Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. III, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 1, 37–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 03:04:59

© 2013 г. БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.*

ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ. III¹⁾

Настоящая работа является продолжением [1]. Она состоит из двух разделов. Раздел 6 содержит изложение результатов, аналогичных тем, что получены в разделах 4, 5, но теперь в пространстве функций ограниченной вариации с более сильной, чем в $\mathbb{D}$, метрикой. В разделе 7 получены так называемые условные принципы больших уклонений для траекторий одномерных случайных блужданий при локализованном положении блуждания в последний момент. В качестве следствия получена версия теоремы Санова о больших уклонениях эмпирических распределений.

Ключевые слова и фразы: расширенный принцип больших уклонений в пространстве функций ограниченной вариации; локальный принцип больших уклонений; интегро-локальные теоремы Гнеденко и Стоуна–Шеппа; теорема Санова; большие уклонения эмпирических распределений.

6. Принципы больших уклонений в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$.

6.1. Пространство $\mathbb{V}$ и метрика $\rho_{\mathbb{V}}$. Если сузить функциональное пространство $\mathbb{D}$ до подпространства $\mathbb{V} \subset \mathbb{D}$ функций ограниченной вариации, то вместо метрики ρ можно использовать метрику $\rho_{\mathbb{V}}$ (см. ниже), в известном смысле более адекватную природе рассматриваемых задач. В пространстве $\mathbb{V}$ эта метрика слабее метрики Скорохода $\rho_{\mathbb{D}}$, но сильнее метрики ρ ; в пространстве $\mathbb{C}_a \subset \mathbb{V}$ метрики $\rho_{\mathbb{V}}$ и $\rho_{\mathbb{D}}$ эквивалентны (см. лемму 6.1 ниже). Метрика $\rho_{\mathbb{V}}$ определяется следующим образом (на самом деле это псевдометрика, как и ρ ; см. комментарии в п. 3.2, после определения метрики ρ).

Для графика Γf функции f из множества $V_z := \{f \in \mathbb{V}: f(0) = 0, \text{Var } f \leq z\}$ мы рассмотрим параметрическое задание, используя в качестве параметра длину траектории. Если $\text{Var } f \leq z$, то длина l_f траектории Γf лежит в пределах $[1, 1 + z]$. Пусть $\Gamma f(l) \in \mathbb{R}^{d+1}$ — точка на графике Γf , удаленная *вдоль траектории* Γf от начала координат на расстояние l . Тогда первая координата $\Gamma f(l)_{(1)}$ вектора $\Gamma f(l)$ есть

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00285 и гранта РНП.2.1.1.346.

«момент времени» $t(l)$, в который длина траектории Γf достигает значения l . Нумерация остальных координат $\Gamma f(l)$ при $i \geq 2$ отличается от нумерации координат f сдвигом на единицу.

В частности, для $f \in \mathbb{C}_a \subset \mathbb{V}$ длина траектории Γf на отрезке $[0, t]$ определяется интегралом

$$L_f(t) := \int_0^t \sqrt{|f'(u)|^2 + 1} du.$$

Это есть возрастающая непрерывная функция, принимающая значения из отрезка $[0, l_f]$. Поэтому существует обратная к $L_f(t)$ функция $t_f(l)$, $0 \leq l \leq l_f$, и мы можем параметрическое задание траектории Γf , о котором шла речь выше, представить в виде

$$\Gamma f(l) = (t_f(l), f(t_f(l))), \quad 0 \leq l \leq l_f. \quad (6.1)$$

Вернемся к общему случаю. Мы будем говорить, что $\rho_{\mathbb{V}}(f, g) < \varepsilon$, если найдется непрерывная монотонная функция $q = q(t): [0, l_f] \rightarrow [0, l_g]$ такая, что

$$\sup_{l \in [0, l_f]} |\Gamma f(l) - \Gamma g(q(l))| < \varepsilon.$$

Другими словами,

$$\rho_{\mathbb{V}}(f, g) := \inf_{q \in \mathcal{Q}(l_f, l_g)} \sup_{l \in [0, l_f]} |\Gamma f(l) - \Gamma g(q(l))|,$$

где $\mathcal{Q}(l_f, l_g)$ — класс всех непрерывных монотонных отображений $[0, l_f]$ в $[0, l_g]$. Если ввести нормированные длины l/l_f и l/l_g кривых Γf и Γg соответственно, то определение $\rho_{\mathbb{V}}(f, g)$ можно переписать в виде

$$\rho_{\mathbb{V}}(f, g) = \inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_{0 \leq v \leq 1} |\Gamma f(v l_f) - \Gamma g(q(v) l_g)|, \quad (6.2)$$

где $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(1, 1)$ — класс непрерывных монотонных отображений $[0, 1]$ в $[0, 1]$. Теперь этот класс не зависит от f, g .

Убедимся, что метрика ρ слабее метрики $\rho_{\mathbb{V}}$, а метрика $\rho_{\mathbb{V}}$ слабее метрики $\rho_{\mathbb{D}}$. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1. Для любых $f, g \in \mathbb{V}$ выполняются неравенства

$$\rho(f, g) \leq \rho_{\mathbb{V}}(f, g) \leq \sqrt{2} \rho_{\mathbb{D}}(f, g). \quad (6.3)$$

Для любых $f, g \in \mathbb{C}_a$

$$\rho_{\mathbb{V}}(f, g) \geq \rho_{\mathbb{D}}(f, g). \quad (6.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $f, g \in \mathbb{C}_a$. Тогда, в силу представления (6.1) и определения (6.2), имеем

$$\rho_{\mathbb{V}}(f, g) = \inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_{0 \leq v \leq 1} \sqrt{|t_f(vl_f) - t_g(q(v)l_g)|^2 + |f(t_f(vl_f)) - g(t_g(q(v)l_g))|^2}.$$

Если для функции $u = u(v) := t_f(vl_f)$ и для произвольной функции $q_0 = q_0(u) \in \mathcal{Q}$ взять функцию

$$q(v) := \frac{1}{l_g} t_g^{(-1)}(q_0(t_f(vl_f))) = \frac{1}{l_g} t_g^{(-1)}(q_0(u(v))) \in \mathcal{Q}, \quad (6.5)$$

то получим

$$t_g(q(v)l_g) = q_0(u(v)),$$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{V}}(f, g) &\leq \sup_{0 \leq v \leq 1} \sqrt{|u(v) - q_0(u(v))|^2 + |f(u(v)) - g(q_0(u(v)))|^2} \\ &= \sup_{0 \leq u \leq 1} \sqrt{|u - q_0(u)|^2 + |f(u) - g(q_0(u))|^2} \\ &\leq \sqrt{2} \max \left\{ \sup_{0 \leq u \leq 1} |u - q_0(u)|, \sup_{0 \leq u \leq 1} |f(u) - g(q_0(u))| \right\}. \end{aligned}$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по $q_0 \in \mathcal{Q}$, получим $\sqrt{2}\rho_{\mathbb{D}}(f, g)$. Правое неравенство в (6.3) установлено.

Заметим далее, что

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{D}}(f, g) &= \inf_{q_0 \in \mathcal{Q}} \max \left\{ \sup_{0 \leq u \leq 1} |u - q_0(u)|, \sup_{0 \leq u \leq 1} |f(u) - g(q_0(u))| \right\} \\ &\leq \inf_{q_0 \in \mathcal{Q}} \sup_{0 \leq u \leq 1} \sqrt{|u - q_0(u)|^2 + |f(u) - g(q_0(u))|^2}. \end{aligned}$$

Если для функции $u = u(v) := t_g(vl_g)$ и для произвольной функции $q = q(v) \in \mathcal{Q}$ взять функцию (ср. с (6.5))

$$q_0(u) := t_g(q(v(u))l_g) \in \mathcal{Q}, \quad \text{где } v(u) := \frac{1}{l_g} t_g^{(-1)}(u),$$

то получим

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{D}}(f, g) &\leq \sup_{0 \leq u \leq 1} \sqrt{|u - q_0(u)|^2 + |f(u) - g(q_0(u))|^2} \\ &= \sup_{0 \leq v \leq 1} \sqrt{|u(v) - q_0(u(v))|^2 + |f(u(v)) - g(q_0(u(v)))|^2} \\ &= \sup_{0 \leq v \leq 1} \sqrt{|t_f(vl_f) - t_g(q(v)l_g)|^2 + |f(t_f(vl_f)) - g(t_g(q(v)l_g))|^2}. \end{aligned}$$

Минимизируя по $q \in \mathcal{Q}$ правую часть последнего неравенства, получаем (6.4).

Покажем теперь, что правое неравенство в (6.3) справедливо для любых $f, g \in \mathbb{V}$. Для этого достаточно заметить, что всегда найдется плотная последовательность $\{t_R\}$ разбиений отрезка $[0, 1]$ (см. п. 2.2.1) такая, что одновременно

$$\sqrt{2}\rho_{\mathbb{D}}(f, g) \geq \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \sqrt{2}\rho_{\mathbb{D}}(f^{t_R}, g^{t_R}), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{V}}(f^{t_R}, g^{t_R}) = \rho_{\mathbb{V}}(f, g), \quad (6.6)$$

где f^{t_R}, g^{t_R} — непрерывные ломаные, спрямляющие функции f, g соответственно и построенные с помощью разбиения t_R . Поскольку правая часть первого соотношения в (6.6) не меньше, чем левая часть второго соотношения в (6.6), то правое неравенство в (6.3) установлено. Левое неравенство в (6.3) очевидно, поэтому лемма 6.1 доказана.

Из леммы 6.1 вытекает, что имеют место следующие соотношения в пространстве $\mathbb{V}$: $\mathbb{V} \cap (f)_{\mathbb{D}, \varepsilon/\sqrt{2}} \subset (f)_{\mathbb{V}, \varepsilon} \subset (f)_{\varepsilon}$, где $(f)_{\mathbb{D}, \varepsilon}$ и $(f)_{\mathbb{V}, \varepsilon}$ суть ε -окрестности точки f в метриках $\rho_{\mathbb{D}}$ и $\rho_{\mathbb{V}}$ соответственно. Следовательно, сходимость в метрике Скорохода влечет за собой сходимость в метрике $\rho_{\mathbb{V}}$, а сходимость в метрике $\rho_{\mathbb{V}}$ влечет сходимость в метрике ρ . Поэтому все свойства функционала $J(f)$ в теореме 5.1 сохраняют свою силу, если метрику ρ заменить на метрику $\rho_{\mathbb{V}}$.

6.2. Вполне ограниченные множества в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$.

Лемма 6.2. Для любого $z \geq 0$ множество $V_z := \{f \in \mathbb{V} : f(0) = 0, \text{Var } f \leq z\}$ вполне ограничено в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$.

Доказательство. Функция $\Gamma f(ul_f)$, $u \in [0, 1]$, обладает следующими свойствами:

- (а) первая координата $t(ul_f)$ не убывает с ростом u ;
- (б) все координаты меняются непрерывно с ростом u ;
- (в) скорость роста каждой из координат по модулю не превосходит $l_f \leq \text{Var } f + 1$.

Следовательно, класс функций $\{\Gamma f(ul_f), 0 \leq u \leq 1 : f \in V_z\}$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $z + 1$ по каждой координате. Поскольку это условие определяет вполне ограниченное множество в пространстве непрерывных функций с равномерной нормой, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется N функций $f_1, \dots, f_N$ из V_z таких, что для любой функции $f \in V_z$

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq N} \rho_{\mathbb{V}}(f, f_i) &= \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_{0 \leq u \leq 1} |\Gamma f(ul_f) - \Gamma f_i(q(u)l_{f_i})| \\ &\leq \min_{1 \leq i \leq N} \sup_{0 \leq u \leq 1} |\Gamma f(ul_f) - \Gamma f_i(ul_{f_i})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что множество V_z вполне ограничено в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$. Лемма доказана.

Мы можем доказать теперь леммы 5.1 и 5.3, сформулированные и использованные в разделе 5.

Доказательство леммы 5.1. Поскольку метрика ρ слабее метрики $\rho_{\mathbb{V}}$ в подпространстве $\mathbb{V}$, то в силу леммы 6.2 множество V_z , будучи вполне ограниченным в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$, будет вполне ограниченным и в пространствах $(\mathbb{V}, \rho)$, $(\mathbb{D}, \rho)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 5.3. Поскольку в силу леммы 6.1 метрика $\rho_{\mathbb{D}}$ эквивалентна метрике $\rho_{\mathbb{V}}$ в подпространстве $\mathbb{C}_a \subset \mathbb{V}$, то в силу леммы 6.2 множество $V_z \cap \mathbb{C}_a$ вполне ограничено в пространстве $(\mathbb{C}_a, \rho_{\mathbb{D}})$, а значит, и в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{D}})$. Лемма доказана.

6.3. Локальный и расширенный принципы больших уклонений в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$. Пусть процесс s_n^- принимает значения в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ и при этом, как и прежде, для любого $h > 0$ выполняется соотношение (ср. с (3.14))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{V}}(s_n^-, s_n) > h) = -\infty. \quad (6.7)$$

Все основные утверждения разделов 4, 5 для процесса s_n^- в $(\mathbb{D}, \rho)$, относящиеся к л.п.б.у. и р.п.б.у., сохраняют свою силу и в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$. Более точно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 6.1. *Для процесса s_n^- всегда справедлив л.п.б.у. в $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ с параметрами (n, J) .*

Теорема 6.2. (i) *Если выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, то для любого измеримого множества B*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B) \leq -J(B_{\mathbb{V}}+), \quad (6.8)$$

где $J(B_{\mathbb{V}}+) := \lim_{\delta \rightarrow 0} J((B)_{\mathbb{V}, \delta})$.

(ii) *Всегда справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B) \geq -J((B)_{\mathbb{V}}),$$

где $(B)_{\mathbb{V}}$ — открытая внутренность множества B относительно метрики $\rho_{\mathbb{V}}$.

Теорема 6.2 означает, что при выполнении условия $[\mathbf{C}_0]$ для s_n^- справедлив р.п.б.у. в $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ с параметрами (n, J) .

Доказательство теоремы 6.1. *Оценка сверху.* В силу леммы 6.1 для любых $f \in \mathbb{C}_a$, $\gamma > 0$ имеют место включения

$$(f)_{\mathbb{V}, \gamma} \cap \mathbb{C}_a \subset (f)_{\mathbb{D}, \sqrt{2}\gamma} \cap \mathbb{C}_a \subset (f)_{\mathbb{V}, \sqrt{2}\gamma} \cap \mathbb{C}_a \subset (f)_{\mathbb{V}, \sqrt{2}\gamma}.$$

Поэтому из утверждения теоремы 5.7 (см. неравенство (5.6)) вытекает следующее утверждение в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$: для любых $f \in \mathbb{L}$, $\varepsilon > 0$,

$n \in \{1, 2, \dots\}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s_n \in (f)_{\mathbb{V}, \varepsilon}) &\leq \mathbf{P}(s_n \in (f)_{\mathbb{D}, \sqrt{2}\varepsilon}) \\ &\leq H_f(\sqrt{2}\varepsilon) \max\{2L, 1\} n^{2L} \exp\{-nI_a((f)_{\mathbb{D}, \sqrt{2}\varepsilon})\} \\ &\leq H_f(\sqrt{2}\varepsilon) \max\{2L, 1\} n^{2L} \exp\{-nI_a((f)_{\mathbb{V}, \sqrt{2}\varepsilon})\}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

в которых константы $L, H_f(\sqrt{2}\varepsilon)$ — из теоремы 5.7. Из (6.9) вытекает для любых $f \in \mathbb{L}$, $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_{\mathbb{V}, \varepsilon}) \leq -I_a((f)_{\mathbb{V}, \sqrt{2}\varepsilon}). \quad (6.10)$$

Поскольку класс $\mathbb{L}$ всюду плотен в метрическом пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$, то неравенство, аналогичное (6.10), имеет место для любых функций f из пространства $\mathbb{V}$. Используя далее (6.7), получаем для любых $f \in \mathbb{V}$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_{\mathbb{V}, \varepsilon}) \leq -I_a((f)_{\mathbb{V}, \delta + 5\sqrt{2}\varepsilon}) \leq -J((f)_{\mathbb{V}, \delta + 5\sqrt{2}\varepsilon}), \quad (6.11)$$

т.е. оценку сверху для s_n^- в локальном п.б.у. в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ при $\delta(\varepsilon) > 5\sqrt{2}\varepsilon$, $\beta(\varepsilon) = 0$.

Доказательство оценки снизу для s_n^- в локальном п.б.у. в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_{\mathbb{V}, \varepsilon}) \geq -J(f)$$

для любых $\varepsilon > 0$, $f \in \mathbb{V}$ осуществляется точно так же, как при доказательстве теорем 4.1, 5.4. Теорема 6.1 доказана.

Доказательство теоремы 6.2. (i) Для доказательства утверждения (i) нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6.3. Пусть выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$. Тогда для s_n^- в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ выполнено условие $[\mathbf{TB}]$.

Доказательство. Из леммы 6.2 вытекает (см. доказательство леммы 5.2), что для s_n в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ выполнено условие $[\mathbf{TB}]_0$. Отсюда, в силу (6.7) получаем, что для s_n^- в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ выполнено условие $[\mathbf{TB}]$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству утверждения (i) теоремы 6.2. В силу теоремы 1.2 из свойств (6.11) и $[\mathbf{TB}]$, которыми обладает последовательность s_n^- , вытекает (6.8).

(ii) В силу теоремы 1.2 утверждение (ii) для s_n^- вытекает из л.п.б.у. (см. теорему 6.1). Теорема 6.2 доказана.

Аналогично тому, как это делалось в разделе 4, нетрудно установить также, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3. *Если множество B выпукло или $B \subset V_z$ при некотором $z < \infty$, то условие $[C_0]$ в утверждении теоремы 6.2 излишне.*

В известном смысле утверждение р.п.б.у. в $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ сильнее аналогичного утверждения в $(\mathbb{D}, \rho)$, так как разность между верхними и нижними пределами в теореме 6.2, равная $J([B]_{\mathbb{V}}+) - J((B)_{\mathbb{V}})$, не превосходит (но может оказаться и меньше) соответствующей разности для р.п.б.у. в $(\mathbb{D}, \rho)$. Некоторым недостатком рассуждений в $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ можно считать сужение пространства $\mathbb{D}$. Но это сужение представляется несущественным, так как $J(f) = \infty$ при $f \notin \mathbb{V}$ и нижние грани $J(B) = \inf_{f \in B} J(f)$ обладают свойством $J(B) = J(B\mathbb{V})$.

Различие между метриками ρ и $\rho_{\mathbb{V}}$ можно проиллюстрировать на следующем примере. Последовательность функций

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ n(t - 1/2) & \text{при } 1/2 < t \leq 1/2 + 1/n, \\ 1 & \text{при } 1/2 + 1/n < t \leq 1, \end{cases}$$

сходится к функции

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 1 & \text{при } 1/2 < t \leq 1, \end{cases}$$

в обеих метриках ρ и $\rho_{\mathbb{V}}$. Но последовательность функций f_n^* , которые имеют на отрезке $[1/2, 1/2 + 1/n]$ не одно, а три колебания между уровнями 0 и 1 (два вверх и одно вниз), будет сходиться к f только в метрике ρ , в то время как $\rho_{\mathbb{V}}(f_n^*, f) \geq 1$. Такое различие между метриками будет сказываться в л.п.б.у., так как при $2/n < \varepsilon$, малых ε и достаточно больших n

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f_n^*)_{\mathbb{V}, \varepsilon}) \leq \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f_n^*)_{\varepsilon}) + b$$

при некотором $b > 0$, но, по-видимому, не будет сказываться в «интегральных» теоремах, так как $\inf_{f \in B} J(f)$ будет осуществляться за счет более «спрямленных» траекторий, так что траектории вида f_n^* не будут вносить значимый вклад в асимптотику $\mathbf{P}(s_n^- \in B)$.

В приведенном примере последовательность f_n^* принадлежит V_z при $z = 3$ (если колебания прямолинейны). Она является фундаментальной в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$, но ни к чему не сходится в $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что пространство $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ не полно, а множество V_z не замкнуто и не является компактным. Последнее обстоятельство означает, что первый подход к получению р.п.б.у. из л.п.б.у., названный в разделе 1, здесь неприменим. Поэтому нам понадобились для доказательства р.п.б.у. второй подход (см. раздел 1) и равномерные оценки сверху в л.п.б.у.

З а м е ч а н и е 6.1. Поскольку метрики $\rho_{\mathbb{V}}$ и $\rho_{\mathbb{D}}$ на классе $\mathbb{C}_a$ эквивалентны и при этом множество $\mathbb{C}_a$ всюду плотно в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{D}})$, то утверждения теорем 6.1–6.3 полностью сохраняются, если в них пространство $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{V}})$ заменить на пространство $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{D}})$.

7. Условные принципы больших уклонений в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$.

7.1. Условные п.б.у. в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$. В настоящем разделе для упрощения формулировок и доказательств мы ограничимся рассмотрением одномерного случая $d = 1$. Мы будем рассматривать аналоги п.б.у. для условных вероятностей $\mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon)$ при условии, что конец траектории s_n^- локализован в ε -окрестности $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ точки b .

Начнем с л.п.б.у. В дальнейшем мы будем предполагать b таким, что $\Lambda(b) < \infty$, так что в силу л.п.б.у. вероятность условия $\mathbf{P}(s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon)$ положительна при всех $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n .

Аналог л.п.б.у. имеет следующий вид.

Теорема 7.1. Пусть $x/n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любой функции $f \in \mathbb{D}$ такой, что $f(1) = b$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) = -J(f) + \Lambda(b). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Соотношение (7.1) можно назвать условным л.п.б.у. для траектории s_n^- с локализованным концом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Оценка сверху.* Для $f \in \mathbb{D}$, $f(1) = b$, имеем

$$\mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) \leq \frac{\mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon)}{\mathbf{P}(s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon)}.$$

Кроме того, в силу л.п.б.у. для $s_n^-(1)$ при $x \sim n$ выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) = -\Lambda(b). \quad (7.2)$$

Поэтому непосредственно из л.п.б.у. для s_n^- (теорема 4.1) получаем оценку сверху.

Оценка снизу по существу повторяет доказательство оценки снизу в теореме 4.1. Пусть f_k , $k = 1, 2, \dots$, — последовательность непрерывных ломаных, построенных по узловым точкам $(j/k, f(j/k))$, $j = 0, 1, \dots, k$. Тогда $\rho(s_n^-, f) \leq \rho(s_n^-, s_n) + \rho(s_n, f_k) + \rho(f_k, f)$. Выберем k_ε так, чтобы при всех $k > k_\varepsilon$ выполнялось неравенство $\rho(f_k, f) < \varepsilon/3$, и n_0 настолько большим, чтобы при $n \geq n_0$ для множества

$$A_\varepsilon := \left\{ \rho(s_n^-, s_n) < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

и для любой функции f такой, что $J(f) < \infty$, согласно (3.14) выполнялось неравенство

$$\mathbf{P}(\overline{A_\varepsilon}) \leq e^{-2nJ(f)}. \quad (7.3)$$

Тогда, если $\rho_{\mathbb{C}}(s_n, f_k) < \varepsilon/3$, то $\rho(s_n, f_k) < \varepsilon/3$ и на множестве A_ε выполнены неравенство $\rho(s_n^-, f) < \varepsilon$ и включение $s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\rho(s_n^-, f) < \varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) &\geq \mathbf{P}(\rho(s_n^-, f) < \varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon, A_\varepsilon) \\ &\geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{C}}(s_n, f_k) < \frac{\varepsilon}{3}, A_\varepsilon) \geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{C}}(s_n, f_k) < \frac{\varepsilon}{3}) - \mathbf{P}(\overline{A_\varepsilon}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из оценки сверху в л.п.б.у. для непрерывных траекторий s_n и из соотношения (7.3) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\rho(s_n^-, f) < \varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) \geq -I(f_k),$$

где значение $I(f_k)$ выбором $k \geq k_\varepsilon$ может быть сделано сколь угодно близким к $J(f)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 7.1. Приведенные в доказательстве рассуждения будут использоваться ниже в доказательстве теоремы 7.3. Если бы не это обстоятельство, то можно было бы воспользоваться следующим более простым и кратким доказательством оценки снизу.

Поскольку множество $G_\varepsilon := \{g \in \mathbb{D} : g \in (f)_\varepsilon, g(1) \in (b)_\varepsilon\}$ открыто в $(\mathbb{D}, \rho)$ и $f \in G_\varepsilon$, то в силу теоремы 4.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\rho(s_n^-, f) < \varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) \geq -J(G_\varepsilon) \geq -J(f).$$

Теорема доказана.

Для того чтобы несколько упростить рассуждения и формулировки дальнейших утверждений, введем в рассмотрение предположение, которое выполнено во всех известных нам примерах, представляющих интерес в прикладных задачах. Пусть $\mathbb{D}[0, 1)$ — сужение пространства функций на *полуинтервал* $[0, 1)$ с равномерной метрикой. При данных b и $\varepsilon > 0$ обозначим через B_- множество функций $f_- \in \mathbb{D}[0, 1)$ таких, что при каком-нибудь $a \in (b)_\varepsilon$ справедливо $f_- \times \{f(1) = a\} \in B$. Условие на множество B при данных b и $\varepsilon > 0$ имеет следующий вид.

[B, b]. *Имеют место вложения:*

$$B \cap \{f(1) \in (b)_\varepsilon\} \subset B_- \times \{f(1) \in (b)_\varepsilon\}; \quad (7.5)$$

$$B_- \times \{f(1) = b\} \subset B \cap E^{(b)} =: B^{(b)}, \quad (7.6)$$

где $E^{(b)} := \{f \in \mathbb{D} : f(1) = b\}$.

Соотношение (7.5) можно записать в более общей форме

$$\mathbf{P}(s_n^- \in B \cap \{f(1) \in (b)_\varepsilon\}) \leq \mathbf{P}(s_n^- \in B_- \times \{f(1) \in (b)_\varepsilon\}). \quad (7.7)$$

Условие $[\mathbf{B}, \mathbf{b}]$ означает, грубо говоря, что «конец» $f(1)$ траектории $f(\cdot)$ при $f(1) \in (b)_\varepsilon$ «мало влияет» на принадлежность f множеству B . Условие $[\mathbf{B}, \mathbf{b}]$ выполнено, например, для множеств

$$B := \left\{ f: \sup_{t \in [0,1]} (f(t) - g(t)) > 0 \right\},$$

где функция g обладает свойствами $\inf_{t \in [0,1]} g(t) > 0$, $g(1) > b$, и множеств

$$B := \left\{ f: \int_0^1 G(f(t)) dt > v \right\},$$

где G — произвольная измеримая функция.

В первом примере

$$B_- = \left\{ f_- \in \mathbb{D}[0, 1): \sup_{0 \leq t < 1} (f(t) - g(t)) > 0 \right\}.$$

Поэтому при $\varepsilon < g(1) - b$ соотношения (7.5)–(7.7) выполнены очевидным образом.

Во втором примере

$$B_- = \left\{ f_- \in \mathbb{D}[0, 1): \int_0^{1-0} G(f(t)) dt > v \right\}.$$

Так как при любом значении $f(1)$

$$\int_0^{1-0} G(f(t)) dt = \int_0^1 G(f(t)) dt,$$

то соотношения (7.5)–(7.7) также выполнены очевидным образом.

Условие $[\mathbf{B}, \mathbf{b}]$ выполнено не всегда, на что указывает следующий пример. Пусть $B = B_1 \cup B_2$, где

$$\begin{aligned} B_1 &= \{f \in \mathbb{D}: \rho_{\mathbb{C}}(f, 0) < \delta, f(1) \neq 0\}, \\ B_2 &= \{f \in \mathbb{D}: \rho_{\mathbb{C}}(f, g) < \delta, f(1) = 0\} \end{aligned} \tag{7.8}$$

для заданной функции $g \not\equiv 0$, $g(1) = 0$. Здесь

$$B_- = \{f \in \mathbb{D}: \rho_{\mathbb{C}}(f, 0) < \delta\} \cup \{f \in \mathbb{D}: \rho_{\mathbb{C}}(f, g) < \delta\}.$$

Поэтому множество $B_- \times \{f(1) = 0\}$ при достаточно малом $\delta > 0$ не вложено в множество $B \cap E^{(0)} = B_2$ и, стало быть, условие $[\mathbf{B}, \mathbf{b}]$ при $b = 0$ не выполнено.

Сформулируем теперь аналог р.п.б.у.

Теорема 7.2. Пусть $x/n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и B — измеримое множество.

(i) Если выполнены условия $[C_0]$, $[B, b]$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) \leq -J(B^{(b)+}) + \Lambda(b). \quad (7.9)$$

(ii) Всегда справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) \geq -J((B)^{(b)}) + \Lambda(b).$$

(iii) Если выполнены условия $[C_0]$, $[B, b]$, то для множества B , удовлетворяющего условию «непрерывности»

$$J(B^{(b)+}) = J((B)^{(b)}) = J(B^{(b)}),$$

справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) = -J(B^{(b)}) + \Lambda(b).$$

Заметим, что если $\mathbf{E} \xi = b = 0$, то в приведенном выше примере (7.8) левая часть неравенства (7.9) по усиленному закону больших чисел равна нулю. Так как $B^{(0)} = B_2$ в этом примере, то правая часть (7.9) равна $-J(B_2+) < 0$ при достаточно малом $\delta > 0$. Это означает, что для рассматриваемого примера утверждение (7.9) неверно, так что условие $[B, b]$ является существенным для справедливости теоремы 7.2.

Если условие $[B, b]$ не выполнено, то возможны иные, более громоздкие оценки сверху левой части в (7.9).

Доказательство теоремы 7.2. Оценка сверху. Если выполнено первое условие $[B, b]$, то

$$\mathbf{P}(s_n^- \in B \cap \{f(1) \in (b)_\varepsilon\}) \leq \mathbf{P}(s_n^- \in B_- \times \{f(1) \in (b)_\varepsilon\}).$$

Так как множества B_- и $\{f(1) \in (b)_\varepsilon\}$ определяются «независимыми» координатами, то справедливы следующие соотношения:

$$B_- \times \{f(1) \in (b)_\varepsilon\} \subset (B_-)_{\mathbb{C}, \varepsilon} \times \{f(1) \in (b)_\varepsilon\} = (B_- \times \{f(1) = b\})_{\mathbb{C}, \varepsilon}.$$

В силу (7.6) правая часть этого соотношения вложена в $(B^{(b)})_{\mathbb{C}, \varepsilon} \subset (B^{(b)})_\varepsilon$. Поэтому $\mathbf{P}(s_n^- \in B \cap \{f(1) \in (b)_\varepsilon\}) \leq \mathbf{P}(s_n^- \in (B^{(b)})_\varepsilon)$. К правой части этого неравенства применимы все проведенные выше рассмотрения для $\mathbf{P}(s_n^- \in B)$, так что в силу теоремы 4.2 (оценки сверху в р.п.б.у.)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (B^{(b)})_\varepsilon) &\leq -J((B^{(b)})_\varepsilon+) \leq -J((B^{(b)})_{2\varepsilon}), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (B^{(b)})_\varepsilon) &\leq -J(B^{(b)+}). \end{aligned}$$

Вместе с (7.2) это доказывает (7.9).

Оценка снизу. Множество $(B) \cap \{g \in \mathbb{D}: g(1) \in (b)_\varepsilon\}$ открыто в $(\mathbb{D}, \rho)$ и содержится в $B \cap \{g \in \mathbb{D}: g(1) \in (b)_\varepsilon\}$. Поэтому в силу теоремы 4.2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B, s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (B), s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon) \\ &\geq -J((B) \cap \{g \in \mathbb{D}: g(1) \in (b)_\varepsilon\}) \geq -J((B)^{(b)}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

7.2. Условные п.б.у. с концом траектории, локализованным в более узкой области. Рассмотрим теперь процессы $s_n^- = s_n^-(t)$ более частного вида, чем прежде, потребовав дополнительно, чтобы $x = n$ и выполнялись соотношения

$$s_n^- \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{S_k}{n}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

Например, ступенчатые ломаные $s_n^-(t) := (1/n)S_{[nt]}$, $0 \leq t \leq 1$, будут процессами такого вида. В ряде задач (например, при изучении эмпирических функций распределения) представляют интерес условные п.б.у. при более точной локализации конца траектории, например, для вероятностей $\mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n})$, где $\theta > 0$ фиксировано. Здесь для более точной постановки задачи следует различать нерешетчатый и арифметический случаи.

В *нерешетчатом* случае под θ мы будем понимать любое значение, заключенное в интервале (θ_1, θ_2) , где $\theta_1 = \theta_{1,n} \rightarrow 0$ достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$, $\theta_2 = \theta_{2,n} \rightarrow \infty$, $\theta_{2,n} = o(n)$.

В *арифметическом* случае мы будем рассматривать вероятность

$$\mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) = b) = \mathbf{P}(s_n^- \in B \mid S_n = bn),$$

где bn — целое число.

Если $\theta > 1$, то ответы в нерешетчатом и арифметическом случаях будут иметь один и тот же вид.

Итак, рассмотрим сначала нерешетчатый случай. Справедливы следующие условные аналоги п.б.у. с узкой локализацией конца траектории.

Теорема 7.3. Пусть случайная величина ξ нерешетчата, $x = n$ и выполнено условие (7.10). Тогда для любой функции $f \in \mathbb{D}$, $f(1) = b$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) = -J(f) + \Lambda(b). \end{aligned}$$

Условный аналог р.п.б.у. с локализацией конца траектории в $(b - \theta/n, b + \theta/n)$ имеет следующий вид.

Теорема 7.4. Пусть случайная величина ξ нерешетчатая, $x = n$, выполнено условие (7.10) и B — любое измеримое множество.

(i) Если выполнены условия $[C_0]$, $[B, b]$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \leq -J(B^{(b)+}) + \Lambda(b).$$

(ii) Всегда имеет место неравенство

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \geq -J((B)^{(b)}) + \Lambda(b).$$

(iii) Если выполнены условия $[C_0]$, $[B, b]$, то для множества B , удовлетворяющего условию «непрерывности»

$$J(B^{(b)+}) = J((B)^{(b)}) = J(B^{(b)}),$$

справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) = -J(B^{(b)}) + \Lambda(b).$$

Для доказательства теорем 7.3, 7.4 нам понадобится следующее дополнение к л.п.б.у. (7.2) для S_n (см. [7, лемма 5.2]).

Лемма 7.1. Пусть ξ — нерешетчатая случайная величина и $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) = -\Lambda(b). \quad (7.11)$$

Доказательство теоремы 7.3. Оценка сверху. Так как

$$\mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \leq \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon),$$

то из (7.11) и л.п.б.у. для s_n^- следует требуемая оценка сверху.

Оценка снизу для $\mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n})$ в основном повторяет рассуждения в доказательстве оценки снизу в теореме 7.1. Но теперь вместо (7.4) будем иметь неравенство

$$\mathbf{P}(\rho(s_n^-, f) < \varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \geq \mathbf{P}\left(\rho(s_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}, s_n(1) \in (b)_{\theta/n}\right) - \mathbf{P}(\overline{A_\varepsilon}).$$

Здесь оценка первой вероятности в правой части повторяет, в свою очередь, оценки в доказательстве теоремы 2.3, с той лишь разницей, что теперь следует оценивать вероятности попадания приращений $S_{kn\Delta} - S_{(k-1)n\Delta}$ (на сегментах разбиения $\{k\Delta, k \leq 1/\Delta\}$) в соответствующие интервалы ширины $2\theta\Delta$. А для этого следует воспользоваться леммой 7.1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 7.4. Оценка сверху. Так как при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}(s_n^- \in B, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \leq \mathbf{P}(s_n^- \in B, s_n^-(1) \in (b)_\varepsilon),$$

то доказательство оценки сверху повторяет доказательство нужной оценки в теореме 7.2.

Оценка снизу. Для любой функции $f \in (B)$, $f(1) = b$, и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\mathbf{P}(s_n^- \in B, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \geq \mathbf{P}(s_n^- \in (f)_\varepsilon, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}).$$

Используя оценку снизу в теореме 7.3, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \geq -J(f) + \Lambda(b).$$

Повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 1.1, позволяющие из оценки снизу из л.п.б.у. получить оценку снизу в р.п.б.у., заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n^- \in B, s_n^-(1) \in (b)_{\theta/n}) \geq -J((B)^{(b)}) + \Lambda(b).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь *арифметический* случай. Справедливы следующие условные аналоги п.б.у. с фиксацией конца траектории.

Теорема 7.5. Пусть случайная величина ξ имеет арифметическое распределение, $x = n$ и выполнено условие (7.10). Тогда для любой функции $f \in \mathbb{D}$ такой, что $f(1) = b$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) = \frac{[bn]}{n}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(s_n^- \in (f)_\varepsilon \mid s_n^-(1) = \frac{[bn]}{n}\right) = -J(f) + \Lambda(b). \end{aligned}$$

Условный аналог р.п.б.у. с фиксацией конца траектории имеет следующий вид.

Теорема 7.6. Пусть случайная величина ξ имеет арифметическое распределение, $x = n$ и выполнено условие (7.10), B — измеримое множество.

(i) Если выполнены условия $[C_0]$, $[B, b]$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) = \frac{[bn]}{n}\right) \leq -J(B^{(b)+}) + \Lambda(b).$$

(ii) Всегда справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(s_n^- \in B \mid s_n^-(1) = \frac{[bn]}{n}\right) \geq -J((B)^{(b)}) + \Lambda(b).$$

(iii) Если выполнены условия $[\mathbf{C}_0]$, $[\mathbf{B}, \mathbf{b}]$, то для множества B , удовлетворяющего условию «непрерывности» $J(B^{(b)+}) = J((B)^{(b)}) = J(B^{(b)})$, справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left(\bar{s}_n \in B \mid \bar{s}_n(1) = \frac{[bn]}{n} \right) = -J(B^{(b)}) + \Lambda(b).$$

Доказательство теорем 7.5 и 7.6 аналогично приведенным выше доказательствам теорем 7.3 и 7.4. Нужно лишь в соответствующих местах вместо леммы 7.1 использовать следующее утверждение (см. [7, лемма 5.2]).

Лемма 7.2. Пусть ξ — арифметическая случайная величина. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left(\bar{s}_n(1) = \frac{[nb]}{n} \right) = -\Lambda(b).$$

7.3. Версии теоремы Санова. Пусть $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из равномерного на отрезке $[0, 1]$ распределения F . Пусть, далее, $\Pi_n(t)$ — пуассоновский процесс на $[0, n]$ с параметром 1. Тогда известно, что распределение $F_n(t)$ совпадает с распределением $\pi_n(t) := \Pi_n(nt)/n$ при условии $\Pi_n(n) = n$ ($\pi_n(1) = 1$). При этом $\pi_n(t)$ можно рассматривать как случайный процесс $\bar{s}_n(t)$, проходящий через узловые точки

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n, \quad \text{где } S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i,$$

ξ_i независимы и имеют распределение Пуассона с параметром 1, так что условие $[\mathbf{C}_0]$ выполнено. Нетрудно видеть, что здесь условие (3.14) также выполнено, $\Lambda(\alpha) = \alpha(\ln \alpha - 1) + 1$ при $\alpha \geq 0$; $\Lambda(\alpha) = \infty$ при $\alpha < 0$. Пусть $\mathbb{F}$ — класс функций распределения на $[0, 1]$. Метрика ρ в $\mathbb{F}$ эквивалентна метрике Леви. Для любой функции $G \in \mathbb{F}$, абсолютно непрерывной относительно F , получаем

$$J(G) = \int_0^1 G'(t)(\ln G'(t) - 1) dt + 1 = \int_0^1 \ln \frac{dG(t)}{dF(t)} dG(t),$$

так что $J(G)$ совпадает с расстоянием Кульбака–Лейблера между распределениями G и F . Кроме того, здесь $\Lambda(1) = 0$, $G(1) = 1$ для $G \in \mathbb{F}$ и для любого $B \subset \mathbb{F}$ «автоматически» выполнено условие $[\mathbf{B}, \mathbf{b}]$ при $b = 1$; при этом $B^{(1)} = B$. В результате мы получаем из теорем 7.5, 7.6 следующие версии теоремы Санова (ср. с [8]).

Теорема 7.7. (i) Для любого $G \in \mathbb{F}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(F_n \in (G)_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(F_n \in (G)_\varepsilon) = -J(G).$$

(ii) Для любого измеримого множества B

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(F_n \in B) \leq -J(B+). \quad (7.12)$$

(iii) Для любого измеримого множества B

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(F_n \in B) \geq -J((B)). \quad (7.13)$$

Известно, что в рассматриваемой задаче равномерность распределения F не является ограничением общности: F может быть любой непрерывной функцией распределения, а $\mathbb{F}$ — классом функций распределения, абсолютно непрерывных относительно F .

Отметим также, что в рассматриваемом примере выполнено условие $[\mathbf{C}_\infty]$ и множества $\{G: J(G) \leq v\}$, $v \geq 0$, будут компактными в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$. Отсюда нетрудно получить, что правые части в (7.12), (7.13) можно заменить соответственно на $-J([B]_{\mathbb{C}})$ и $-J((B)_{\mathbb{C}})$. Этот факт установлен в [9]. В теореме Санова (см. [8]) на множество B накладываются некоторые ограничения. В теореме 7.7 и в названном ее расширении ограничения отсутствуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 4, с. 627–655; 2012, т. 57, в. 1, с. 3–34.
2. Боровков А. А., Могульский А. А. Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов и для траекторий случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 1, с. 3–29.
3. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 222 с.
4. Гнеденко Б. В. О локальной предельной теореме теории вероятностей. — Успехи матем. наук., 1948, т. 3, № 3, с. 187–194.
5. Stone C. On local and ratio limit theorems. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, Part II. Berkeley: Univ. California Press, 1966, p. 217–224.
6. Shepp L. A. A local limit theorem. — Ann. Math. Statist, 1964, v. 35, p. 419–423.
7. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения для цепей Маркова в положительном квадранте. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56, № 5, с. 3–116.
8. Санов И. Н. О вероятности больших отклонений случайных величин. — Матем. сб., 1957, т. 42, № 1, с. 11–44.
9. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, № 4, с. 635–654.

Поступила в редакцию
2.VIII.2011

Исправленный вариант
14.VI.2012