Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Об условиях сходимости обобщенного ряда Спицера, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 809–810

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:18:56

3. Курбанмурадов О. Методы блуждания по шароидам для решения уравнения теплопроводности. — Теория и алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984, с. 67–77.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.
6. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987, 239 с.
7. Михайлов Г. А. Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000, 248 с.
8. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973, 324 с.
9. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
10. Rasulov A., Mascagni M., Raimova G. Monte Carlo Methods for the Solution of Linear and Nonlinear Boundary Value Problems. Tashkent: UWED, 2006, 346 p.

Поступила в редакцию
18.VI.2009

Исправленный вариант
20.X.2012

© 2012 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЯДА СПИЦЕРА

В заметке приведены оптимальные моментные условия, при которых сходится обобщенный ряд Спичера.

Ключевые слова и фразы: суммы независимых случайных величин, ряд Спичера, нормальное распределение.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $X, X_1, X_2, \dots$ с нулевым средним и конечной положительной дисперсией σ^2 . Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Мы приведем один результат, связанный с оценкой величины

$$\mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2},$$

а именно сформулируем оптимальные условия, при которых сходится ряд

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right|, \quad (1)$$

где положительные веса $g(n)$ имеют степенной характер.

При $g(n) \equiv 1$ ряд из (1) аналогичен известному ряду Спичера, оценка сверху для суммы которого была недавно получена в [1].

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovski@mail.ru

¹⁾ Исследование выполнено при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ 638.2008.1) и РФФИ 10-01-00242-а.

Теорема. Пусть положительная функция $g(x)$ при всех $x \geq 0$ и при некоторых $\delta < 1$ и $\alpha < 1/2$ удовлетворяет условиям

$$g(x)x^{-\delta} \text{ не возрастает, } g(x)x^{\alpha} \text{ не убывает,} \quad (2)$$

и, кроме того, $\int_1^{\infty} g(x)x^{-3/2}dx < \infty$. Если $\mathbf{E} X^2 g(X^2) < \infty$, то ряд в (1) сходится.

Утверждение теоремы вытекает из нижеприведенной леммы, которая, в свою очередь, является частным случаем теоремы 7 из [2].

Лемма. Положим $D_n = \mathbf{E} X^2 \mathbf{I}[|X| < \sqrt{n}]$, $b_n = \sqrt{n D_n}$. В условиях теоремы

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n} \Delta_n < \infty, \quad (3)$$

где $\Delta_n = \sup_x |\mathbf{P}(S_n < x b_n) - \Phi(x)|$, $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

В заключение покажем, что утверждение, сделанное в [1, Замечание] о том, что

$$I = \sum_{n \geq 1} n^{-1} |\mathbf{P}(S_n < x \sigma \sqrt{n}) - \Phi(x)| < \infty,$$

вообще говоря, не верно при любом $x \neq 0$.

Пусть $\sigma^2 = 1$ и, для определенности, $x > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(S_n < x \sqrt{n}) - \Phi(x)| &\geq \left| \Phi\left(\frac{x \sqrt{n}}{b_n}\right) - \Phi(x) \right| - \left| \mathbf{P}\left(S_n < \left(\frac{x \sqrt{n}}{b_n}\right) b_n\right) - \Phi\left(\frac{x \sqrt{n}}{b_n}\right) \right| \\ &\geq \Phi\left(\frac{x \sqrt{n}}{b_n}\right) - \Phi(x) - \Delta_n. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\Phi\left(\frac{x \sqrt{n}}{b_n}\right) - \Phi(x) \sim \frac{1}{2} x \Phi'(x) \left(\frac{n}{b_n^2} - 1\right) \sim \frac{x \Phi'(x)}{2} (1 - D_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при любом фиксированном $x > 0$

$$I + \sum_{n \geq 1} n^{-1} \Delta_n \geq c \sum_{n \geq 1} n^{-1} (1 - D_n), \quad (4)$$

где c — некоторая положительная постоянная. По лемме ряд слева в (4) сходится, в то время как сходимость ряда справа равносильна существованию момента $\mathbf{E} X^2 \ln(1 + |X|)$. Иначе ряд I расходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев А. В. Новое доказательство абсолютной сходимости ряда Спичера. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 149–152.
2. Розовский Л. В. О точности оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, в. 4, с. 744–761.

Поступила в редакцию
20.V.2011