Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Хатунцева, Информация об одиннадцатой Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 825

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:45:53

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОДИННАДЦАТОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова при поддержке Московской государственной академии тонкой химической технологии им. М.В.Ломоносова провела одиннадцатую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информацию о предыдущих олимпиадах можно найти на сайте кафедры теории вероятностей (<http://mech.math.msu.su/probab>), а также во втором выпуске журнала «Теория вероятностей и ее применения» за 2011 год.

Олимпиада была проведена 21 апреля 2012 г. отдельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). В олимпиаде приняли участие и сдали работы 35 студентов I–II курсов и 21 студент III–V курсов механико-математического факультета Московского государственного университета, а также математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета и физико-технического факультета Киевского политехнического института.

Задачи олимпиады

В скобках после номера задачи (или пункта задачи) указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курсов и, наконец, число решивших ее студентов III–V курсов (для задач, которые предлагались только в одной возрастной группе, приведено только число решивших).

Задача 1. (I–V; 10, 6) Пусть $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, а $X_1, X_2, \dots$ — н.о.р. случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$. Вектор $(X_1, \dots, X_n)$ — это значения случайных величин $X_1, \dots, X_n$, упорядоченные по возрастанию. Доказать, что $\sum_{i=1}^n f(X_{(i)})(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица (здесь $X_{(0)} := 0$).

Задача 2. (I–V; 14, 6) Летящий в пространстве по случайной прямой метеорит, сталкивается с неподвижной шарообразной планетой. Точка пересечения указанной прямой с перпендикулярным ей центральным сечением планеты равномерно распределена на этом сечении. Найти математическое ожидание угла падения.

Задача 3. Пусть X — интегрируемая случайная величина и $\varphi(x) = \mathbf{E}|X - x|$, $x \in \mathbf{R}$. Верно ли, что функция φ однозначно определяет распределение X , если а) (I–II; 10) X имеет непрерывную плотность, б) (III–V; 4) X не обязательно имеет непрерывную плотность.

Задача 4. (I–V; 7, 4) Случайным образом выбирается перестановка n элементов. Найти математическое ожидание суммы квадратов длин ее циклов.

Задача 5. (I–V; 2, 4) Пусть $S_0 = 0$ и $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbf{N}$, где н.о.р. случайные величины $\{X_i, i \in \mathbf{N}\}$ принимают значения 1 и -1 с вероятностями p и q и $p < q$. Доказать, что $\mathbf{E}(\sup_{n \geq 0} S_n)^2 < \infty$.

Задача 6. (III–V; 6) Пусть $\{M_n, n \geq 0\}$ — неотрицательный мартингал. Доказать, что, попав в нуль, он с вероятностью единица из него не выйдет (т.е. $\mathbf{P}(\bigcup_{k < n} \{M_k = 0, M_n > 0\}) = 0$).

Задача 7. (I–V; 1, 2) Для каждого $n \in \mathbf{N}$ пусть $X_1^{(n)}, \dots, X_{n+1}^{(n)}$ — н.о.р. случайные величины, принимающие с равными вероятностями значения $1, \dots, n$. Пусть τ_n — это первый номер $i \in \{2, \dots, n+1\}$, для которого в наборе $\{X_1^{(n)}, \dots, X_i^{(n)}\}$ присутствуют хотя бы два совпадающих значения. Доказать, что последовательность $\tau_n/\sqrt{n}$ сходится по распределению к некоторой случайной величине Y , и найти ее плотность.