначаемые через λ_u и λ_l [11, гл. 5].

Для пары случайных величин (ξ_1, ξ_2) с непрерывными маргинальными распределениями $F_1(x)$, $F_2(x)$ они определяются следующим образом:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0+0} \mathbf{P}(\xi_1 \leq F_1^{-1}(q) | \xi_2 \leq F_2^{-1}(q)), \quad \lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1-0} \mathbf{P}(\xi_1 > F_1^{-1}(q) | \xi_2 > F_2^{-1}(q)).$$

Коэффициенты могут быть вычислены через копулу распределения:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{C(q, q)}{q}, \quad \lambda_u = 2 - \lim_{q \rightarrow 1-0} \frac{1 - C(q, q)}{1 - q}.$$

Очевидно, что $\lambda_l, \lambda_u \in [0, 1]$. Для двумерных экстремальных копул из (5) получаем $\lambda_u = 2 - \nu$ и $\lambda_l = 1$ при $\nu = 1$, $\lambda_l = 0$ при $\nu > 1$; в частности, для копулы Гумбеля $\lambda_l = 0$, $\lambda_u = 2 - 2^{-1/\gamma}$. Для обобщенной копулы Клейтона имеем $\lambda_l = 2^{-1/(\gamma k)}$, $\lambda_u = 2 - 2^{-1/\gamma}$.

Возникает вопрос, каким образом преобразуются коэффициенты при переходе от копулы D (в классической схеме максимумов) к копуле E (в схеме максимумов на ветвящихся процессах).

Следствие 2. Если выполнены (1) и (3), то $\lambda_u^E = \lambda_u^D$. Если, кроме того, $\varphi(t) \sim At^{-B}$, $t \rightarrow \infty$, то $\lambda_l^E = (2 - \lambda_u^D)^{-B}$.

Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в случае непрерывного времени в работе [8]. Поскольку D — экстремальная копула, то из (5) и следствия 1 получаем $E(q, q) = \varphi(\nu\varphi^{-1}(q))$.

Пусть $\nu = 1$, тогда $E(q, q) = D(q, q) = q$ и $\lambda_l^E = \lambda_l^D = \lambda_u^E = \lambda_u^D = 1$.

Пусть теперь $\nu > 1$. Чтобы найти λ_u^E , используем тот факт, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = -1$. Получаем $1 - E(q, q) \sim \nu(1 - q)$, $q \rightarrow 1 - 0$, откуда $\lambda_u^E = 2 - \nu = \lambda_u^D$. Из асимптотики $\varphi(t) \sim At^{-B}$, $t \rightarrow \infty$, получаем $E(q, q) \sim \nu^{-B}q$, $q \rightarrow 0 + 0$, откуда $\lambda_l^E = (2 - \lambda_u^D)^{-B}$.

Таким образом, при переходе к схеме максимумов на ветвящихся процессах в регулярном случае сохраняется коэффициент верхней хвостовой зависимости, но может меняться коэффициент нижней.

Отметим также, что если $\varphi(t) \sim At^{-B}$, $t \rightarrow \infty$, и $p_1 = f'(0) > 0$, то из (2) следует $B = -\ln p_1 / \ln \mu$ (что доказывается подстановкой).

3. Общий случай. На самом деле класс возможных предельных законов гораздо шире, чем возникающий из теоремы 1. Понятно, что он пополняется за счет исходных распределений F , которые не принадлежат области притяжения какого-либо экстремального закона или для которых не выполняется (1). Этот эффект ранее был отмечен в [7], [8].

Теорема 2. При фиксированной f невырожденное (по каждой компоненте) распределение Ψ удовлетворяет предельному соотношению

$$\mathbf{P}(M_1(n) \leq a_n^{(1)}x_1 + b_n^{(1)}, \dots, M_m(n) \leq a_n^{(m)}x_m + b_n^{(m)}) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_m) \quad (6)$$

при $n \rightarrow \infty$ для некоторых распределений F и числовых последовательностей $a_n^{(i)} > 0$, $b_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq m$, тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Psi(a_1x_1 + b_1, \dots, a_mx_m + b_m) = f(\Psi(x_1, \dots, x_m)) \quad (7)$$

для некоторых констант $a_i > 0$, b_i , $1 \leq i \leq m$.

Доказательство. Обозначим n -ю итерацию f через f_n , тогда

$$\mathbf{P}(M_1(n) \leq u_1, \dots, M_m(n) \leq u_m) = f_n(F(u_1, \dots, u_m)). \quad (8)$$

Пусть выполнено (6), тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(M_1(n+1) \leq a_n^{(1)}x_1 + b_n^{(1)}, \dots, M_m(n+1) \leq a_n^{(m)}x_m + b_n^{(m)}\right) \\ = f\left(\mathbf{P}\left(M_1(n) \leq a_n^{(1)}x_1 + b_n^{(1)}, \dots, M_m(n) \leq a_n^{(m)}x_m + b_n^{(m)}\right)\right) \rightarrow f(\Psi(x)). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}\left(M_1(n+1) \leq a_{n+1}^{(1)}x_1 + b_{n+1}^{(1)}, \dots, M_m(n+1) \leq a_{n+1}^{(m)}x_m + b_{n+1}^{(m)}\right) \rightarrow \Psi(x).$$

Заметим, что классическая теорема Хинчина об инвариантности класса предельных распределений относительно выбора линейной нормировки [5, § 1.2], [6, § 2.2] обобщается на многомерный случай (см. доказательство теоремы 5.2.1 [6]), так что отсюда следует (7). Обратно, если выполнено (7), положим $F = \Psi$ и построим последовательности $a_1^{(i)} = 1$, $b_1^{(i)} = 0$, $a_{n+1}^{(i)} = a_n^{(i)}/a_i$, $b_{n+1}^{(i)} = (b_n^{(i)} - b_i)/a_i$, $1 \leq i \leq m$, тогда (6) обращается в тождество.

З а м е ч а н и е. Полученные распределения могут рассматриваться как обобщения многомерных макс-полуустойчивых распределений [13], удовлетворяющих функциональным уравнениям вида

$$H(a_1x_1 + b_1, \dots, a_mx_m + b_m) = H^r(x_1, \dots, x_m), \quad r > 0. \quad (9)$$

Функции $f(s) = s^r$ при целом $r \geq 2$ соответствует детерминированный ветвящийся процесс, в котором каждая частица имеет ровно r потомков. Макс-полуустойчивые распределения были введены в [12], [13]. В числе более современных работ можно указать [14]. Здесь мы получаем для данных распределений новую интерпретацию (как предельных в схеме максимумов на детерминированных ветвящихся процессах). Однако эта взаимосвязь оказывается более глубокой.

Следствие 3. Пусть выполнено условие (1) и H — макс-полуустойчивое распределение, удовлетворяющее (9) с $r = \mu$, тогда распределение

$$\Psi(x_1, \dots, x_m) = \varphi(-\ln H(x_1, \dots, x_m)) \quad (10)$$

удовлетворяет (6). И наоборот, если выполнены (1) и (6), то распределение

$$H(x_1, \dots, x_m) = \exp \left\{ -\varphi^{-1}(\Psi(x_1, \dots, x_m)) \right\}$$

является макс-полуустойчивым и удовлетворяет (9) с $r = \mu$.

Утверждение следствия доказывается с помощью (2) и (7).

Следствие 4. Копула E является копулой некоторого невырожденного (по каждой компоненте) предельного распределения Ψ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет функциональному уравнению

$$E(f(y_1), \dots, f(y_m)) = f(E(y_1, \dots, y_m)) \quad (11)$$

на множестве векторов, составленных из значений маргинальных функций распределения, т.е. $(\Psi_1(x_1), \dots, \Psi_m(x_m))$, $x_i \in \mathbf{R}$.

Утверждение следствия доказывается, исходя из определения копулы, уравнения (7) и тождеств для маргинальных распределений $\Psi_i(a_ix_i + b_i) = f(\Psi_i(x_i))$, $1 \leq i \leq m$.

Оговорка о множестве значений функций здесь необходима, поскольку предельными распределениями могут быть и дискретные [8]. В случае непрерывных распределений условие (11) должно выполняться на всем кубе $[0, 1]^m$.

Пример 4. Функция $E(y_1, y_2) = \min\{y_1, y_2\}$ (копула комонотонности или совершенной зависимости) удовлетворяет (11) при любой функции f . В этом случае каждый признак выражается возрастающей функцией от другого.

Пример 5. Пусть $f(s) = s^\mu$, т.е. частица имеет фиксированное число потомков $\mu \geq 2$. Введем непрерывную строго возрастающую выпуклую функцию $g(u) = u^2(1 + \varepsilon \sin(2\pi \ln \mu \cdot u))$, где $|\varepsilon| \leq 1/(1 + (2\pi/\ln \mu)^2)$, и положим $h(y) = g(-\ln y)$, тогда функция $E(y_1, y_2) = h^{-1}(h(y_1) + h(y_2))$ является копулой и удовлетворяет (11).

В каждом конкретном случае копула предельного распределения может быть найдена как предел (если он существует) копул E_n многомерных распределений экстремумов по поколениям $n \geq 1$:

$$E_n(y_1, \dots, y_m) = f_n\left(D(f_{-n}(y_1), \dots, f_{-n}(y_m))\right),$$

где f_n обозначает n -ю итерацию функции f , а f_{-n} — соответствующую итерацию обратной функции.

Пример 6. Пусть $f(s) = 1 - (1 - s)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, что соответствует распределению числа потомков с бесконечным средним, так что (1) не выполняется. Пусть также $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$E_n(y_1, y_2) = 1 - \left[1 - (1 - (1 - y_1)^{\alpha^{-n}})(1 - (1 - y_2)^{\alpha^{-n}})\right]^{\alpha^n} \rightarrow \min\{y_1, y_2\}.$$

Таким образом, при исходной независимости признаков мы получаем в пределе совершенную зависимость максимумов. Утверждения следствия 2 в данном случае оказываются неверны.

Следующая теорема (о продолжении) является аналогом теоремы 4 и ее следствия из работы [8] в многомерном случае.

Теорема 3. Пусть заданы числа $c_0^{(i)} \in (0, 1)$, $1 \leq i \leq m$, и непрерывная копула C , удовлетворяющая (11) на множестве

$$V = \left\{0 < y_1 \leq c_0^{(1)}, \dots, 0 < y_m \leq c_0^{(m)}\right\} \setminus \left\{y_1 \leq f(c_0^{(1)}), \dots, y_m \leq f(c_0^{(m)})\right\},$$

тогда существует копула E , совпадающая с C на V и удовлетворяющая (11) на $[0, 1]^m$.

Доказательство. Построим искомую копулу C . Введем числовые последовательности $c_n^{(i)} = f_n(c_0^{(i)})$, $n \in \mathbf{Z}$ (при $n < 0$ имеем в виду итерации обратной функции). Получаем $c_n^{(i)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и $c_n^{(i)} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow -\infty$. Рассмотрим параллелепипеды

$$B_{k_1, \dots, k_m} = \left\{c_{k_1+1}^{(1)} < y_1 \leq c_{k_1}^{(1)}, \dots, c_{k_m+1}^{(m)} < y_m \leq c_{k_m}^{(m)}\right\}, \quad k_i \in \mathbf{Z}.$$

Весь куб $[0, 1]^m$ разбивается на $B_{k_1, \dots, k_m}$, за исключением границ. Множество V является замыканием объединения всех параллелепипедов вида $B_{k_1, k_2, \dots, 0, \dots, B_{0, k_2, \dots, k_m}$, так что на них копула E задана. С помощью (11) можно продолжить E с любого $B_{k_1, \dots, k_m}$ на $B_{k_1+1, \dots, k_m+1}$ и $B_{k_1-1, \dots, k_m-1}$. Таким образом, продолжаем ее на $(0, 1)^m$. Значения на границах получаем предельным переходом. Далее проверяется, что полученная функция действительно является копулой.

Автор благодарен М. В. Козлову и В. И. Питербаргу за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold B. C., Villasenor J. A.* The tallest man in the world. — Statistical Theory and Applications. Papers in honor of H. A. David. New York: Springer, 1996, p. 81–88.
2. *Pakes A. G.* Extreme order statistics on Galton–Watson trees. — *Metrika*, 1998, v. 47, № 2, p. 95–117.
3. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
4. *Yanev G. P.* Revisiting offspring maxima in branching processes. — *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, 2007, v. 18, p. 401–426.
5. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
6. *Галамбош Я. И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 303 с.
7. *Лебедев А. В.* Предельные законы для максимумов на надкритических ветвящихся процессах. — *Обозрение прикл. промышл. матем.*, 2004, v. 11, № 4, с. 867–868.
8. *Лебедев А. В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах. — *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. мех.*, 2008, № 5, с. 3–6.
9. *Lebedev A. V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time. — *Extremes*, 2008, v. 11, № 2, p. 203–216.
10. *Nelsen R.* An introduction to copulas. — *Lecture Notes in Statis.*, 1999, v. 139, p. 1–216.
11. *McNeil A. J., Frey R., Embrechts P.* Quantitative Risk Management. Princeton: Princeton Univ. Press, 2005, 538 p.
12. *Гриневич И. В.* Макс-полуустойчивые предельные распределения, отвечающие линейной и степенной нормировке. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1992, т. 37, в. 4, с. 774–776.
13. *Pancheva E.* Multivariate max-semistable distributions. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1992, т. 37, в. 4, с. 794–795.
14. *Canto E Castro L., de Haan L., Temido M. G.* Rarely observed sample maxima. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 4, с. 787–799.

Поступила в редакцию
30.IX.2008

© 2012 г.

ЛЫКОВ А. А.* , МАЛЫШЕВ В. А.* ,
МУЗЫЧКА С. А.*

ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С МИКРОСКОПИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Известно, что для линейной гамильтоновой системы инвариантных мер много, и поэтому проблема сходимости к инвариантной мере Гиббса даже не стоит. Мы рассматриваем линейные гамильтоновы системы произвольной конечной размерности и доказываем, что если на одну выделенную частицу действуют еще диссипация и белый шум, то для почти всех гамильтонианов и «почти всех» начальных условий существует единственное предельное распределение. При этом оно будет гиббсовским с температурой, зависящей от диссипации и дисперсии белого шума.

Ключевые слова и фразы: мера Гиббса, сходимость к равновесию, гамильтоновы системы, белый шум.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: alekslyk@yandex.ru, malyshhev2@yahoo.com, stepan_muzychka@mail.ru