Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. К. Клебанер, Р. Ш. Липцер, Когда стохастическая экспонента является мар-
тингалом. Развитие метода Бенеша, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58,
выпуск 1, 53–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 07:34:07

© 2013 г.

КЛЕБАНЕР Ф.*, ЛИПЦЕР Р.**

КОГДА СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭКСПОНЕНТА ЯВЛЯЕТСЯ
МАРТИНГАЛОМ. РАЗВИТИЕ МЕТОДА БЕНЕША¹⁾

Стохастическая экспонента $\mathfrak{z}$ локального мартингала M со скачками $\Delta M_t > -1$, т.е. $\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_{s-} dM_s$, является неотрицательным локальным мартингалом с $\mathbf{E} \mathfrak{z}_t \leq 1$. Если $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$, то $\mathfrak{z}$ — мартингал на интервале $[0, T]$. Мартингальное свойство играет важную роль во многих приложениях. Поэтому естественные и легко проверяемые условия этого свойства представляют определенный интерес. В настоящей статье условие $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ проверяется при линейном росте параметров, участвующих в определении M , предложенные И. В. Гирсановым [10] и частично реализованные В. Бенешем [3]. Предлагаемый нами метод обобщает метод Бенеша без использования его технологии кусочно-постоянной аппроксимации. Предлагаемые условия эффективны в случаях, когда условия Новикова [30] и Казамаки [18] неприменимы. Они также эффективны в случае как марковских (возможно, взрывающихся), так и не марковских процессов, порождающих мартингалы M со скачками. Наш подход отличается от недавно опубликованных подходов в статьях [5] и [29].

Ключевые слова и фразы: экспоненциальный мартингал, диффузионный процесс со скачкообразной компонентой, теорема Гирсанова, метод Бенеша.

1. Введение. Пусть $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ — мартингал (локальный мартингал) с траекториями из пространства Скорохода $\mathbb{D}$ и, значит, $M = M^c + M^d$, где M^c и M^d — непрерывный и чисто разрывный мартингалы. Обозначим $\Delta M_t := M_t - M_{t-}$ и $\langle M^c \rangle_t$ соответственно процесс скачков и предсказуемую квадратическую вариацию непрерывного мартингала M^c . Если $\Delta M_t > -1$, $t > 0$, то уравнение

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_{s-} dM_s \quad (1.1)$$

*School of Mathematical Sciences, Monash University, Australia; e-mail: fima.klebaner@sci.monash.edu.au

**Department of Electrical Engineering Systems, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel; e-mail: liptser@eng.tau.ac.il, rliptser@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке the Australian Research Council (гранты DP0881011 и DP0988483).

имеет единственное решение (см., например, [9])

$$\mathfrak{z}_t = \exp \left(M_t - \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_t \right) \prod_{s=0}^t (1 + \Delta M_s) e^{-\Delta M_s}, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

которое принято называть экспонентой Долеан-Дэд.

Хорошо известно, что $\mathfrak{z}$ — неотрицательный локальный мартингал и, значит, супермартингал с $\mathbf{E} \mathfrak{z}_t \leq 1$. Если же для некоторого $T > 0$ выполняется условие

$$\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1, \quad (1.3)$$

то $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t)_{t \in [0, T]}$ — мартингал, в частности, $\mathbf{E} \mathfrak{z}_t \equiv 1$ для любого $t \in [0, T]$. Свойство (1.3) эффективно используется в различных приложениях, где $\mathfrak{z}_T$ является производной Радона–Никодима, т.е. плотностью вероятностной меры относительно другой вероятностной меры в пространстве Скорохода. Случайная величина $\mathfrak{z}_T$ является одним из важных объектов в статистике случайных процессов (см. [26], [27]), в финансовой математике (см. [35], [36] и т.д.), при доказательстве существования слабых решений уравнений Ито (см. [33]) и других разнообразных приложениях.

Ниже приводится краткий обзор известных условий, гарантирующих равенство $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ при условии $M \equiv M^c$. В этом случае (1.3) имеет вид

$$\mathbf{E} \exp \left(M_T^c - \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_T \right) = 1.$$

И. В. Гирсанов в своей классической статье [10] потребовал выполнения условия $\langle M^c \rangle_T \leq \text{const}$. Это условие ослаблялось в разных вариантах, которые завершились условиями Новикова [30]

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{1}{2} \langle M^c \rangle_T \right) < \infty,$$

Казамаки [18]

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} \exp \left(\frac{1}{2} M_t^c \right) < \infty$$

и, наконец, Крылова [20]:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \mathbf{E} \exp \left([1 - \varepsilon] \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_T \right) &< \infty, \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} \exp \left([1 - \varepsilon] \frac{1}{2} M_t^c \right) &< \infty. \end{aligned}$$

Следует отметить, что при любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$ можно подобрать мартингал M^c , для которого $\mathbf{E} e^{(1/2-\varepsilon)\langle M^c \rangle_T} < \infty$, но (1.3) не выполнено (см. [26, р. 224]).

Рассмотрим простой пример. Пусть B_t — броуновское движение и $M_t^c = 2 \int_0^t B_s dB_s$. Тогда $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T < 1$ при $T \geq T_0$, где T_0 определяется условием $\mathbf{E} \exp(B_{T_0}^2 - T_0) = \infty$, т.е.

$$\mathbf{E} \exp \left(2 \int_0^T B_s dB_s \right) = \mathbf{E} \exp (B_T^2 - T) = \infty.$$

Значит, условие Казамаки не выполнено и, как следствие, условие Новикова также не выполнено.

Все вышеупомянутые условия, обеспечивающие выполнение (1.3), формулируются в терминах M^c и $\langle M^c \rangle$. Проверка этих условий требует весьма сложных, а подчас и неосуществимых вычислений.

Возникает естественный вопрос: как проверить (1.3) в рассматриваемом выше примере, если $T \geq T_0$? Оказывается, это можно сделать с помощью условия Бенеша [3].

Основная цель статьи — показать, что условие, называемое далее условием Бенеша, гарантирует выполнение (1.3) для достаточно общей структуры мартингала M в (1.2).

Наряду с условием Бенеша мы используем условие равномерной интегрируемости, предложенное М. Хитсудой [11].

Отметим также, что предлагаемый метод проверки свойства $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ естественным образом совместим с методом проверки свойства $\mathbf{E} \mathfrak{z}_\infty = 1$, предложенным в [14].

Другой подход в марковской модели можно найти в недавней статье [5].

Для того чтобы сформулировать наш результат, предположим, что мартингал M в (1.2) является частью структуры некоторого семимартингала X , участвующего в типичных прикладных моделях:

- 1) *невзрывающийся марковский процесс,*
- 2) *семимартингал, не являющийся марковским процессом,*
- 3) *марковский процесс, не исключающий взрыва.*

Общий случай изучается в разделе 3. В разделе 2 рассматривается случай непрерывного мартингала — более простой с технической точки зрения и допускающий применение метода Бенеша. В этом пункте мы показываем, как можно заменить доказательство Бенеша новым доказательством, обслуживающим самые разнообразные модели.

Эффективность основного результата проверяется на большом числе примеров (см. разделы 4–7).

Вспомогательный технический результат (обобщенная теорема Гирсанова) приводится в приложении А.

З а м е ч а н и е 1. Вопрос о том, является ли $\mathfrak{z}$ мартингалом, часто возникает в связи с другой проблемой. Пусть μ^X и μ^Y — вероятностные меры в пространстве Скорохода, являющиеся распределениями семимартингалов $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ и $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$ соответственно.

Возникает вопрос: когда $\mu^X \ll \mu^Y$ с производной Радона–Никодима $d\mu^Y/d\mu^X(X) = \mathfrak{z}_T$? Эти результаты можно найти в [10], [7], [12], [15], [21], [23], [26, гл. 7], [14] и более поздних статьях [33], [31], [37], [5], [29], [2] и т. д.

2. Условия Бенеша. Новый тип доказательства. В этом разделе излагаются основные идеи, имеющие отношение к вышеупомянутому примеру, не обслуживаемому условиями Новикова и Казамаки.

Мы рассматриваем два типа непрерывных мартингалов:

$$M'_t = \int_0^t \sigma(B_s) dB_s \quad \text{и} \quad M''_t = \int_0^t \sigma_s(B) dB_s,$$

где функции $\sigma(y)$ и $\sigma_s(y)$ аргументов $y \in \mathbf{R}$ и $(s, y_{[0,s]}) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{C}_{[0,\infty)}$ измеримы относительно соответствующих σ -алгебр и удовлетворяют условиям «линейного роста»:

$$\sigma^2(y) \leq r[1 + y^2], \quad (2.1)$$

$$\sigma^2(s, y_{[0,s]}) \leq r \left[1 + \sup_{s' \leq s} y_{s'}^2 \right]. \quad (2.2)$$

Как хорошо известно из оригинальной работы Бенеша [3] (см. также [17]), условие (1.3) выполнено для любого $T > 0$. Мы покажем, что этот же результат легко получить, не прибегая к технике кусочно-постоянной аппроксимации.

Утверждения теорем 2.1 и 2.2 принадлежат Бенешу. Их доказательства полностью новые.

Теорема 2.1. Пусть $M_t = M'_t$ и выполнено условие (2.1). Тогда (1.3) выполнено для любого $T > 0$.

Доказательство. Выберем $\tau_n = \inf \{t: (\mathfrak{z}_t \vee B_t^2) \geq n\}^1$, $n \geq 1$. Пишем

$$\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n} = 1 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_s \sigma(B_s) dB_s.$$

Определение τ_n и условие (2.1) гарантируют ограниченность подынтегральной функции в интеграле Ито $\int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_s \sigma(B_s) dB_s$. Значит, $\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n}$ — квадратично интегрируемый мартингал и $\mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} = 1$. Если семейство $(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n})_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо, то $\mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} = \mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$. Таким образом, осталось проверить упомянутую равномерную интегрируемость. Следуя Хитсуде [11], воспользуемся теоремой Валле Пуссена с функцией $x \ln x$, $x \geq 0$, и покажем, что $\sup_n \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) < \infty$. Это условие проверяется с помощью замены меры. Поскольку $\mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} = 1$, определим $\mathbf{Q}^n$ с $d\mathbf{Q}^n = \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} d\mathbf{P}$ и получим

¹⁾ $\inf \{\emptyset\} = \infty$.

(здесь $\tilde{\mathbf{E}}^n$ математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}^n$) $\sup_n \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) = \sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n})$.

Далее,

$$\ln \mathfrak{z}_t = \int_0^t \sigma(B_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(B_s) ds \leq \int_0^t \sigma(B_s) dB_s$$

влечет за собой неравенство

$$\sup_n \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) \leq \sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma(B_s) dB_s,$$

которое подсказывает использование семимартингального представления $B_{t \wedge \tau_n}$ относительно $\mathbf{Q}^n$ в формуле $\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma(B_s) dB_s$. Классическая теорема Гирсанова утверждает, что $B_{t \wedge \tau_n} = \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma(B_s) ds + \tilde{B}_t^n$ с $\mathbf{Q}^n$ -броуновским движением $\tilde{B}_t^n$, остановленным в момент времени τ_n , т.е. с квадратической вариацией $\langle \tilde{B} \rangle_t = t \wedge \tau_n$. Отсюда следует неравенство

$$\sup_n \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) \leq \sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma^2(B_s) ds,$$

т.е. утверждение теоремы будет доказано, если мы проверим, что $\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \sigma^2(B_{s \wedge \tau_n}) ds \leq \mathbf{r}$ с константой $\mathbf{r}$, не зависящей от n . Условие Бенеша (2.1) является ключевым в этой проверке. Оно позволяет заменить $\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \sigma^2(B_{s \wedge \tau_n}) ds$ на $\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T B_{s \wedge \tau_n}^2 ds$ и проверить только

$$\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T B_{s \wedge \tau_n}^2 ds \leq \mathbf{r}$$

с константой $\mathbf{r}$, не зависящей от n . С этой целью применим формулу Ито к $B_{t \wedge \tau_n}^2$ и получим

$$\begin{aligned} B_{t \wedge \tau_n}^2 &= 2 \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} B_s \sigma(B_s) ds + 2 \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} B_s d\tilde{B}_s^n + \langle \tilde{B}^n \rangle_t, \\ \tilde{\mathbf{E}}^n B_{t \wedge \tau_n}^2 &= 2 \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n I_{\{s \leq \tau_n\}} B_s \sigma(B_s) ds + \tilde{\mathbf{E}}^n \langle \tilde{B}^n \rangle_t. \end{aligned}$$

Поскольку $|B_s \sigma(B_s)| \leq c[1 + B_s^2]$, имеет место оценка для $V_t^n = \tilde{\mathbf{E}}^n B_{t \wedge \tau_n}^2$:

$$\tilde{\mathbf{E}}^n B_{t \wedge \tau_n}^2 \leq 2 \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n I_{\{s \leq \tau_n\}} |B_s \sigma(B_s)| ds + \tilde{\mathbf{E}}^n (t \wedge \tau_n).$$

Поэтому V_t^n удовлетворяет неравенству Гронуолла–Беллмана:

$$V_t^n \leq \mathbf{r} \left[1 + \int_0^t V_s^n ds \right]$$

с подходящей положительной константой $\mathbf{r}$.

Отсюда $\int_0^t V_s^n ds \leq e^{\mathbf{r}t} - 1$, т.е. $\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T B_{s \wedge \tau_n}^2 ds \leq e^{\mathbf{r}T} - 1$ Для любого $T > 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть $M_t = M_t''$ и выполнено условие (2.2). Тогда $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ для любого $T > 0$.

Доказательство. Выберем $\tau_n = \inf \{t: (\mathfrak{z}_t \vee \sup_{s \leq t} B_s^2) \geq n\}$ и получим $\mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} = 1$. Теперь доказательство сводится к проверке неравенства $\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) < \infty$, где $\tilde{\mathbf{E}}^n$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}^n$, $\mathbf{Q}^n \ll \mathbf{P}$, $d\mathbf{Q}^n/d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}$. По теореме Гирсанова процесс $B_{t \wedge \tau_n}$ допускает представление относительно меры $\mathbf{Q}^n$:

$$B_{t \wedge \tau_n} = \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s(B) ds + \tilde{B}_t^n \quad (2.3)$$

с броуновским движением $\tilde{B}_t^n$, остановленным в точке τ_n , т.е. его квадратическая вариация $\langle \tilde{B} \rangle_t = t \wedge \tau_n$.

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s(B) dB_s = \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s^2(B) ds$$

и, значит, в силу условия (2.2),

$$\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s^2(B) ds \leq \mathbf{r} \left[1 + \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sup_{s' \leq s} B_{s'}^2 ds \right].$$

Итак, достаточно показать, что

$$\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \sup_{s' \leq s} B_{s' \wedge \tau_n}^2 ds < \infty. \quad (2.4)$$

Используя представление (2.3) и неравенство Коши–Шварца–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{t' \leq t} B_{t' \wedge \tau_n}^2 &\leq 2 \left| \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} |\sigma_s(B)| ds \right|^2 + 2 \sup_{t' \leq t} |\tilde{B}_{t' \wedge \tau_n}^n|^2 \\ &\leq 2t \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s^2(B) ds + 2 \sup_{t' \leq t} |\tilde{B}_{t' \wedge \tau_n}^n|^2 \\ &\leq 2t \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathbf{r} \left[1 + \sup_{s' \leq s} \sigma_{s'}^2(B) \right] ds + 2 \sup_{t' \leq t} |\tilde{B}_{t' \wedge \tau_n}^n|^2. \end{aligned}$$

Кроме того, неравенство Дуба для квадратично интегрируемых мартингалов приводит к неравенству $\tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |\tilde{B}_{t' \wedge \tau_n}^n|^2 \leq 4(t \wedge \tau_n)$. Эти неравенства позволяют воспользоваться неравенством Гронуолла–Беллмана $V_t^n \leq \mathbf{r} [1 + \int_0^t V_s^n ds]$, $t \in [0, T]$, где $V_t^n := \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} B_{t' \wedge \tau_n}^2$, и получить (2.4). Теорема доказана.

3. Общая модель. Предположим, что мартингал $M = M^c + M^d$ участвует в конструкции некоторого семимартингала X . Естественно, такая модель не является абсолютно общей. Тем не менее она включает в себя многие примеры, известные в приложениях. С предлагаемой техникой доказательств согласуются не только обсуждаемые ниже примеры, но и другие модели. Мы не приводим ее здесь потому, что статья и так переполнена техническими деталями. Некоторые из них приводятся в п. 8.

Зафиксируем следующие обозначения и предположения:

- $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ — стохастический базис со стандартными условиями;

- $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{[0, T]}$ и $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{[0, T]}$ — пространства непрерывных функций и пространства Скорохода функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева;

- $x_{[0, t]} = \{x_{t'}: t' < t\}$ и $x_{[0, t]} = \{x_{t'}: t' \leq t\}$;

- $(B_t)_{t \in [0, T]}$ — стандартное броуновское движение;

- $\mu(dt, dz)$ — целочисленная случайная мера на $[0, T] \times \mathbf{R}_+$ (см., например, [13] или [25]);

- $\nu(dt, dz) := dt K(dz)$ — компенсатор $\mu(dt, dz)$; здесь $K(dz)$ есть σ -конечная мера на $\mathbf{R}$ такая, что

$$\int_{\mathbf{R}} z^2 K(dz) < \infty;$$

- $a_s(x)$, $b_s(x)$, $\sigma_s(x)$ и $h_s(x, z)$, $\varphi_s(x, z)$ — функции, измеримые относительно подходящей σ -алгебры, аргументы которых суть (s, x_{s-}) и $(s, x_{[0, s]}, z)$, где $s \in [0, T]$, $x_{[0, s]} \in \mathbb{D}_{[0, T]}$, $z \in \mathbf{R}$, причем для любого $x \in \mathbb{D}_{[0, T]}$ функции $a_s(x)$, $b_s(x)$, $\sigma_s(x)$ квадратично интегрируемы по ds на $[0, T]$ и для любого $x \in \mathbb{D}_{[0, T]}$ и любого $z \in \mathbf{R}$ функции $h_s(x, z)$ и $\varphi_s(x, z)$ квадратично интегрируемы по $ds K(dz)$ на $[0, T] \times \mathbf{R}$;²⁾ более того, предполагается, что

$$\varphi_s(x, z) > -1 \quad (\Rightarrow \Delta M_s > -1).$$

- $\mathbf{r}$ — произвольная положительная константа, которая может принимать различные значения в разных ситуациях;

- $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

Семимартингал X предполагается единственным слабым решением уравнения Ито:

$$\begin{aligned} X_t = X_0 + \int_0^t a_s(X) ds + \int_0^t b_s(X) dB_s \\ + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} h_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

²⁾ В случае взрыва эти свойства предполагаются выполненными до момента взрыва.

Мартингал $M = M^c + M^d$ порождается этим уравнением, т.е.

$$M_t = \int_0^t \sigma_s(X) dB_s + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \varphi_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)] =: M_t^c + M_t^d. \quad (3.2)$$

4. X — не взрывающийся марковский процесс.

4.1. Формулировка основного результата. Примеры. Поскольку X — марковский процесс, уточним его описание, т.е. заменим (3.1) таким уравнением:

$$\begin{aligned} X_t = X_0 + \int_0^t a_s(X_{s-}) ds + \int_0^t b_s(X_{s-}) dB_s \\ + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} h_s(X_{s-}, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)], \end{aligned}$$

где $a_s(X_{s-}) := a(s, X_{s-})$, $b_s(X_{s-}) := b(s, X_{s-})$ и $h_s(X_{s-}, z) := h(s, X_{s-}, z)$.

Аналогичным образом преобразуем (1.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_{s-} dM_s \\ = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_{s-} \left[\sigma_s(X_{s-}) dB_s + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s(X_{s-}, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)] \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Мы будем иметь дело с двумя операторами, зависящими от s : $L_s(x_{s-})$ и $\mathfrak{L}_s(x_{s-})$, преобразующими $(x_s)_{s \in [0, T]} \in \mathbb{D}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} L_s(x_{s-}) &:= 2x_{s-}a_s(x_{s-}) + b_s^2(x_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(x_{s-}, z); \\ \mathfrak{L}_s(x_{s-}) &:= 2x_{s-} \left[a_s(x_{s-}) + b_s(x_{s-})\sigma_s(x_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} h_s(x_{s-}, z)\varphi_s(x_{s-}, z) K(dz) \right] \\ &\quad + b_s^2(x_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(x_{s-}, z) K(dz) \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(x_{s-}, z)\varphi_s(x_{s-}, z) K(dz). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Роль $L_s(x_{s-})$ объясняется в следующем утверждении.

Предложение 4.1. Пусть $X_0^2 \leq \mathfrak{r}$ и $L_s(x_{s-}) \leq \mathfrak{r}[1 + x_{s-}^2]$. Тогда

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} X_t^2 < \infty,$$

т.е. процесс X не взрывается на любом временном интервале $[0, T]$.

Доказательство. Применяя формулу Ито к X_t^2 , получаем

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t L_s(X_{s-}) ds + \mathcal{M}_t,$$

где $\mathcal{M}_t$ — локальный мартингал. Заметим, что определения оператора $L_s(x_{s-})$ и момента $\zeta_n := \inf\{t: X_t^2 \geq n\}$ обеспечивают $\mathbf{E} X_{t \wedge \zeta_n}^2 < \infty$ и, поскольку

$$X_{t \wedge \zeta_n}^2 = X_0^2 + \int_0^t I_{\{s \leq \zeta_n\}} L_s(X_{s-}) ds + \mathcal{M}_{t \wedge \zeta_n},$$

то $\mathbf{E} \mathcal{M}_{t \wedge \tau_n}^2 < \infty$ и $\mathbf{E} \mathcal{M}_{t \wedge \zeta_n} = 0$. Воспользуемся теперь тем, что функция $V_t^n = \mathbf{E} X_{t \wedge \zeta_n}^2$ является решением неравенства Гронуолла–Беллмана: $V_t^n \leq \mathbf{r}[1 + \int_0^t V_s^n ds]$. Отсюда $\mathbf{E} X_{t \wedge \zeta_n}^2 \leq \mathbf{r}e^{rt}$ и по лемме Фату $\mathbf{E} X_t^2 \leq \mathbf{r}e^{rt}$.

Значит, $\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} X_t^2 \leq \mathbf{r}e^{rT}$. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 2. Забегая вперед, можно пояснить роль оператора $\mathfrak{L}_s(x_{s-})$. Предположим, что $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$. Тогда мера $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ с $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_T$ является вероятностной мерой. В этом случае оператор $\mathfrak{L}_s(x_{s-})$ играет роль оператора $L_s(x_{s-})$ для процесса X_t по мере $\mathbf{Q}$.

Теорема 4.1. Пусть $|X_0| \leq \mathbf{r}$ и

- 1) $\sigma_s^2(x_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(x_{s-}, z) K(dz) \leq \mathbf{r}[1 + x_{s-}^2]$,
- 2) $L_s(x_{s-}) \leq \mathbf{r}[1 + x_{s-}^2]$,
- 3) $\mathfrak{L}_s(x_{s-}) \leq \mathbf{r}[1 + x_{s-}^2]$.

Тогда $(\mathfrak{z}_t)_{t \in [0, T]}$ является мартингалом для любого $T > 0$.

Доказательство теоремы приводится в п. 4.2. Ее применимость для разнообразных моделей иллюстрируется ниже.

Для упрощения текста мы будем заменять слова «условия теоремы выполнены» и «для любого $T > 0$ » обозначением « $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$ » везде, где это не приводит к недоразумению.

П р и м е р 4.1 (см. [28]). X — чисто разрывный мартингал с независимыми приращениями. Пусть

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} z [\mu(ds, dz) - K(dz) ds],$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |X_{s-} z| [\mu(ds, dz) - K(dz) ds].$$

Поскольку а) $X_0 = 0$,

б) $a_s(x_{s-}) = b_s(x_{s-}) = 0$ и $h_s(x_{s-}, z) = z$,

с) $\sigma_s(x_{s-}) = 0$ и $\varphi_s(x_{s-}, z) = |x_{s-} z|$,

д) $\int_{\mathbf{R}} z^2 K(dz) < \infty$,

то, учитывая дополнительное условие $\int_{\mathbf{R}} |z|^3 K(dz) < \infty$, получаем, что каждая из функций

$$\sigma_s^2(x_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(x_{s-}, z) K(dz) = x_{s-}^2 \int_{\mathbf{R}} z^2 K(dz), \quad L_s(x_{s-}) = \int_{\mathbf{R}} z^2 K(dz),$$

$$\mathfrak{L}_s(x_{s-}) = 2x_{s-}|x_{s-}| \int_{\mathbf{R}} z|z| K(dz) + \int_{\mathbf{R}} z^2 K(dz) + |x_{s-}| \int_{\mathbf{R}} |z|^3 K(dz)$$

не превосходит $\mathbf{r}[1 + x_{s-}^2]$.

Итак, $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$.

П р и м е р 4.2. *Модель CEV (Constant Elasticity of Variance [1], [6], [8]).* Пусть

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s ds + \int_0^t \sqrt{X_s^+} dB_s \quad \text{и} \quad M_t = \int_0^t \sqrt{X_s^+} dB_s.$$

Тогда

а) $X_0 = 1$,

б) $a_s(x_{s-}) = x_{s-}$, $b_s(x_{s-}) = \sqrt{x_{s-}^+}$ и $h_s(x_{s-}, z) = 0$,

в) $\sigma_s(x_{s-}) = \sqrt{x_{s-}^+}$ и $\varphi_s(x_{s-}, z) = 0$.

Следовательно, каждая из функций

$$\sigma_s^2(x_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(x_{s-}, z) K(dz) = x_{s-}^+,$$

$$L_s(x_{s-}) = 2x_{s-}^2 + x_{s-}^+, \quad \mathfrak{L}_s(x_{s-}) = 2x_{s-}[x_{s-} + x_{s-}^+] + x_{s-}^+$$

не превосходит $\mathbf{r}[1 + x_{s-}^2]$. Следует отметить, что $X_t = X_{t \wedge \vartheta}$, где $\vartheta = \inf\{t: X_t = 0\}$ — момент поглощения в нуле. Поэтому $(\mathfrak{z}_{t \wedge \vartheta})_{t \in [0, T]}$ — мартингал для любого $T > 0$.

П р и м е р 4.3. *Устойчивый снос.* Пусть

$$X_t = 1 - \int_0^t X_s^3 ds + \int_0^t X_s dB_s \quad \text{и} \quad M_t = \int_0^t X_s dB_s.$$

Тогда

а) $X_0 = 1$,

б) $a_s(x_{s-}) = -x_{s-}^3$, $b_s(x_{s-}) = x_{s-}$ и $h_s(x_{s-}, z) = 0$,

в) $\sigma_s(x_{s-}) = x_{s-}^+$ и $\varphi_s(x_{s-}, z) = 0$

и, значит, каждая из функций

$$\sigma_s^2(x_{s-}) = (x_s^+)^2, \quad L_s(x_{s-}) = -2x_s^4 + x_s^2, \quad \mathfrak{L}_s(x_{s-}) = -2x_s^4 + x_s^2 + 2|x_s^3|$$

не превосходит $\mathbf{r}[1 + x_{s-}^2]$. Итак, $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$.

П р и м е р 4.4. *Броуновский мост.* Гауссовский процесс X_t с нулевым средним, заданный на интервале $[0, 1]$, называется броуновским мостом, если его корреляционная функция имеет вид

$$R(t', t) = (t' \wedge t)[1 - (t' \vee t)].$$

Известно, что X_t является единственным решением уравнения Ито

$$X_t = - \int_0^t \frac{X_s}{1-s} ds + B_t, \quad t \in [0, 1), \quad \lim_{t \uparrow 1} X_t = 0.$$

Пусть $M_t = \int_0^t X_s dB_s$, $t \leq 1$.

Здесь $T = 1$ и

a) $X_0 = 0$,

b) $a_s(x_{s-}) = -x_{s-}/(1-s)$ ($s < 1$), $b_s(x_{s-}) = x_{s-}$ и $h_s(x_{s-}, z) = 0$,

c) $\sigma_s(x_{s-}) = x_{s-}$ и $\varphi_s(x_{s-}, z) = 0$.

Поэтому каждая из функций

$$\sigma_s^2(x_{s-}) = x_{s-}^2, \quad L_s(x_{s-}) = -2x_{s-}^4 + x_{s-}^2, \quad \mathfrak{L}_s(x_{s-}) = -2x_{s-}^4 + x_{s-}^2 + 2|x_{s-}^3|$$

не превосходит $\mathfrak{r}[1 + x_{s-}^2]$ и, по теореме 4.1, $\mathbf{E}\mathfrak{z}_1 = 1$.

Пример 4.5. Одно обобщение из [29]. Пусть $\alpha \in (-1, 0]$ и

$$X_t = 1 + \int_0^t |X_s|^\alpha ds + B_t \quad \text{и} \quad M_t = \int_0^t X_s dB_s.$$

В [29] показано, что $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$.

Теорема 4.1 позволяет доказать, что $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$, даже если $\alpha = -1$. Действительно, при $\alpha = 1$ процесс X_t является процессом Бесселя (см., например, [32, упражнение 2.25, с. 197]), т.е.

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{ds}{X_s} + B_t.$$

Тогда

a) $X_0 = 1$,

b) $a_s(x_{s-}) = 1/(x_{s-} \vee 0)$, $b_s(x_{s-}) = 1$ и $h_s(x_{s-}, z) = 0$,

c) $\sigma_s(x_{s-}) = x_{s-}$ и $\varphi_s(x_{s-}, z) = 0$

и каждая из функций

$$\sigma_s^2(x_{s-}) = x_{s-}^2, \quad L_s(x_{s-}) = 3, \quad \mathfrak{L}_s(x_{s-}) = 3 + 2x_{s-}$$

не превосходит $\mathfrak{r}[1 + x_{s-}^2]$. Поэтому $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$.

5. Семимартингал X , не являющийся марковским процессом.

5.1. Формулировка основного результата. Примеры. Несмотря на то что мы остаемся в рамках (3.1) и (3.2), операторы $L_s(x)$ и $\mathfrak{L}_s(x)$ изменяются следующим образом:

$$L_s(x) := a_s^2(x) + b_s^2(x) + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(x, z) K(dz),$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_s(x) := & a_s^2(x) + b_s^2(x) + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(x, z) K(dz) + b_s^2(x) \sigma_s^2(x) \\ & + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(x, z) K(dz) \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(x, z) K(dz) \\ & + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(x, z) \varphi_s(x, z) K(dz). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Теорема 5.1. Если $|X_0| \leq r$ и

$$1) \sigma_s^2(x) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(x, z) K(dz) \leq r[1 + \sup_{s' < s} x_{s'}^2],$$

$$2) L_s(x) \leq r[1 + \sup_{s' < s} x_{s'}^2],$$

$$3) \mathfrak{L}_s(x) \leq r[1 + \sup_{s' < s} x_{s'}^2],$$

то $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$.

Доказательство теоремы приводится в п.6.3. Заметим, что процесс X не взрывается в силу условия 2). Ниже мы рассмотрим примеры, обслуживаемые этой теоремой.

Пример 5.1. *Существование слабого решения с единичной диффузией.* Стохастическое дифференциальное уравнение

$$X_t = \int_0^t a_s(X) ds + B_t$$

допускает слабое решение на любом конечном интервале $[0, T]$, если на этом интервале

$$a_s^2(y) \leq r \left[1 + \sup_{s' \leq s} y_s^2 \right], \quad (y_s)_{s \in [0, T]} \in \mathbf{C}$$

(ср. с условиями теоремы 7.2 в [26, гл. 7, § 7.2]).

Положим $M_t = \int_0^t \sigma_s(B) dB_t$, где $\sigma_s(y) \equiv a_s(y)$. Тогда по теореме 5.1 $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ и, значит, существует вероятностная мера $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ с $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_T$. Поэтому, по теореме Гирсанова, процесс $(B_t, \mathbf{Q})_{t \in [0, T]}$ является слабым решением уравнения Ито $B_t = \int_0^t a_s(B) ds + \tilde{B}_t$ с $\mathbf{Q}$ -броуновским движением $\tilde{B}_t$.

Отметим также слабую единственность этого решения (см. [26, гл. 4, теорема 4.12]).

Пример 5.2. *Существование слабого решения с вырожденной диффузией.* Предположим, что уравнение Ито

$$Y_t = X_0 + \int_0^t b_s(Y) dB_s$$

с $b_s^2(y) \geq 0$ имеет слабое решение.

Теорема 5.1 позволяет заменить вероятностную меру таким образом, чтобы по новой мере уравнение Ито

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s(X) ds + \int_0^t b_s(X) dB_s$$

также допускало слабое решение.

Это утверждение имеет место, если

$$a) X_0^2 \leq r,$$

$$b) a_s(x) = a_s(x) I_{\{b^2(x) > 0\}},$$

с) каждая из функций $a_s^2(x)$, $b_s^2(x)$, $(a_s^2(x)/b_s^2(x))I_{\{b_s^2(x)>0\}}$ не превосходит $r[1 + \sup_{s' \leq s} x_{s'}^2]$, $s \in [0, T]$, $(x_s)_{s \in [0, T]} \in \mathbf{C}$ (ср. с теоремой 7.19 в [26, гл. 7, § 7.6]). Для этого достаточно выбрать $\sigma_s(x) = (a_s(x)/b_s(x))I_{\{b_s^2(x)>0\}}$ и $M_t = \int_0^t \sigma_s(B) dB_s$ и применить теорему 5.1 для $\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s \sigma_s(x) dB_s$. Поскольку $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$, существует мера $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ с плотностью $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_T$. Тогда в силу теоремы Гирсанова

$$X_t = X_0 + \int_0^t \underbrace{b_s(X) \sigma_s(X)}_{=a_s(X)} ds + \int_0^t b_s(X) d\tilde{B}_s$$

с $\mathbf{Q}$ -броуновским движением $\tilde{B}_t$.

Пример 5.3. Уравнение Ито с запаздыванием. Теорема 5.1 применима к стохастической модели с запаздыванием, часто используемой в современной теории управления.

Пусть $\vartheta > 0$ обозначает фиксированный параметр запаздывания в уравнении

$$X_t = I_{\{X_u \in [-\vartheta, 0]\}} + \int_0^t a_s(X_{s-\vartheta}) ds + \int_0^t b_s(X_{s-\vartheta}) dB_s.$$

Пусть $M_t = \int_0^t \sigma_s(X_{s-\vartheta}) dB_s$ и, значит, $\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s \sigma_s(X_{s-\vartheta}) dB_s$.

Тогда по теореме 5.1 $\mathfrak{z} = \mathcal{E}_T(M)$ при условии, что каждая из функций $a_s^2(x_{s-\vartheta}) + b_s^2(x_{s-\vartheta})$, $\sigma_s^2(x_{s-\vartheta})$, $\sigma_s^2(x_{s-\vartheta})b_s^2(x_{s-\vartheta})$ не превосходит $r[1 + \sup_{s' \leq s} x_{s'}^2]$, $s \in [0, T]$, $(x_s)_{s \in [0, T]} \in \mathbf{C}$.

6. Доказательства.

6.1. Вспомогательный результат.

Теоремы 4.1 и 5.1 используют одну и ту же идею доказательства, которая состоит в проверке равномерной интегрируемости семейства $\{\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}\}_{n \rightarrow \infty}$, выраженной в форме

$$\sup_n \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) < \infty.$$

Так как X , M определены в (3.1), (3.2) соответственно, то процесс (1.2), где мартингалы M_t^c и M_t^d определены в (3.2), является единственным решением уравнения

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_{s-} \sigma_s(X) dB_s + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \mathfrak{z}_{s-} \varphi_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)].$$

Последовательности моментов остановки τ_n определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_n &= \inf\{t: (\mathfrak{z}_t \vee X_t^2) \geq n\} && \text{в теореме 4.1,} \\ \tau_n &= \inf\left\{t: \left(\mathfrak{z}_t \vee \sup_{s \leq t} X_s^2\right) \geq n\right\} && \text{в теореме 5.1.} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Заметим также, что $\mathfrak{z}_{(s \wedge \tau_n)-}$ и $X_{(s \wedge \tau_n)-}^2$ являются ограниченными процессами. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n} &= 1 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_{(s \wedge \tau_n)-} \sigma_s(X) dB_s \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_{(s \wedge \tau_n)-} \varphi_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)], \end{aligned} \quad (6.2)$$

что влечет за собой

$$\mathbf{E} (\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} - 1)^2 = \mathbf{E} \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_{(s \wedge \tau_n)-}^2 \left(\sigma_s^2(X) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(X, z) K(dz) \right) ds.$$

Поэтому случайный процесс $(\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n})_{t \in [0, T]}$ является квадратично интегрируемым мартингалом с $\mathbf{E} \mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n} = 1$.

По аналогии с (2.1) и (2.2) предположим, что для любого $s \in [0, T]$, $(x_s)_{s \leq T} \in \mathbb{D}$

$$\sigma_s^2(x) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(x, z) K(dz) \leq \begin{cases} r[1 + x_{s-}^2] & \text{в теореме 4.1,} \\ r[1 + \sup_{s' < s} x_{s'}^2] & \text{в теореме 5.1.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Лемма 6.1. Семейство $\{\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо, если

$$\left. \begin{aligned} &\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T X_{s \wedge \tau_n}^2 ds && \text{в теореме 4.1} \\ &\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \sup_{s' < s} X_{s' \wedge \tau_n}^2 ds && \text{в теореме 5.1} \end{aligned} \right\} < \infty.$$

Доказательство. Существование вероятностной меры $\mathbf{Q}^n \ll \mathbf{P}$ с плотностью $d\mathbf{Q}^n/d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}$ очевидно. Далее $\tilde{\mathbf{E}}^n$ — математическое ожидание, соответствующее мере $\mathbf{Q}^n$. Равномерная интегрируемость семейства случайных величин $\{\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}\}_{n \rightarrow \infty}$ проверяется с помощью теоремы Валле-Пуссена, в которой используется функция $x \ln x$, $x \geq 0$, такая же, как в доказательстве теорем 2.1 и 2.2, т.е. проверяется

$$\sup_n \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) < \infty.$$

Эта формула удобна, поскольку имеет место представление

$$\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n} = \exp(M_{t \wedge \tau_n} - A_{t \wedge \tau_n}),$$

в котором $M_{t \wedge \tau_n}$ — квадратично интегрируемый мартингал и $A_{t \wedge \tau_n}$ — возрастающий положительный процесс:

$$\begin{aligned} M_{t \wedge \tau_n} &= \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s(X) dB_s + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \varphi_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)], \\ A_{t \wedge \tau_n} &= \frac{1}{2} \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s^2(X) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \{\varphi_s(X, z) - \ln[1 + \varphi_s(X, z)]\} \mu(ds, dz). \end{aligned}$$

Условие $\varphi_s(X, z) > -1$ гарантирует неравенство

$$\varphi_s(X, z) - \ln[1 + \varphi_s(X, z)] \geq 0,$$

которое вместе с $\sigma_s^2(X) \geq 0$ обеспечивает упомянутое свойство $A_{t \wedge \tau_n} \geq 0$. Поэтому $\ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) \leq M_{T \wedge \tau_n}$ и, следовательно,

$$\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) \leq \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} M_{T \wedge \tau_n}.$$

Оба процесса $\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n}$ и $M_{t \wedge \tau_n}$ являются квадратично интегрируемыми мартингалами, допускающими разложения $\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n} = \mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n}^c + \mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n}^d$ и $M_{t \wedge \tau_n} = M_{t \wedge \tau_n}^c + M_{t \wedge \tau_n}^d$, в которых

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}^c &= \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_s - \sigma_s(X) dB_s, & M_{T \wedge \tau_n}^c &= \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s(X) dB_s, \\ \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}^d &= 1 + \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_s - \varphi_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)], \\ M_{T \wedge \tau_n}^d &= \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \varphi_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)]. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathbf{E} M_{T \wedge \tau_n} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} = \tilde{\mathbf{E}}^n M_{T \wedge \tau_n}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} M_{T \wedge \tau_n}^c \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} &= \mathbf{E} \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_s \sigma_s^2(X) ds = \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s^2(X) ds \\ &= \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s^2(X) ds, \\ \mathbf{E} M_{T \wedge \tau_n}^d \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} &= \mathbf{E} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_s - \varphi_s^2(X, z) K(dz) ds \\ &= \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \varphi_s^2(X, z) K(dz) ds. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{E}}^n M_{T \wedge \tau_n} = \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \left(\sigma_s^2(X) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(X, z) K(dz) \right) ds.$$

Теперь, принимая во внимание (6.3), завершаем доказательство:

$$\sup_n \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} \ln(\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}) \leq \mathfrak{r} \begin{cases} T + \sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T X_{s \wedge \tau_n}^2 ds, & \text{в теореме 4.1,} \\ T + \sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \sup_{s' \leq s} X_{s' \wedge \tau_n}^2 ds & \text{в теореме 5.1} \end{cases}$$

при условии, что выполнены условия леммы. Лемма доказана.

6.2. Доказательство теоремы 4.1. В силу леммы 6.1 утверждение теоремы имеет место, если выполнено условие

$$\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T X_{s \wedge \tau_n}^2 ds < \infty$$

с τ_n из (6.1), согласованным с теоремой 4.1. Поскольку математическое ожидание $\tilde{\mathbf{E}}^n$ обслуживает меру $\mathbf{Q}^n$, нам потребуется описание семимартингала X относительно $\mathbf{Q}^n$.

Теорема А.1 (см. приложение А) дает описание семимартингала $(X_t, \mathbf{Q}^n)_{t \in [0, T]}$:

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau_n} = X_0 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} & \left[a_s(X_{s-}) + b_s(X_{s-}) \sigma_s(X_{s-}) \right. \\ & \left. + \int_{\mathbf{R}} h_s(X_{s-}, z) \varphi_s(X_{s-}, z) K(dz) \right] ds + \tilde{\mathcal{M}}_t^{c,n} + \tilde{\mathcal{M}}_t^{d,n} \end{aligned}$$

с непрерывным и чисто разрывным квадратично интегрируемыми мартингалами $\tilde{\mathcal{M}}_t^{c,n}$ и $\tilde{\mathcal{M}}_t^{d,n}$ соответственно. Их предсказуемые квадратические вариации задаются формулами:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_t &= \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s^2(X_{s-}) ds, \\ \langle \tilde{\mathcal{M}}^{d,n} \rangle_t &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} h_s^2(X_{s-}, z) [1 + \varphi_s(X_{s-}, z)] K(dz) ds. \end{aligned}$$

Применяя формулу Ито, получаем

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau_n}^2 &= X_0^2 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \cdot 2X_{s-} \left[a_s(X_{s-}) + b_s(X_{s-}) \sigma_s(X_{s-}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbf{R}} h_s(X_{s-}, z) \varphi_s(X_{s-}, z) K(dz) \right] ds + \langle \tilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_t + [\tilde{\mathcal{M}}^{d,n}, \tilde{\mathcal{M}}^{d,n}]_t \\ &\quad + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \cdot 2X_{s-} d\tilde{\mathcal{M}}_s^{c,n} + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \cdot 2X_{s-} d\tilde{\mathcal{M}}_s^{d,n}, \end{aligned}$$

где $[\tilde{\mathcal{M}}^{d,n}, \tilde{\mathcal{M}}^{d,n}]_t$ — квадратическая вариация мартингала $\tilde{\mathcal{M}}_t^{d,n}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^n X_{t \wedge \tau_n}^2 &= \tilde{\mathbf{E}}^n X_0^2 + \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n I_{\{s \leq \tau_n\}} \cdot 2X_{s-} \left[a_s(X_{s-}) + b_s(X_{s-}) \sigma_s(X_{s-}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbf{R}} h_s(X_{s-}, z) \varphi_s(X_{s-}, z) K(dz) \right] ds \\ &\quad + \tilde{\mathbf{E}}^n \langle \tilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_t + \tilde{\mathbf{E}}^n \langle \tilde{\mathcal{M}}^{d,n} \rangle_t. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Ввиду

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^n \langle \tilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_t &= \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s^2(X_{s-}) ds, \\ \tilde{\mathbf{E}}^n \langle \tilde{\mathcal{M}}^{d,n} \rangle_t &= \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} h_s^2(X_{s-}, z) [1 + \varphi_s(X_{s-}, z)] K(dz) ds \end{aligned}$$

выражение (6.4) можно представить следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{E}}^n X_{t \wedge \tau_n}^2 = \tilde{\mathbf{E}}^n X_0^2 + \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{L}_s(X_{s-}) ds,$$

где $\mathfrak{L}_s(X_{s-})$ определено в (4.2), т.е. мы получаем неравенство Гронвулла–Беллмана: $\tilde{\mathbf{E}}^n X_{t \wedge \tau_n}^2 \leq \mathfrak{r} \int_0^t [1 + \tilde{\mathbf{E}}^n X_{s \wedge \tau_n}^2 ds]$, которое влечет за собой требуемое неравенство $\sup_n \int_0^T \tilde{\mathbf{E}}^n X_{s \wedge \tau_n}^2 ds \leq e^{\mathfrak{r}T} - 1$. Теорема 4.1 доказана.

6.3. Доказательство теоремы 5.1. Пусть момент остановки τ_n (см. (6.1)) согласован с теоремой 5.1. Тогда в соответствии с леммой 6.1 достаточно проверить условие равномерной интегрируемости последовательности случайных величин $\mathfrak{J}_{T \wedge \tau_n}$, $n \geq 1$:

$$\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \sup_{s' \leq s} X_{s' \wedge \tau_n}^2 ds < \infty.$$

Поскольку $\mathbf{E} \mathfrak{J}_{T \wedge \tau_n} = 1$, вероятностная мера $\mathbf{Q}^n$ определена так же, как в доказательстве теоремы 4.1: $d\mathbf{Q}^n = \mathfrak{J}_{T \wedge \tau_n} d\mathbf{P}$. Поэтому, так же как в доказательстве теоремы 4.1, воспользуемся теоремой А.1, для того чтобы получить семимартингаловое разложение процесса $(X_{t \wedge \tau_n}, \mathbf{Q}^n)_{t \in [0, T]}$:

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau_n} = X_0 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \left[a_s(X) + b_s(X) \sigma_s(X) \right. \\ \left. + \int_{\mathbf{R}} h_s(X, z) \varphi_s(X, z) K(dz) \right] ds + \tilde{\mathcal{M}}_t^{c, n} + \tilde{\mathcal{M}}_t^{d, n}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $\tilde{\mathcal{M}}_t^{c, n}$ и $\tilde{\mathcal{M}}_t^{d, n}$ — непрерывный и чисто разрывный квадратично интегрируемые мартингалы с

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{M}}^{c, n} \rangle_t &= \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s^2(X) ds, \\ \langle \tilde{\mathcal{M}}^{d, n} \rangle_t &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} h_s^2(X, z) [1 + \varphi_s(X, z)] K(dz) ds. \end{aligned}$$

Семимартингал, определенный в (6.5), позволяет получить оценку

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |X_{t' \wedge \tau_n}|^2 &\leq 4 \left[\tilde{\mathbf{E}}^n X_0^2 + \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |\mathcal{M}_{t'}^{c, n}|^2 + \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |\mathcal{M}_{t'}^{d, n}|^2 \right. \\ &\quad + \tilde{\mathbf{E}}^n \left(\int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \left| a_s(X) + b_s(X) \sigma_s(X) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\mathbf{R}} h_s(X, z) \varphi_s(X, z) K(dz) \right| ds \right)^2 \left. \right]. \end{aligned}$$

Оценим каждый член в правой части этого неравенства (последнее математическое ожидание в квадратных скобках обозначим J_t):

$$4\tilde{\mathbf{E}}^n X_0^2 \leq \mathbf{r} \quad (\text{по условию теоремы});$$

$$4\tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |\mathcal{M}_{t'}^{c,n}|^2 \leq 16\tilde{\mathbf{E}}^n \langle \mathcal{M}^{c,n} \rangle_t = 16\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s^2(X) ds$$

(максимальное неравенство Дуба);

$$4\tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |\mathcal{M}_{t'}^{d,n}|^2 \leq 16\tilde{\mathbf{E}}^n \langle \mathcal{M}^{d,n} \rangle_t$$

$$= 16\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} h_s^2(X, z) [1 + \varphi_s(X, z)] K(dz) ds$$

(максимальное неравенство Дуба);

$$4J_t \leq 4t \mathbf{E} \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \left| a_s(X) + b_s(X) \sigma_s(X) + \int_{\mathbf{R}} h_s(X, z) \varphi_s(X, z) K(dz) \right|^2 ds$$

$$\leq 12t \mathbf{E} \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \left[a_s^2(X) + b_s^2(X) \sigma_s^2(X) + \left(\int_{\mathbf{R}} h_s(X, z) \varphi_s(X, z) K(dz) \right)^2 \right] ds$$

$$\leq 12t \mathbf{E} \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \left[a_s^2(X) + b_s^2(X) \sigma_s^2(X) + \int_{\mathbf{R}} h_s^2(X, z) K(dz) \int_{\mathbf{R}} \varphi_s(X, z) K(dz) \right] ds$$

(неравенство Коши–Шварца–Буняковского).

Вся совокупность представленных выше оценок влечет за собой неравенство $\tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |X_{t' \wedge \tau_n}|^2 \leq \mathbf{r} + \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{L}_s(X) ds$, где оператор $\mathfrak{L}_s(X)$ определяется с помощью формулы (5.1), т.е. $\tilde{\mathbf{E}}^n \mathfrak{L}_{s \wedge \tau_n}(X) \leq \mathbf{r}[1 + \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{s' \leq s} |X_{s' \wedge \tau_n}|^2]$. В результате получаем неравенство Гронуолла–Беллмана:

$$\tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{t' \leq t} |X_{t' \wedge \tau_n}|^2 \leq \mathbf{r} \left[1 + \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{s' \leq s} |X_{s' \wedge \tau_n}|^2 ds \right],$$

и, значит, требуемая оценка $\sup_n \int_0^T \tilde{\mathbf{E}}^n \sup_{s' \leq s} |X_{s' \wedge \tau_n}|^2 ds \leq e^{\mathbf{r}T} - 1$ имеет место. Теорема 5.1 доказана.

7. Пример марковского процесса X , допускающего взрыв.

В этом разделе мы рассмотрим конкретную модель (по поводу других примеров см. [1]). Эта модель

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t a_s(X_{s-}) ds + \int_0^t b_s(X_{s-}) dB_s \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} h_s(X_{s-}, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)], \\ \mathfrak{z}_t &= 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_{s-} \left[\sigma_s(X_{s-}) dB_s + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s(X_{s-}, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)] \right] \end{aligned}$$

обобщает модель Миятовича–Урусова [29], поскольку она содержит чисто разрывные мартингалы.

Мы фиксируем следующие условия:

1. $a_s(x_{s-}) \geq |x_{s-}|^\alpha$, $\alpha > 3$; 2. $b_s^2(x_{s-}) \leq \begin{cases} r, & \alpha \in (3, 4), \\ r[1 + x_{s-}^2], & \alpha > 4; \end{cases}$
3. $h_s(x_{s-}, z) \equiv z$; 4. $\sigma_s^2(x_{s-}) \leq r[1 + x_{s-}^2]$; 5. $\varphi_s(x_{s-}, z) \equiv |z|$;
6. $\int_{\mathbf{R}} [z^2 + |z|^3] K(dz) < \infty$; 7. $0 < X_0 \leq r$.

Условие

$$\sigma_s^2(x_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} \varphi_s^2(x_{s-}, z) K(dz) \leq [1 + x_{s-}^2], \quad s \in [0, T],$$

предполагается выполненным, в то время как условия, связанные с операторами $L_s(x_{s-})$ и $\mathfrak{L}_s(x_{s-})$, не выполняются. Поэтому взрыв процесса X_t по направлению к $+\infty$ не исключается. В случае взрыва последовательность $\tau_n = \inf\{t: (z_t \vee X_t^2) \geq n\}$, $n \geq 1$, имеет предел $\tau \leq \infty$ с $\mathbf{P}(\tau < \infty) > 0$. Следовательно, в случае взрыва можно ожидать только равенство $\mathbf{E} z_{T \wedge \tau} = 1$. Несмотря на то что возможность взрыва не нарушает утверждения леммы 6.1, проверка условия $\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T X_{s \wedge \tau_n}^2 ds < \infty$ этой леммы вряд ли может быть эффективно реализована. Поэтому вместо этого условия мы используем следующее:

$$\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \frac{|X_{s \wedge \tau_n}|^\alpha}{1 + |X_{s \wedge \tau_n}|^{\alpha-2}} ds < \infty, \quad (7.1)$$

тем более, что при $\alpha > 3$

$$\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \frac{|X_{s \wedge \tau_n}|^\alpha}{1 + |X_{s \wedge \tau_n}|^{\alpha-2}} ds < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T X_{s \wedge \tau_n}^2 ds < \infty.$$

Выберем функцию

$$g_\alpha(u) = \int_0^u \frac{1}{1 + |y|^{\alpha-2}} dy, \quad u \in \mathbf{R}.$$

Поскольку ее производные имеют вид

$$g'_\alpha(u) = \frac{1}{1 + |u|^{\alpha-2}} \quad \text{и} \quad g''_\alpha(u) = -\frac{(\alpha-2)|u|^{\alpha-3} \operatorname{sign} u}{[1 + |u|^{\alpha-2}]^2},$$

то $a_s(x_{s-}) \geq |x_{s-}|^\alpha$ и $|g''_\alpha(x_{s-})| \leq r$. Более того,

$$g'_\alpha(x_{s-})a_s(x_{s-}) \geq \frac{|x_{s-}|^\alpha}{1 + |x_{s-}|^{\alpha-2}}, \quad (7.2)$$

где правая часть есть не что иное, как подынтегральная функция в (7.1).

Процесс $X_{t \wedge \tau_n}$ относительно новой меры $\mathbf{Q}^n$ не взрывается ни при каком n . Поэтому по теореме А.1,

$$X_{t \wedge \tau_n} = X_0 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \left[a_s(X_{s-}) + b_s(X_{s-}) \sigma_s(X_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} z|z| K(dz) \right] ds + \widetilde{\mathcal{M}}_t^{c,n} + \widetilde{\mathcal{M}}_t^{d,n},$$

где $\widetilde{\mathcal{M}}_t^{c,n}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_t^{d,n}$ — непрерывный и чисто разрывный квадратично интегрируемые мартингалы с предсказуемыми характеристиками

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_t &= \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s^2(X_{s-}) ds, \\ \langle \widetilde{\mathcal{M}}^{d,n} \rangle_t &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} [z^2 + |z|^3] K(dz) ds. \end{aligned}$$

Теперь применим формулу Ито к $g_\alpha(X_{t \wedge \tau_n})$:

$$\begin{aligned} g_\alpha(X_{T \wedge \tau_n}) &= g_\alpha(X_0) \\ &+ \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} g'_\alpha(X_{s-}) \left[a_s(X_{s-}) + \sigma_s(X_{s-}) b_s(X_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} |z| z K(dz) \right] ds \\ &+ \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} g'_\alpha(X_{s-}) d\widetilde{\mathcal{M}}_s^{c,n} + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} g'_\alpha(X_{s-}) d\widetilde{\mathcal{M}}_s^{d,n} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} g''_\alpha(X_{s-}) d\langle \widetilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_s \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \left[g_\alpha(X_{s-} + z) - g_\alpha(X_{s-}) - g'_\alpha(X_{s-}) z \right] \mu(ds, dz). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}^n g_\alpha(X_{T \wedge \tau_n}) &= \widetilde{\mathbf{E}}^n g_\alpha(X_0) + \widetilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} g'_\alpha(X_{s-}) a_s(X_s) ds \\ &+ \widetilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} g'_\alpha(X_s) \left[\sigma_s(X_{s-}) b_s(X_{s-}) + \int_{\mathbf{R}} |z| z K(dz) \right] ds \\ &+ \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} g''_\alpha(X_{s-}) b_s^2(X_s) ds \\ &+ \widetilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \left[g(X_{s-} + z) - g(X_{s-}) - g'(X_{s-}) z \right] \nu^n(ds, dz), \end{aligned}$$

где $\nu^n(ds, dz) = I_{\{s \leq \tau_n\}} [1 + |z|] ds K(dz)$ является $\widetilde{\mathbf{Q}}^n$ -компенсатором целочисленной случайной меры $I_{\{s \leq \tau_n\}} \mu(ds, dz)$ (см. теорему А.1). Отсюда, с учетом (7.2), выводим следующую верхнюю границу в виде суммы

случайных величин:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} \frac{|X_{s-}|^\alpha}{1 + |X_{s-}|^{\alpha-2}} ds \leq \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} g'_\alpha(X_{s-}) a_s(X_{s-}) ds \\
 & \leq \tilde{\mathbf{E}}^n g_\alpha(X_{T \wedge \tau_n}) + \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} g'_\alpha(X_{s-}) |\sigma_s(X) b_s(X-)| ds \\
 & \quad + \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} g'(X_{s-}) z^2 K(dz) ds \\
 & \quad + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T I_{\{s \leq \tau_n\}} |g''_\alpha(X_{s-})| b_s^2(X_{s-}) ds \\
 & \quad + \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} |g_\alpha(X_{s-} + z) - g_\alpha(X_{s-}) - g'_\alpha(X_{s-}) z| \\
 & \quad \quad |1 + |z|| K(dz) ds.
 \end{aligned}$$

Абсолютное значение каждого слагаемого из этой суммы ограничено константой, не зависящей от n :

$$\begin{aligned}
 & g_\alpha(X_{T \wedge \tau_n}) \leq \text{const}, \quad \alpha > 3; \\
 & g'_\alpha(X_{(t \wedge \tau_n)-}) |\sigma_t(X_{(t \wedge \tau_n)-}) b_t(X_{(t \wedge \tau_n)-})| \\
 & \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + X_{(t \wedge \tau_n)-}^2}}{1 + |X_{(t \wedge \tau_n)-}|^{\alpha-2}} \leq \text{const}, & \alpha \in (3, 4), \\ \frac{1 + X_{(t \wedge \tau_n)-}^2}{1 + |X_{(t \wedge \tau_n)-}|^{\alpha-2}} \leq \text{const}, & \alpha \geq 4; \end{cases} \\
 & \left| g'_\alpha(X_{(t \wedge \tau_n)-}) \int_{\mathbf{R}} z^2 K(dz) \right| \leq \text{const}; \\
 & \int_0^T |g''_\alpha(X_{(s \wedge \tau_n)-})| b_s^2(X_{(s \wedge \tau_n)-}) ds \\
 & \leq \int_0^T \frac{(\alpha - 2) |X_{(s \wedge \tau_n)-}|^{\alpha-3}}{[1 + |X_{(s \wedge \tau_n)-}|^{\alpha-2}]^2} [1 + X_{(s \wedge \tau_n)-}^2] \int_{\mathbf{R}} z^2 K(dz) ds \leq \text{const}; \\
 & \int_0^T \int_{\mathbf{R}} |g_\alpha(X_{s \wedge \tau_n} + z) - g_\alpha(X_{s \wedge \tau_n}) - g'_\alpha(X_{(s \wedge \tau_n)-}) z| [1 + |z|] K(dz) ds \\
 & \leq rT \int_{\mathbf{R}} [z^2 + |z|^3] K(dz).
 \end{aligned}$$

Таким образом (7.1) имеет место.

8. Дополнения.

8.1. $\mathbf{E} \mathfrak{J}_T < 1$ может нарушить условие Бенеша. Пусть X_t — процесс Бесселя: $X_t = 1 + \int_0^t (1/X_s) ds + B_t$. Процесс X_t положителен и, значит, формула Ито применима к $\ln x$:

$$\ln X_t = - \int_0^t \frac{1}{2X_s^2} ds + \int_0^t \frac{dB_s}{X_s}.$$

Пусть $M_t = \int_0^t X_s dB_s$ и

$$\mathfrak{z}_t = 1 - \int_0^t \mathfrak{z}_s \frac{dB_s}{X_s}.$$

Предположим, что найдется момент времени $T > 0$ такой, что $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$. Тогда существует вероятностная мера $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ с плотностью $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_T$, а теорема Гирсанова позволяет представить процесс X_t (относительно меры $\mathbf{Q}$) в виде

$$X_t = 1 + \tilde{B}_t$$

с $\mathbf{Q}$ -броуновским движением $\tilde{B}_t$. Значит, X_t — гауссовский процесс, который не может быть только положительным. Поэтому $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T \neq 1$, т.е. $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T < 1$. С другой стороны, $\sigma^2(y) = 1/y^2 \not\leq \mathbf{r}[1 + y^2]$ невозможно.

8.2. X — векторная диффузия. Поскольку мы имеем дело с диффузионным процессом, мы будем использовать обозначения x_s, X_s вместо x_{s-}, X_{s-} . Пусть

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s(X_s) ds + \int_0^t b_s(X_s) dB_s,$$

где $a_s(x_s)$ — матричная функция, $b_s(x_s)$ — векторная функция (столбец), B_t — броуновский векторный процесс (столбец) с независимыми компонентами, являющимися стандартными броуновскими движениями.

Условие Бенеша естественным образом адаптируется к векторному случаю. Норму в $\mathbf{L}^2$ и скалярное произведение векторов обозначим $\|\cdot\|$ и $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ соответственно. Символ транспонирования матриц обозначим $*$. Пусть $\sigma_s(x_s)$ — векторная функция (строка) такая, что процесс

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s \langle\langle \sigma_s(x_s), dB_s \rangle\rangle$$

определен.

Теорема 8.1. Пусть $\|X\|_0^2 \leq \mathbf{r}$ и $(x_s)_{s \in \mathbf{R}_+} \in \mathbf{C}$. Предположим, что для любого $(x_s)_{s \in [0, T]} \in \mathbf{C}$ определены

- 1) $\|\sigma_s(x_s)\|^2$,
- 2) $L_s(x_s) = 2\langle\langle x_s, a_s(x) \rangle\rangle + \text{trace}[b_s^*(x_s)b_s(x_s)]$,
- 3) $\mathfrak{L}_s(x_s) = 2\langle\langle x_s, [a_s(x_s) + b_s^*(x_s)\sigma_s(x_s)] \rangle\rangle + \text{trace}[b_s^*(x_s)b_s(x_s)]$.

Если для любого $s \leq T$

$$\|\sigma_s(x_s)\|^2 + L_s(x_s) + \mathfrak{L}_s(x_s) \leq \mathbf{r}[1 + \|x_s\|^2],$$

то $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ для любого $T > 0$.

Доказательство этой теоремы такое же, как в скалярном случае, и поэтому опускается.

Пример 8.1. Пусть $X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_s) dB_s$ и

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s [\theta(X_s) dW_s + \sigma(X_s) dB_s],$$

где W_t — винеровский процесс, не зависящий от B_t . Несмотря на то что X_t — скалярный процесс, для проверки условия $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ удобно применить теорему 8.1. Пишем

$$\begin{pmatrix} X_t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} a(X_s) \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_0^t \begin{pmatrix} b(X_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_s \\ dW_s \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s [\theta(X_s) dW_s + \sigma(X_s) dB_s].$$

Если

$$\begin{aligned} X_0^2 \leq \mathbf{r}, \quad \sigma^2(x) + \theta^2(x) \leq \mathbf{r}[1 + x^2], \quad 2xa(x) + b^2(x) \leq \mathbf{r}[1 + x^2], \\ 2x[a(x) + b(x)\sigma(x)] + b^2(x) \leq \mathbf{r}[1 + x^2], \end{aligned}$$

то $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ для любого $T > 0$.

Предположим, что $\sigma^2(x) \equiv 0$. В этом случае X_t и W_t — независимые процессы и имеет место хорошо известный результат

$$\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = \mathbf{E} \exp \left(\int_0^T \theta(X_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(X_s) ds \right) = 1.$$

8.3. Модель Хитсуды. Нелинейная версия. Пусть

$$X_t = \int_0^t \int_0^s l(s, u) dB_u ds + B_t \quad \text{и} \quad \mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s \sigma(X_s) dB_s,$$

где $l(t, s)$ — ядро Вольтерра, $\int_0^t \int_0^s l^2(s, u) du ds < \infty$ и $\sigma(x)$ — нелинейная функция. В случае $\sigma(x) = x$ условие $\iint_{[0, T]^2} l^2(s, u) du ds < \infty$ обеспечивает $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$ (см. [11]).

Если $\sigma(x)$ — нелинейная (и, возможно, разрывная) функция, то, комбинируя подход Хитсуды с условием Бенеша, можно получить следующий результат.

Теорема 8.2. Если выполнены условия

$$1) \quad \sigma^2(x) \leq \mathbf{r}[1 + x^2], \quad s \in [0, T], \quad 2) \quad \int \int_{[0, T]^2} l^2(t, s) dt ds < \infty,$$

то $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$.

Доказательство. Формально эта модель не согласована с условиями теорем 4.1 и 5.1. Тем не менее выбор $\tau_n = \inf \{t: (\mathfrak{z}_t \vee X_t^2) \geq n\}$ и условие

$$\sup_n \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T X_{t \wedge \tau_n}^2 dt < \infty, \quad (8.1)$$

(см. лемму 6.1) обеспечивают $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$.

Условие 1) обеспечивает равенство $\mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} = 1$, т.е. гарантирует существование вероятностной меры $\mathbf{Q}^n$. Тогда, по теореме Гирсанова, случайный процесс $(B_{t \wedge \tau_n}, \mathbf{Q}^n)$ допускает представление

$$B_{t \wedge \tau_n} = \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma(X_s) ds + \tilde{B}_t^n,$$

в котором $\tilde{B}_t^n$ является $\mathbf{Q}^n$ -броуновским движением, остановленным в момент времени τ_n . Теперь случайный процесс $(X_{t \wedge \tau_n}, \mathbf{Q}^n)_{t \in [0, T]}$ — семимартингал:

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau_n} &= \int_0^t I_{\{s \wedge \tau_n\}} \int_0^s l(s, u) d\tilde{B}_u^n ds + \int_0^t I_{\{s \wedge \tau_n\}} \int_0^s l(s, u) \sigma(X_u) du ds \\ &\quad + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s(X) ds + \tilde{B}_t^n. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Мы будем использовать это представление для доказательства (8.1). Нам потребуется оценить $\tilde{\mathbf{E}}^n X_{t \wedge \tau_n}^2$. С этой целью мы оценим математическое ожидание $\tilde{\mathbf{E}}^n$ квадрата каждого члена в правой части (8.2). Применяя неравенства Коши–Шварца–Буняковского и максимальное неравенство Дуба для квадратично интегрируемого мартингала, а также условие 1) теоремы, получаем следующие оценки.

Первый член:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^n \left(\int_0^{t'} I_{\{s \leq \tau_n\}} \int_0^s l(s, u) d\tilde{B}_u^n ds \right)^2 &\leq \tilde{\mathbf{E}}^n \left(\int_0^t \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s l(s, u) d\tilde{B}_u^n \right| ds \right)^2 \\ &\leq t \tilde{\mathbf{E}}^n \left(\int_0^t \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s l(s, u) d\tilde{B}_u^n \right|^2 ds \right) \leq 4t^2 \iint_{[0, T]^2} l^2(s, u) du ds. \end{aligned}$$

Второй член:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^n \left(\int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \int_0^s l(s, u) \sigma(X_u) du ds \right)^2 &\leq t \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n I_{\{s \leq \tau_n\}} \left| \int_0^s l(s, u) \sigma(X_u) du \right|^2 ds \\ &\leq t \int_0^t \int_0^s l^2(s, u) du \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^{s \wedge \tau_n} \sigma^2(X_v) dv ds \\ &\leq t \int_0^t \int_0^s l^2(s, u) du \int_0^s \mathbf{r}[1 + \tilde{\mathbf{E}}^n X_{v \wedge \tau_n}^2] dv ds. \end{aligned}$$

Третий член: $\tilde{\mathbf{E}}^n \left(\int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s(X) ds \right)^2 \leq t \int_0^t \mathbf{r}[1 + \tilde{\mathbf{E}}^n X_{v \wedge \tau_n}^2] dv$.

Четвертый член: $\tilde{\mathbf{E}}^n (\tilde{B}_t^n)^2 \leq \tilde{\mathbf{E}}^n (t \wedge \tau_n) \leq t$.

Полученные оценки позволяют установить неравенство Гронуолла–Беллмана:

$$\tilde{\mathbf{E}}^n X_{t \wedge \tau_n}^2 \leq \mathbf{r} \int \int_{[0, T]^2} l^2(t, s) dt ds \left[1 + \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n X_{s \wedge \tau_n}^2 ds \right]$$

и, ввиду условия 2) теоремы, проверить справедливость (8.1). Теорема 8.2 доказана.

Приложение А. Обобщенная теорема Гирсанова. Пусть X — решение уравнения (3.1) и момент остановки τ_n определен в (6.1). Тогда

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau_n} &= X_0 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} a_s(X) ds \\ &+ \underbrace{\int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s(X) dB_s}_{=\mathcal{M}_t^{c,n}} + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} h_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)]}_{=\mathcal{M}_t^{d,n}}. \end{aligned}$$

Пусть случайная величина $\mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}$ определена в (6.2). Напомним, что $\mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n} = 1$, и определим вероятностную меру $\mathbf{Q}^n$ с плотностью $d\mathbf{Q}^n/d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_{T \wedge \tau_n}$.

Теорема А.1. 1) мера $\nu^n(ds, dz) = I_{\{s \leq \tau_n\}} [1 + \varphi(s, X_{s-}, z)] ds K(dz)$ является $\mathbf{Q}^n$ -компенсатором целочисленной меры $I_{\{s \leq \tau_n\}} \mu(ds, dz)$.

2) процесс $(X_{t \wedge \tau_n}, \mathcal{F}_t, \mathbf{Q}^n)_{t \in [0, T]}$ является семимартингалом с разложением

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau_n} &= X_0 + \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \left[a_s(X) + b_s(X) \sigma_s(X) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbf{R}} h_s(X, z) \varphi_s(X, z) K(dz) \right] ds + \widetilde{\mathcal{M}}_t^{c,n} + \widetilde{\mathcal{M}}_t^{d,n}, \end{aligned}$$

в котором $(\widetilde{\mathcal{M}}_t^{c,n}; \mathcal{F}_t, \mathbf{Q}^n)_{t \in [0, T]}$ и $(\widetilde{\mathcal{M}}_t^{d,n}; \mathcal{F}_t, \mathbf{Q}^n)_{t \in [0, T]}$ — непрерывный и чисто разрывный квадратично интегрируемые мартингалы. Их предсказуемые квадратические характеристики задаются соответственно формулами:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_t &= \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s^2(X) ds, \\ \langle \widetilde{\mathcal{M}}^{d,n} \rangle_t &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} h_s^2(X, z) [1 + \varphi_s(X, z)] K(dz) ds. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть θ_n — момент остановки, $\theta_n \leq \tau_n$. Пусть $\Gamma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ — измеримое множество. Тогда

$$\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} \mu(ds, dz) = \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} \nu^n(ds, dz).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} \mu(ds, dz) &= \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \theta_n} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} \mu^n(ds, dz) \\
&= \mathbf{E} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} \mathfrak{z}_{s \wedge \theta_n} \mu^n(ds, dz) \\
&= \mathbf{E} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} \mathfrak{z}_{(s \wedge \theta_n)-} [1 + \varphi_s(X, z)] ds K(dz) \\
&= \mathbf{E} \mathfrak{z}_{T \wedge \theta_n} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} [1 + \varphi(s, X_{s-}, z)] ds K(dz) \\
&= \tilde{\mathbf{E}}^n \int_0^T \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \theta_n\}} I_{\{z \in \Gamma\}} [1 + \varphi(s, X_{s-}, z)] ds K(dz).
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу произвольности θ_n и Γ , утверждение 1) имеет место (по поводу дополнительных деталей см. [25, § 5, гл. 4] и [13, § 3.a–§ 3.d]).

2) Для удобства обозначений положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_t^{c,n} &= \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} b_s(X) dB_s, \\
\mathcal{M}_t^{d,n} &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} h_s(X, z) [\mu(ds, dz) - ds K(dz)].
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n}$ и $\mathcal{M}_t^{c,n}$, $\mathcal{M}_t^{d,n}$ — квадратично интегрируемые мартингалы, совместные предсказуемая квадратическая характеристика $\langle \mathfrak{z}_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathcal{M}^{c,n} \rangle_t = \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_{s-} \sigma_s(X) b_s(X) ds$ и квадратическая характеристика

$$[\mathfrak{z}_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathcal{M}^{d,n}]_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_{s-} \varphi_s(X, z) h_s(X, z) \mu(ds, dz)$$

полностью определены. Более того, $\langle \mathfrak{z}_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathcal{M}^{d,n} \rangle_t$, являясь компенсатором квадратической характеристики $[\mathfrak{z}_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathcal{M}^{d,n}]_t$, допускает следующее представление:

$$\langle \mathfrak{z}_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathcal{M}^{d,n} \rangle_s = \int_0^s \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \mathfrak{z}_{s-} \varphi_s(X, z) h_s(X, z) K(dz) ds.$$

Далее, в силу теоремы 2 из [25, § 5, гл. 4], процессы

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}_t^{c,n} &= \mathcal{M}_t^{c,n} - \int_0^t \mathfrak{z}_{(s \wedge \tau_n)-}^{-1} d\langle \mathfrak{z}_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathcal{M}^{c,n} \rangle_s, \\
\widetilde{\mathcal{M}}_t^{d,n} &= \mathcal{M}_t^{d,n} - \int_0^t \mathfrak{z}_{(s \wedge \tau_n)-}^{-1} d\langle \mathfrak{z}_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathcal{M}^{d,n} \rangle_s
\end{aligned}$$

являются непрерывным и чисто разрывным $\mathbf{Q}^n$ -мартингалами. Другими словами, $(\mathbf{Q}^n: \mathcal{M}_t^{c,n}; \mathcal{M}_t^{d,n})$ -процессы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t^{c,n} &= \int_0^t I_{\{s \leq \tau_n\}} \sigma_s(X) b_s(X) ds + \widetilde{\mathcal{M}}_t^{c,n}, \\ \mathcal{M}_t^{d,n} &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}} I_{\{s \leq \tau_n\}} \varphi_s(X, z) h_s(X, z) ds + \widetilde{\mathcal{M}}_t^{d,n},\end{aligned}\tag{A.2}$$

где $(\mathbf{Q}^n, \widetilde{\mathcal{M}}_t^{c,n})$ — непрерывный мартингал и $(\mathbf{Q}^n, \widetilde{\mathcal{M}}_t^{d,n})$ — чисто разрывный мартингал с $\langle \widetilde{\mathcal{M}}^{c,n} \rangle_t$ и $\langle \widetilde{\mathcal{M}}^{d,n} \rangle_t$, определенными в (A.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andersen L. B., Piterbarg V. V. Moment explosions in stochastic volatility models. — Finance Stoch., 2007, v. 11, p. 29–50.
2. Baudoin F., Nualart D. Equivalence of Volterra processes. — Stochastic Process. Appl., 2003, v. 107, p. 327–350.
3. Benes V. E. Existence of optimal stochastic control laws. — SIAM J. Control, 1971, v. 9, p. 446–475.
4. Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion. — Bernoulli, 2001, v. 7, p. 913–934.
5. Cheridito P., Filipović D., Yor M. Equivalent and absolutely continuous measure changes for jump-diffusion processes. — Ann. Appl. Probab., 2005, v. 15, № 3, p. 1713–1732.
6. Cox J. C. The constant elasticity of variance option. Pricing model. — J. Portfolio Management, 1997, v. 23, № 2, p. 15–17.
7. Dawson D. Equivalence of Markov processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1968, v. 131, p. 1–31.
8. Delbaen F., Shirakawa H. A note on option pricing for constant elasticity of variance model. — Asia-Pac. Financ. Mark., 2002, v. 9, № 2, p. 85–99.
9. Doléans-Dade C. Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1970, v. 16, p. 181–194.
10. Гирсанов И. В. О преобразовании некоторого класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 2, с. 285–301.
11. Hitsuda M. Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process. — Osaka J. Math., 1968, v. 5, p. 299–312.
12. Itô K., Watanabe S. Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1965, v. 15, p. 13–30.
13. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов, т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 542 с., 366 с.
14. Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. I, II. — Матем. сб., 1978, т. 107(149), № 3(11), с. 364–415; 1979, т. 108(150), № 1, с. 32–61.
15. Kadota T., Shepp L. Conditions for absolute continuity between a certain pair of probability measures. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1970, v. 16, p. 250–260.
16. Kallsen J., Shiryaev A. N. The cumulant process and Esschers change of measure. — Finance Stoch., 2002, v. 6, p. 397–428.

17. Karatzas I., Shreve S. E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1991, 470 p. (Graduate Texts in Math., v. 113.)
18. Kazamaki N. On a problem of Girsanov. — Tôhoku Math. J., 1970, v. 29, p. 597–600.
19. Kazamaki N., Sekiguchi T. On the transformation of some classes of martingales by a change of law. — Tôhoku Math. J., 1979, v. 31, p. 261–279.
20. Krylov N. V. A simple proof of a result of A. Novikov. arXiv:math/020713v2 [math.PR], 2009.
21. Kunita H. Absolute continuity of Markov processes and generators. — Nagoya Math. J., 1969, v. 36, p. 1–26.
22. Kunita H. Absolute continuity of Markov processes. — Lecture Notes in Math., 1976, v. 511, p. 44–77.
23. Lépine D., Mémis J. Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1978, v. 42, p. 175–203.
24. Луццер Р. Ш., Ширяев А. Н. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской. — Изв. АН СССР, 1972, т. 36, № 4, с. 847–889.
25. Луццер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
26. Liptser R. S., Shiryaev A. N. Statistics of Random Processes. I: General Theory. Berlin: Springer, 2001, 427 p. (Appl. Math., v. 5.)
27. Liptser R. S., Shiryaev A. N. Statistics of Random Processes II: Applications. Berlin: Springer, 2001, 402 p. (Appl. Math., v. 6.)
28. Liptser R. Beneš condition for discontinuous exponential martingale. arXiv:0911.0641v3 [math.PR]
29. Mijatović A., Urusov M. On the martingale property of certain local martingales: criteria and applications. — arXiv:0905.3701v1 [math.PR]; Probab. Theory Related Fields, 2012, v. 152, № 1–2, p. 1–30.
30. Новиков А. А. Об условиях равномерной интегрируемости непрерывных неотрицательных мартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, № 4, с. 821–825.
31. Palmowski Z., Rolski T. A technique for exponential change of measure for Markov processes. — Bernoulli, 2002, v. 8, p. 767–785.
32. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1991, 533 p. (Grundlehren Math. Wiss., v. 293.)
33. Rydberg T. A note on the existence of equivalent martingale measures in a Markovian setting. — Finance Stoch., 1997, v. 1, p. 251–257.
34. Picard J. Representation formulae for the fractional Brownian motion. — Lecture Notes in Math., 2011, v. 2006, p. 3–70; arXiv:0912.3168v2 [math.PR]
35. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты. Модели. Т. 2: Теория. М.: Фазис, 2004, 1017 с.
36. Sin C. A. Complications with stochastic volatility models. — Adv. Appl. Probab., 1998, v. 30, № 1, p. 256–268.
37. Wong B., Heyde C. C. On the martingale property of stochastic exponentials. — J. Appl. Probab., 2004, v. 41, p. 654–664.

Поступила в редакцию
16.III.2012