Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Лыков, В. А. Малышев, С. Музычка, Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 794–799

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:31:21

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold B. C., Villasenor J. A.* The tallest man in the world. — Statistical Theory and Applications. Papers in honor of H. A. David. New York: Springer, 1996, p. 81–88.
2. *Pakes A. G.* Extreme order statistics on Galton–Watson trees. — *Metrika*, 1998, v. 47, № 2, p. 95–117.
3. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
4. *Yanev G. P.* Revisiting offspring maxima in branching processes. — *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, 2007, v. 18, p. 401–426.
5. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
6. *Галамбош Я. И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 303 с.
7. *Лебедев А. В.* Предельные законы для максимумов на надкритических ветвящихся процессах. — *Обозрение прикл. промышл. матем.*, 2004, v. 11, № 4, с. 867–868.
8. *Лебедев А. В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах. — *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. мех.*, 2008, № 5, с. 3–6.
9. *Lebedev A. V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time. — *Extremes*, 2008, v. 11, № 2, p. 203–216.
10. *Nelsen R.* An introduction to copulas. — *Lecture Notes in Statis.*, 1999, v. 139, p. 1–216.
11. *McNeil A. J., Frey R., Embrechts P.* Quantitative Risk Management. Princeton: Princeton Univ. Press, 2005, 538 p.
12. *Гриневич И. В.* Макс-полуустойчивые предельные распределения, отвечающие линейной и степенной нормировке. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1992, т. 37, в. 4, с. 774–776.
13. *Pancheva E.* Multivariate max-semistable distributions. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1992, т. 37, в. 4, с. 794–795.
14. *Canto E Castro L., de Haan L., Temido M. G.* Rarely observed sample maxima. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 4, с. 787–799.

Поступила в редакцию
30.IX.2008

© 2012 г.

ЛЫКОВ А. А.* , МАЛЫШЕВ В. А.* ,
МУЗЫЧКА С. А.*

ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С МИКРОСКОПИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Известно, что для линейной гамильтоновой системы инвариантных мер много, и поэтому проблема сходимости к инвариантной мере Гиббса даже не стоит. Мы рассматриваем линейные гамильтоновы системы произвольной конечной размерности и доказываем, что если на одну выделенную частицу действуют еще диссипация и белый шум, то для почти всех гамильтонианов и «почти всех» начальных условий существует единственное предельное распределение. При этом оно будет гиббсовским с температурой, зависящей от диссипации и дисперсии белого шума.

Ключевые слова и фразы: мера Гиббса, сходимость к равновесию, гамильтоновы системы, белый шум.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: alekslyk@yandex.ru, malyshhev2@yahoo.com, stepan_muzychka@mail.ru

1. Основные результаты. Рассмотрим фазовое пространство

$$L = L_{2N} = \mathbf{R}^{2N} = \{\psi = (q, p): q = (q_1, \dots, q_N), p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbf{R}^N\}$$

со скалярным произведением

$$(\psi, \psi')_1 = \sum_{i=1}^N (q_i q'_i + p_i p'_i).$$

Пространство L является прямой суммой $L = l_N^{(q)} \oplus l_N^{(p)}$ ортогональных пространств координат и импульсов с индуцированными скалярными произведениями $(q, q')_1$ и $(p, p')_1$ соответственно. Нам наиболее интересен случай больших N , но в настоящей статье это нигде не используется.

Мы будем изучать систему $2N$ стохастических дифференциальных уравнений $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} dq_k &= p_k dt, \\ dp_k &= \sum_{l=1}^N \left((-V(k, l)q_l - D(k, l)p_l) dt + B(k, l) dw_{t,l} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $V = (V(i, j))$ — положительно определенная $(N \times N)$ -матрица, $D = (D(i, j))$ — неотрицательно определенная симметричная $(N \times N)$ -матрица, $B = (B(k, l))$ — произвольная вещественная матрица, $w_{t,l}$, $l = 1, \dots, N$, — стандартные броуновские движения, независимые по l .

Если $D = B = 0$, то система является линейной гамильтоновой системой с квадратичным гамильтонианом

$$H(\psi) = T + U, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V(i, j) q_i q_j. \quad (2)$$

Мы будем рассматривать системы, в которых матрицы B и D для некоторого $n = 1, \dots, N$ имеют следующий вид:

$$D = \alpha \Delta_n, \quad B = \sigma \Delta_n,$$

где $\Delta_n = (\delta_{i,j} \delta_{i,n})$ — матрица, в которой только на одном месте стоит единица, а на остальных нули. Заметим, что в данном случае на систему будет «действовать» только один белый шум $dw_{t,n}$. Будем считать, что индекс n зафиксирован, и для краткости писать $dw_t = dw_{t,n}$. Далее мы везде неявно предполагаем, что $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, и особо оговариваем случаи, когда это не так.

В матричном виде систему (1) можно переписать так:

$$d\psi = A\psi dt + \sigma g_n dw_t, \quad (3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & -D \end{pmatrix},$$

E — единичная $(N \times N)$ -матрица, $g_n = (0, e_n) \in l_N^{(p)}$, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^N$ — n -й стандартный орт. Решение последнего уравнения с произвольным начальным вектором $\psi(0)$ определяется однозначно и может быть записано в виде (см., например, [1, разд. 12.4])

$$\psi(t) = e^{tA} \left(\sigma \int_0^t e^{-sA} g_n dw_s + \psi(0) \right).$$

Введем множество

$$L_- = \{\psi \in L: H(e^{tA}\psi) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\} \subset L.$$

Нам понадобятся следующие результаты.

Лемма 1. *Множество L_- является линейным подпространством пространства L , причем $L_- = \{(q, p) \in L: q \in l_V, p \in l_V\}$, где l_V — подпространство $\mathbf{R}^N$, натянутое на векторы вида $V^k e_n$, $k = 0, 1, \dots$, при этом $g_n \in L_-$. Более того, L_- и его ортогональное дополнение, которое будем обозначать L_0 , инвариантны относительно оператора A .*

Все утверждения этой леммы доказаны в [2].

Ввиду этой леммы, любой начальный вектор $\psi(0)$ единственным образом можно представить в виде

$$\psi(0) = \psi_0 + \psi_-, \quad \psi_0 \in L_0, \quad \psi_- \in L_-.$$

Тогда решение $\psi(t)$ стохастического уравнения (3) с начальным вектором $\psi(0)$ для всех $t \geq 0$ можно представить в виде

$$\psi(t) = \psi^{(0)}(t) + \psi^{(-)}(t), \quad (4)$$

где $\psi^{(0)}(t)$, $\psi^{(-)}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\psi}^{(0)}(t) = A\psi^{(0)}(t), \quad d\psi^{(-)}(t) = A\psi^{(-)} dt + \sigma g_n dw_t$$

с начальными условиями $\psi^{(0)}(0) = \psi_0$ и $\psi^{(-)}(0) = \psi_-$ соответственно, поскольку сумма этих уравнений дает уравнение (3).

Согласно лемме 1, функция $\psi^{(0)}(t) \in L_0$, $t \in [0, \infty)$, детерминирована и представляется в виде

$$\psi^{(0)}(t) = e^{At}\psi^{(0)}(0), \quad (5)$$

а $\psi^{(-)}(t)$ является гауссовским случайным процессом со значениями в L_- (так как $g_n \in L_-$).

Теорема 1. *Для любого $\psi(0)$ имеет место сходимость по распределению*

$$\psi^{(-)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \xi,$$

где $\xi \in L_-$, а его распределение абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на L_- (определенной евклидовой структурой) и задается плотностью относительно этой меры

$$p_\xi(\psi) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{2\alpha}{\sigma^2} H(\psi) \right), \quad \psi \in L_-. \quad (6)$$

Предел средней энергии имеет следующий явный вид:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E} H(\psi^{(-)}(t)) = \frac{\sigma^2}{4\alpha} \dim L_-.$$

Таким образом, действие случайной силы и диссипации на одну только частицу обеспечивает сходимость к равновесной мере Гиббса с температурой, зависящей от α и σ .

Первое утверждение следующей теоремы показывает, что сходимость к распределению Гиббса является типичным свойством линейных гамильтоновых систем с

диссипацией и внешней случайной силой. Второе утверждение показывает, что диссипативный член необходим для этой сходимости.

Для заданного N обозначим $\mathbf{H}_N$ гладкое многообразие всевозможных гамильтонианов H вида (2), т.е. гладкое многообразие всех положительно определенных $(N \times N)$ -матриц V . Пусть μ — произвольная абсолютно непрерывная вероятностная мера на $\mathbf{H}_N$, и пусть $\mathbf{H}_N^{(+)}$ множество всех гамильтонианов из $\mathbf{H}_N$, для которых размерность L_0 больше нуля.

Теорема 2. 1. Мера μ подмножества $\mathbf{H}_N^{(+)}$ равна нулю. 2. Если $\alpha = 0$, то для любого начального условия $\psi(0)$ справедлива формула

$$\mathbf{E} H(\psi(t)) = \frac{\sigma^2}{2} t + O(1).$$

Заметим, что для более узких (физических) классов гамильтонианов свойство $\dim L_0 = 0$ уже не является типичным (см. по этому поводу [2]).

Мы ограничиваемся в этой краткой заметке наиболее интересным случаем одной выделенной частицы, который показывает, что уже самое минимальное введение случайности в систему обеспечивает сходимость к физическому равновесию. Заметим, однако, что большинство результатов допускает обобщение на произвольные матрицы D и B . Похожие системы, в основном в связи с обоснованием закона теплопроводности Фурье, рассматривались в 1960–70-е годы в работах Дж. Лебовица и его коллег (см. статьи [6], [7] и ссылки в них).

2. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Сначала предположим, что $\dim L_0 = 0$. В этом случае спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости.

Докажем сначала сходимость. Ввиду сделанного предположения, можно ограничиться рассмотрением процесса $\psi^{(-)}(t)$, который допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} \psi^{(-)}(t) &= \psi^{(g)}(t) + \psi^{(d)}(t), \\ \psi^{(g)}(t) &= \sigma e^{tA} \int_0^t e^{-sA} g_n dw_s, \quad \psi^{(d)}(t) = e^{tA} \psi^{(-)}(0). \end{aligned}$$

По определению L_- функция $\psi^{(d)}(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому сходимость достаточно доказать для $\psi^{(g)}(t)$. Обозначим $C(t) = (\mathbf{E} \{\psi_i^{(g)}(t) \psi_j^{(g)}(t)\})$ матрицу ковариаций. Тогда

$$C(t) = \mathbf{E} \{\psi^{(g)}(t) (\psi^{(g)})^T(t)\} = \sigma^2 e^{tA} \mathbf{E} \left\{ \int_0^t e^{-sA} g_n dw_s \int_0^t g_n^T e^{-sA^T} dw_s \right\} e^{tA^T},$$

где T обозначает транспонирование. Пользуясь «изометрией» Ито [5], получаем:

$$C(t) = \sigma^2 e^{tA} \int_0^t e^{-sA} g_n g_n^T e^{-sA^T} ds e^{tA^T}. \quad (7)$$

Вычислим интеграл в последней формуле. Найдем такую матрицу U , не зависящую от времени, что

$$\int_0^t e^{-sA} g_n g_n^T e^{-sA^T} ds = e^{-tA} U e^{-tA^T} - U. \quad (8)$$

Для этого дифференцируем (8) по t , при этом экспоненты сокращаются и мы получаем

$$AU + UA^T = -g_n g_n^T.$$

Данное уравнение относительно U имеет единственное решение, так как спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости [3, разд. 4.4, с. 16]. Легко проверить, что решением является следующая матрица:

$$U = \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, из (7) и (8) имеем $C(t) = \sigma^2(U - e^{tA}Ue^{tA^T})$. Так как спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \sigma^2 U$. Поэтому существует предел по распределению

$$\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi^{(g)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi^{(-)}(t),$$

который является гауссовским с нулевым средним и матрицей ковариаций $\sigma^2 U$.

Перейдем к последнему утверждению теоремы 1. Из (9) и из положительной определенности V следует, что U невырождена. Поэтому распределение ξ имеет плотность $p_\xi(\psi)$ относительно стандартной меры Лебега $dq_1 \cdots dp_N$ на L . Так как матрица $(2\alpha U)^{-1}$ определяет квадратичную форму H , то

$$p_\xi(\psi) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{2\alpha}{\sigma^2} H(\psi) \right).$$

Напомним, что $H(\psi) = (Q\psi, \psi)_1/2$, где $(2N \times 2N)$ -матрица $Q = (q_{i,j})$ определяется равенством векторов $Q(q, p) = (Vq, p)$. Тогда для средней энергии получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E} H(\psi^{(-)}(t)) = \mathbf{E} H(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2N} q_{i,j} c_{i,j} = \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{tr}(QU) = \frac{\sigma^2}{4\alpha} \dim L.$$

Таким образом, для случая $L_0 = \{0\}$ теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь случай $L_0 \neq \{0\}$. Пусть $v_1, \dots, v_d$ — произвольный ортонормированный базис подпространства l_V с единственным ограничением, что $v_1 = e_n$. Построим по нему ортонормированный базис в L_- следующим образом:

$$h_k^{(a)} = (v_k, 0), \quad h_k^{(p)} = (0, v_k), \quad k = 1, \dots, d.$$

Координаты на L_- в этом базисе будем обозначать $\psi' = (\psi'_1, \dots, \psi'_{2d})$. В данных координатах наше уравнение на L_- запишется в виде

$$d\psi' = A'\psi' dt + g'_1 dw_t,$$

где $A' = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V' & -D' \end{pmatrix}$, E — единичная матрица порядка d , а V' , D' и g'_1 — матрицы операторов V , D и выделенный вектор соответственно в новых координатах.

Данное уравнение имеет вид нашего основного уравнения (3). Оператор A' является ограничением оператора A на подпространство L_- ; пусть $L_- = L'_0 \oplus L'_-$ — соответствующее разложение L_- по A' . Тогда $L'_0 = 0$. Поэтому мы можем применить утверждения, доказанные для случая $L_0 = 0$. Заметим, что квадратичная форма H' на L_- , порождаемая V' , совпадает с ограничением квадратичной формы H на подпространство L_- . Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Если $\alpha = 0$, то закон сохранения энергии дает $L_- = 0$. Представим решение $\psi(t)$ в виде

$$\psi(t) = \psi_h(t) + \psi_I(t),$$

где $\psi_h(t)$ — решение однородного уравнения с начальными условиями $\psi(0)$, а $\psi_I(t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Так как $H(\psi(t))$ обладает свойствами нормы, то справедливо неравенство

$$|H(\psi(t)) - H(\psi_I(t))| \leq H(\psi_h(t)) = H(\psi(0)).$$

Последнее равенство выполнено, так как $\alpha = 0$, и, значит, энергия сохраняется. Вычислим $\mathbf{E} H(\psi_I(t))$. Обозначим $\psi_I(t) = (q^{(I)}(t), p^{(I)}(t))$. Решение с нулевыми начальными условиями получается как в известной (см., например, [4]) формуле для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q(t) &= \sigma (\sqrt{V})^{-1} \int_0^t \sin(\sqrt{V}(t-s)) e_n dw_s, \\ p(t) &= \sigma \int_0^t \cos(\sqrt{V}(t-s)) e_n dw_s. \end{aligned}$$

Используя снова «изометрию» Ито, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} T &= \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{E} (p(t), p(t))_1 = \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{E} \{p^T p\} = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t e_n^T \cos^2(\sqrt{V}(t-s)) e_n ds, \\ \mathbf{E} U &= \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{E} (Vq(t), q(t))_1 = \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{E} \{q^T Vq\} = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t e_n^T \sin^2(\sqrt{V}(t-s)) e_n ds, \\ \mathbf{E} H(\psi_I(t)) &= \mathbf{E} \{T + U\} = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t e_n^T e_n ds = \frac{\sigma^2}{2} t. \end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы 2 доказано.

Заметим, что $\mathbf{H}_N$ является гладким многообразием. Определим матрицу $\Sigma(V)$ так, что ее k -й столбец равен вектору $V^k e_n$. Тогда

$$\mathbf{H}_N^{(+)} = \{V: \dim l_V < N\} = \{V: \det(\Sigma(V)) = 0\}.$$

Заметим, что $\det(\Sigma(V)) \neq 0$ для матриц $V \in \mathbf{H}_N$ с простым спектром и собственным базисом $v_1, \dots, v_N$, обладающим свойством $(v_k, e_n)_1 \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, N$ (см. [2]). Поэтому функция $\det(\Sigma(V))$ не обращается тождественно в нуль на многообразии $\mathbf{H}_N$. Таким образом, $\mathbf{H}_N^{(+)}$ является множеством нулей полинома на $\mathbf{H}_N$. Следовательно, его размерность меньше размерности всего $\mathbf{H}_N$, и значит, по известной теореме Сарда, его мера μ равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996, 400 с.
2. *Lykov A. A., Malyshev V. A.* Harmonic chain with weak dissipation. — Markov Process. Related Fields, 2012, v. 18, № 4, p. 721–729.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970, 534 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004, 559 с.
5. *Булдинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 402 с.
6. *Rieder Z., Lebowitz J. L., Lieb E.* Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state. — J. Math. Phys., 1967, v. 8, № 5, p. 1073–1078.
7. *Spohn H., Lebowitz J. L.* Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems. — Comm. Math. Phys., 1977, v. 54, № 2, p. 97–120.

Поступила в редакцию
22.VII.2012