Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, О малых отклонениях рядов независимых неотрицательных случайных величин с гладкими весами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 1, 133–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:38:02

© 2013 г.

РОЗОВСКИЙ Л.В.*

О МАЛЫХ УКЛОНЕНИЯХ РЯДОВ НЕЗАВИСИМЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ГЛАДКИМИ ВЕСАМИ¹⁾

Изучаются логарифмические малые отклонения сумм $\sum_{j \geq 1} \lambda_j X_j$, где $\{X_j\}$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины и $\{\lambda_j\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих некоторым условиям регулярности.

Ключевые слова и фразы: малые отклонения, неотрицательные случайные величины, медленно меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции, преобразование Лапласа.

1. Введение. Пусть $S = \sum_{j \geq 1} \lambda_j X_j$, где $\{\lambda_j\}$ — последовательность *невозрастающих* положительных чисел, а $\{X_i\}$ — независимые копии неотрицательных случайных величин X с функцией распределения $V(x)$, причем $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$. Нами исследуется поведение $-\ln \mathbf{P}(S < r)$ при $r \rightarrow 0$.

Аналогичные задачи рассматривались в значительном числе работ (подробные ссылки можно найти в [1]–[4]).

Отправной точкой для нашего исследования являются результаты из [1]–[3] и [5], [6]. В этих работах (см. также [9]) в предположении, что последовательность $\{\lambda_j\}$ удовлетворяет определенным условиям, были найдены асимптотики для $-\ln \mathbf{P}(S < r)$ при $r \rightarrow 0$ в *явном* виде при *минимальных* априорных предположениях. Приведем некоторые полученные там результаты, формулируя их, в основном, в терминах преобразований Лапласа случайных величин X и S . По нашему мнению, это зачастую выглядит проще и короче. Равносильная переформулировка в терминах соответствующих распределений каких-либо затруднений не вызывает (см. п. 6).

Обозначим

$$\varphi(t) = \mathbf{E} e^{-tX}, \quad \varphi_S(t) = \mathbf{E} e^{-tS}, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

* Санкт-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра математики, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: lrozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-638.2008.1) и РФФИ (грант № 10-01-00242-а).

Пусть положительная и невозрастающая функция $\lambda(u)$, $u > 0$, удовлетворяет условию $\lambda(j) = \lambda_j$, $j \geq 1$, а $\lambda^{-1}(\cdot)$ обозначает функцию, обратную к $\lambda(\cdot)$.

Теорема 1 [3, теорема 2.1]. *Предположим, что функция $\lambda(u)$ правильно меняется на ∞ с некоторым показателем $-1/\gamma < -1$ (и, следовательно, функция $\lambda^{-1}(x)$ правильно меняется в нуле с показателем $\gamma \in (0, 1)$). Пусть, кроме того, $-\ln \varphi(t) = O(t^{\gamma-\delta})$, $t \rightarrow \infty$, и $\mathbf{E} X^{\gamma+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$. Тогда $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и*

$$-\ln \varphi_S(t) \sim K(\gamma) \lambda^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где

$$K(\gamma) = -\int_0^\infty u^{-\gamma} d \ln \varphi(u) < \infty. \quad (1.3)$$

Теорема 1 является обобщением одного результата работы [1], в которой соотношение (1.2) было получено в случае $\lambda_j \sim j^{-1/\gamma} \ln^\delta j$ при оптимальном моментном предположении.

Теорема 2 [3, теорема 4.1]. *Пусть функция $\lambda^{-1}(x)$ медленно меняется в нуле. Если $\mathbf{E} X^\delta < \infty$ при некотором $\delta > 0$ и*

$$-(\ln \varphi(t))' \sim \frac{\alpha}{t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

то $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и

$$-\ln \varphi_S(t) \sim \alpha \int_{1/t}^1 \lambda^{-1}(u) \frac{du}{u} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Заметим, что соответствующий результат из [3], как нам кажется, содержит неточность (функция, определенная в [3, (7.4)], не обязательно медленно меняется), и теорема 2 представляет его исправленный вариант.

Нижеследующий результат является широким обобщением и уточнением теоремы 8 из [2].

Теорема 3 [6, теорема 5]. *Пусть $-\ln \lambda_j \sim \alpha j$ при некотором $\alpha > 0$ и $\mathbf{E} \ln(1 + X) < \infty$. Если $-\ln \varphi(t)$ правильно меняется на ∞ с некоторым показателем $\delta \in (0, 1)$, то $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$, $\Lambda_\delta = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^\delta < \infty$ и $\ln \varphi_S(t) \sim \Lambda_\delta \ln \varphi(t)$ при $t \rightarrow \infty$.*

Основной целью настоящей работы является получение новых асимптотик для $-\ln \varphi_S(t)$ при $t \rightarrow \infty$, а также уточнение и обобщение утверждений типа теорем 1–3. В частности, удастся несколько ослабить предположения относительно весов $\{\lambda_j\}$, а также получить асимптотики, такие как (1.2) и (1.5), при менее ограничительных, зачастую неумлучшае-

мых, условиях, в том числе в ситуациях, когда сформулировать результат в терминах распределений без дополнительных предположений не представляется возможным.

Несколько слов о структуре статьи. Работа разбита на шесть пунктов, причем п. 5 содержит доказательства, а в справочном п. 6 приведены тауберовы теоремы, устанавливающие связь между распределением случайной величины и ее преобразованием Лапласа. В пп. 2 и 3 предлагаются условия, при которых $-\ln \varphi_S(t)$ имеет асимптотику, правильно меняющуюся на ∞ и не зависящую от любого *конечного* подмножества весов $\{\lambda_j\}$.

Теорема 1 является следствием основного результата п. 2, а именно п. (1) теоремы 4, в условиях которого имеет место соотношение (1.3). В замечании 1 показано, как утверждение (1) теоремы 4 выглядит в терминах распределений. В следствиях 1, 2 и 3, также сформулированных в терминах распределений, приведены необходимые и достаточные условия, при которых $-\ln \mathbf{P}(S < r)$, $r \rightarrow 0$, имеет соответствующую асимптотику для случая весов $\{\lambda_j\}$ некоторого определенного вида.

В п. 3 исследуется ситуация $K(\gamma) = \infty$ (см. (1.3)), при которой часть (2) теоремы 4, а также следствия 1 и 2 могут быть уточнены. Приведены теоремы 5 и 6 (интеграл $K(\gamma)$ расходится на ∞) и теорема 7 ($K(\gamma)$ расходится в нуле), содержащие разнообразные условия, при которых асимптотику для $-\ln \varphi_S(t)$ удастся выписать в явном виде. В частности, показано, что теорема 2 вытекает из теоремы 6.

В п. 4 приведены теоремы 8, 9 и 10, в которых изучается случай, когда асимптотика $-\ln \varphi_S(t)$, в отличие от результатов пп. 2 и 3, определенным образом зависит от значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. При этом теорема 8 из п. 4 является широким обобщением теоремы 3, а асимптотика, найденная в теореме 10, является новой и ранее в литературе не встречалась.

Следует сказать, что в доказательствах ключевую роль играет предложение 1 из [6]. Мы также пользуемся некоторыми соображениями из [5].

2. Результаты. I. Пусть положительная *неубывающая* функция $b(u) = b_\gamma(u)$, $u \geq 0$, правильно меняется на ∞ с некоторым показателем γ , $0 \leq \gamma \leq 1$, т.е. функция $b_0(u) = u^{-\gamma}b(u)$ медленно меняется на ∞ . Следуя [5] и [6], предположим, что $b(u)$ и $\{\lambda_j\}$ связаны соотношением

$$b_\gamma\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \sim j \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Так, если $\lambda_j \sim j^{-1/\gamma} g(\ln j)$, где $\gamma > 0$ и положительная функция $g(u)$, $u > 0$, при некотором δ удовлетворяет условию $ug'(u) = (\delta + o(1))g(u)$, $u \rightarrow \infty$ (и, следовательно, правильно меняется на ∞ с показателем δ), то можно положить $b(u) = u^\gamma(\gamma^\delta g(\ln u))^\gamma$, $u > 1$. Если же $-\ln \lambda_j \sim \alpha j^\delta$

при положительных α и δ , то $b(u) = (\alpha^{-1} \ln u)^{1/\delta}$, $u > 1$. Наконец, если $\lambda^{-1}(1/u)$ правильно меняется на ∞ с положительным показателем γ , то естественен выбор $b(u) = \lambda^{-1}(1/u)$, $u > 1$.

В [5, замечание 1] было показано, что необходимое предположение $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ равносильно условию

$$\int_1^\infty \left(u \int_u^\infty b(y) \frac{dy}{y^2} \right) dV(u) < \infty, \quad (2.2)$$

которое при $0 \leq \gamma < 1$ совпадает с $\mathbf{E} b_\gamma(X) < \infty$.

Введем дополнительные обозначения. Предполагая, что выполнено (2.1), положим

$$g(u) = g_\gamma(u) = \sup_{t \geq 1} \frac{b(ut)}{b(t)},$$

$$h(u) = h_\gamma(u) = \sup_{t \geq 1} \frac{b(t)}{b(ut)}, \quad \tilde{h}(u) = \tilde{h}_\gamma(u) = \sup_{t \geq 1} \frac{b(ut)}{b(u^2t)}. \quad (2.3)$$

Перечислим некоторые свойства введенных выше функций.

Лемма 1. (1) Функция $g(u)$ не убывает и правильно меняется на ∞ с показателем γ . Кроме того, $g(u) \geq u^\gamma$.

(2) Функции $h(u)$ и $\tilde{h}(u)$ не возрастают и правильно меняются на ∞ с показателем $-\gamma$. Кроме того,

$$\tilde{h}(u) \leq h(u), \quad \frac{1}{h(u)} \leq \frac{b(u)}{b(1)} \leq g(u),$$

$$h(u) \geq u^{-\gamma}, \quad \tilde{h}(u) \geq u^{-\gamma}, \quad \tilde{h}(u) \geq \frac{b(u)}{b(u^2)}.$$

(3) Предположим, что положительная функция $L(u)$ удовлетворяет условию

$$u(\ln L(u))' \searrow 0 \quad \text{при } u \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

(и, следовательно, $L(u)$ не убывает и медленно меняется на ∞ .)

Если $b(u) = u^\gamma L(u)$, то $h(u) = \tilde{h}(u) = u^{-\gamma}$ и

$$g(u) = O(b(u)), \quad u \rightarrow \infty; \quad (2.5)$$

если $b(u) = u^\gamma/L(u)$, то $g(u) = u^\gamma$ и

$$h(u) = O\left(\frac{1}{b(u)}\right), \quad u \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

$$\tilde{h}(u) = O\left(\frac{b(u)}{b(u^2)}\right), \quad u \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.5) было доказано в [5, замечание 2]; соотношения (2.6) и (2.7) проверяются аналогично. Все эти оценки неулучшаемы.

Заметим, что если наряду с (2.4) выполнено условие $u \ln u (\ln L(u))' = O(1)$, то $1 \leq u^\gamma \tilde{h}(u) = O(1)$.

Пусть, так же как в теореме 1, $K(\gamma) = -\int_0^\infty u^{-\gamma} d \ln \varphi(u)$, $\gamma \geq 0$.

Нетрудно проверить, что $K(0) = -\ln \mathbf{P}(X=0)$, $K(1) = \infty$ и $K(\gamma) = -\gamma \int_0^\infty \ln \varphi(u) u^{-\gamma} du/u$ при $0 < \gamma < 1$. Кроме того, интеграл $K(\gamma)$ сходится в нуле тогда и только тогда, когда $\mathbf{E} X^\gamma < \infty$.

Теперь сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 4. (1) Пусть (см. (2.1)) $0 \leq \gamma < 1$ и

$$\mathbf{E} g_\gamma(X) < \infty. \quad (2.8)$$

Предположим, что либо

$$-\int_1^\infty h(u) d \ln \varphi(u) < \infty, \quad (2.9)$$

либо, если $0 < \gamma < 1$, найдется функция $\kappa(u)$,

$$\kappa(u) \searrow 0 \quad \text{при } u \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

такая, что

$$-\ln \varphi(t) = O(\kappa(t)b(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

и

$$\int_1^\infty \kappa(u)b(u)\tilde{h}(u) \frac{du}{u} < \infty. \quad (2.12)$$

Тогда $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$, $K(\gamma) < \infty$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln \varphi_S(t)}{b(t)} = K(\gamma). \quad (2.13)$$

(2) Пусть (см. (2.1)) $0 \leq \gamma \leq 1$. Если $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и $K(\gamma) = \infty$, то соотношение (2.13) остается справедливым.

Заметим (см. лемму 1), что из (2.8) следует $\mathbf{E} X^\gamma < \infty$, а также то, что (2.9) при $\gamma > 0$ равносильно $-\int_1^\infty \ln \varphi(u)h(u) du/u < \infty$, причем последнее предположение, вообще говоря, ограничительнее, нежели (2.12).

З а м е ч а н и е 1. В соответствии с леммой 5 (см. п. 6), соотношение (2.13) равносильно

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\ln \mathbf{P}(S < r)}{b(s)} = C(\gamma), \quad (2.14)$$

здесь $s = s(r) \rightarrow \infty$ и выполнено условие $b(s)/s \sim r$, $r \rightarrow 0$, а $C(\gamma) = c_*(\gamma)(K(\gamma))^{1/(1-\gamma)}$, где $c_*(\gamma) = (1-\gamma)\gamma^{\gamma/(1-\gamma)}$ ($c_*(0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} c_*(\gamma) = 1$).

Условие (2.11) также может быть переписано в терминах $-\ln V(r)$ (по крайней мере, для случая правильно меняющейся функции $\kappa(t)$).

Из первого утверждения леммы 1 следует, что (2.8) вытекает из $\mathbf{E} X^{\gamma+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$, а ее второе утверждение, в свою очередь, показывает, что сделанное в теореме 1 предположение

$$-\ln \varphi(t) = O(t^{\gamma-\delta}), \quad t \rightarrow \infty,$$

влечет (2.11) и (2.12). Таким образом, теорема 1 является следствием теоремы 4.

Другое следствие теоремы 4, относящееся к случаю $\gamma = 0$, ведет к [5, предложение 1].

З а м е ч а н и е 2. Пусть выполнено (2.4). Если $b(u) = u^\gamma L(u)$, то (2.8) превращается в необходимое условие

$$\mathbf{E} b(X) < \infty, \quad (2.15)$$

а условия (2.9) и (2.12) совпадают с условиями

$$-\int_1^\infty u^{-\gamma} d\ln \varphi(u) < \infty \quad (2.16)$$

и $\int_1^\infty \kappa(u) L(u) du/u < \infty$ соответственно. Если $b(u) = u^\gamma/L(u)$, то (2.8) совпадает с $\mathbf{E} X^\gamma < \infty$, а условия (2.9), (2.12) переходят соответственно в условия $-\int_1^\infty 1/b(u) d\ln \varphi(u) < \infty$ и

$$\int_1^\infty \kappa(u) \frac{L(u^2)}{L^2(u)} \frac{du}{u} < \infty. \quad (2.17)$$

В частности, условия (2.11) и (2.17) выполняются при *любом* $\kappa(u) \searrow 0$, если

$$\int_1^\infty \frac{L(u^2)}{L^2(u)} \frac{du}{u} < \infty \quad (2.18)$$

и

$$-\ln \varphi(u) = o(b(u)) \quad \text{при } u \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Заметим, что в соответствии с леммой 5 из п. 6 и предложением 2 из [6] условие (2.19) равносильно $-\ln V(r) = o(b(s))$, $r \rightarrow 0$, и в некотором смысле является необходимым для (2.13) (см. лемму 2 из п. 5 и высказывание сразу после нее).

Следствие 1. Пусть выполнено условие (2.4) и $b(u) = u^\gamma L(u)$ при $0 \leq \gamma < 1$. Тогда соотношения (2.15) и

$$C(\gamma) = A \in [0, \infty] \quad (2.20)$$

являются необходимыми и достаточными для выполнения соотношения $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\ln \mathbf{P}(S < r)}{b(s)} = A \quad (2.21)$$

(см. обозначения в (2.14)).

Следствие 2. Пусть выполнены условия (2.4) и $b(u) = u^\gamma/L(u)$ при $0 < \gamma < 1$. Пусть также справедливы предположения (2.10), (2.11) и (2.17). Тогда условия (2.15) и (2.20) являются необходимыми и достаточными для $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и (2.21).

Следствие 3. Пусть $\lambda_j \sim (j \ln^\delta j)^{-1/\gamma}$ при $1/\gamma > 1$ и некотором δ . Обозначим $\alpha = \gamma/(1-\gamma)$ и дополнительно предположим, что при $\delta > 1$

$$-\ln V(r) = o\left(r^{-\alpha} \ln^{-\delta/(1-\gamma)} \frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow 0,$$

а если $0 < \delta \leq 1$, то

$$-\ln V(r) = O\left(r^{-\alpha} \ln^{-\rho} \frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow 0,$$

при некотором $\rho > (1-\gamma)^{-1}$. Условия $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^\gamma \ln^\delta \frac{1}{r}\right)^{1/(1-\gamma)} (-\ln \mathbf{P}(S < r)) = A \in [0, \infty] \quad (2.22)$$

выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{E} X^\gamma \ln^{-\delta} X < \infty$ и $K(\gamma) = A^{1-\gamma}(1-\gamma)^{-1} \alpha^{\delta-\gamma}$ (таким образом, в (2.22) $A = [\alpha^{\gamma-\delta}(1-\gamma)K(\gamma)]^{1/(1-\gamma)}$).

Следствие 3, в частности, уточняет соответствующий результат из [1], упомянутый в п. 1.

3. Результаты. II. В этом пункте рассматривается ситуация $K(\gamma) = \infty$, при которой вторая часть теоремы 4, а также следствия 1 и 2 могут быть уточнены.

Теорема 5. Пусть функция $l_\gamma(t) = -\int_1^t \ln \varphi(u) u^{-1-\gamma} du$, $t \geq 1$, при некотором γ , $0 \leq \gamma < 1$, медленно меняется на ∞ или, равносильно,

$$-\ln \varphi(u) = o(1) u^\gamma l_\gamma(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

и пусть, кроме того, $l_\gamma(\infty) = \infty$.

Предположим также, что в случае $\gamma = 0$

$$\mathbf{E} \ln(1+X) < \infty \quad \text{и} \quad \ln \lambda_j \sim -\alpha j \quad (\exists \alpha > 0), \quad (3.2)$$

а в случае $0 < \gamma < 1$

$$\mathbf{E} X^\gamma < \infty \quad \text{и} \quad \lambda_j \sim j^{-1/\gamma}. \quad (3.3)$$

Тогда $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и

$$-\ln \varphi_S(t) \sim c(\gamma)t^\gamma l_\gamma(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где $c(0) = 1/\alpha$ и $c(\gamma) = \gamma$ ($0 < \gamma < 1$).

Напомним, что моментные условия в (3.2) и (3.3) являются необходимыми для $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$.

Следствие 4. Пусть $\delta > -1$ и $\beta \geq 0$ — некоторые постоянные, а функция $H(u)$ правильно меняется на ∞ с показателем $\delta(1 + \beta)$, и пусть

$$-\ln V(r) \sim \left(\frac{1}{r}\right)^\beta H\left(\ln \frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow 0.$$

Если при $\beta = 0$ выполнено условие (3.2), а при $\beta > 0$ — условие (3.3), в котором $\gamma = \beta/(1 + \beta)$, то $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и

$$-\ln \mathbf{P}(S < r) \sim A(\beta) (-\ln V(r)) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{1+\beta}, \quad r \rightarrow 0,$$

где $A(0) = (\alpha(1 + \delta))^{-1}$ и $A(\beta) = (\beta/(1 + \delta))^{1+\beta}$, если $\beta > 0$.

Следствие 4 можно вывести из теоремы 5, воспользовавшись леммой 5 и нижеследующим замечанием 3.

З а м е ч а н и е 3. Пусть $-\ln \varphi(u) \sim u^\gamma h(\ln u)$, $u \rightarrow \infty$, где $h(t)$ правильно меняется на ∞ с некоторым показателем $\delta > -1$. Тогда

$$l_\gamma(t) \sim (1 + \delta)^{-1} h(\ln t) \ln t, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ показатель δ должен быть неотрицательным, а функция $h(t)$ может быть положительной постоянной.

Если в следствии 4 положить $\beta = 0$ и $H(u) = c$ или cu , где c — положительная постоянная, получим уточненные варианты теорем 2 и 4 из [2].

Теорема 6. Пусть при некотором γ , $0 \leq \gamma < 1$, выполняются условия (2.1) и (2.8). При $t \geq 1$ положим $l_\gamma(t) = \int_1^t b_\gamma(u) u^{-1-\gamma} du$, предполагая, что $l_\gamma(\infty) = \infty$. Пусть в случае $\gamma = 0$

$$-\ln \varphi(u) \sim c \ln u, \quad u \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

а в случае $0 < \gamma < 1$

$$-\ln \varphi(u) \sim cu^\gamma, \quad u \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

при некоторой положительной постоянной c .

Тогда выполняются условия $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и (3.4), где $c(0) = c$ и $c(\gamma) = c\gamma$ ($0 < \gamma < 1$).

Напомним (см. замечание 1 или лемму 5), что условия (3.6) и (3.7) равносильны соответственно условиям $-\ln V(r) \sim c \ln(1/r)$ и $-\ln V(r) \sim c_*(\gamma)c^{1/(1-\gamma)}(1/r)^{\gamma/(1-\gamma)}$ при $r \rightarrow 0$.

Отметим, что (3.6) влечет (1.4) и, следовательно (см. также лемму 1(1)), теорема 2 следует из теоремы 6.

З а м е ч а н и е 4. Пусть $b_\gamma(u) \sim u^\gamma h(\ln u)$, $u \rightarrow \infty$, где функция $h(t)$ определена в замечании 3. Тогда имеет место (3.5).

Отсюда, в частности, следует, что теорема 6 при $b_\gamma(u) = u^\gamma(\gamma \ln u)^\delta$ приводит к теореме 5(1) из [6].

В теоремах 5 и 6 интеграл $K(\gamma)$ расходился на ∞ . Теперь рассмотрим случай, когда $K(\gamma)$ расходится в нуле.

Теорема 7. Пусть при некотором γ , $0 < \gamma < 1$, выполняется условие (2.1). Для $t \geq 1$ положим $l_\gamma(t) = \int_t^\infty b_\gamma(u)u^{-1-\gamma} du < \infty$. Если при некотором положительном c

$$1 - \varphi(u) \sim cu^\gamma, \quad u \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

и

$$-\ln \varphi(t) = O(t^\delta), \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

где $\delta < \gamma$, то выполняются условия $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и (3.4) при $c(\gamma) = c\gamma$.

Заметим, что (3.8) равносильно условию $1 - V(x) \sim c(\Gamma(1-\gamma))^{-1}x^{-\gamma}$, $x \rightarrow \infty$, а (3.9) равносильно условию $-\ln V(r) = O(r^{-1/(1-\delta)})$, $r \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е 5. Функция $l_\gamma(t)$ медленно меняется на ∞ . В частности, если $b_\gamma(u) \sim u^\gamma h(\ln u)$, $u \rightarrow \infty$, где функция $h(t)$ правильно меняется на ∞ с некоторым показателем $\delta < -1$, то, аналогично (3.5), $l_\gamma(t) \sim |1 + \delta|^{-1}h(\ln t) \ln t$, $t \rightarrow \infty$.

Простое достаточное условие (3.9) в некоторых случаях может быть ослаблено вплоть до оптимального предположения (3.1).

Положим $L(u) = u^{-\gamma}b_\gamma(u)$, $\tilde{l}_\gamma(u) = \sup_{t \geq 1} l_\gamma(ut)/l_\gamma(u^2t)$, а также $\mu(u) = L(u)/l_\gamma(u)$ и $\bar{\mu}(u) = \sup_{t \geq 1} \mu(ut)/\mu(u)$.

Функции $L(u)$, $\tilde{l}_\gamma(u)$ и $\bar{\mu}(u)$ медленно меняются на ∞ . Помимо этого, $\tilde{l}_\gamma(u) \geq 1$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \mu(u) = 0$ и $\bar{\mu}(u) \geq 1$.

З а м е ч а н и е 6. (1) Если

$$\int_1^\infty \tilde{l}_\gamma(u)L(u) \frac{du}{u} < \infty, \quad (3.10)$$

то условие (3.9) в теореме 7 можно заменить на (3.1).

(2) Пусть $\kappa(u) \searrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Если

$$\int_1^\infty \kappa(u)\bar{\mu}(u)\tilde{l}_\gamma(u)L(u) \frac{du}{u} < \infty, \quad (3.11)$$

то условие (3.9) в теореме 7 можно заменить на

$$-\ln \varphi(t) = O(\kappa(t)t^\gamma l_\gamma(t)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Выбирая $\kappa(u) = t^{-\varepsilon}$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, видим, что условие (3.11) выполняется, а (3.9) вытекает из (3.12).

Отметим, что если $\mu(u) \searrow 0$, то $\tilde{l}_\gamma(u) = l_\gamma(u)/l_\gamma(u^2)$ и $\bar{\mu}(u) = 1$. Если дополнительно предположить, что $\mu(u) = O(1/\ln u)$ при $u \rightarrow \infty$, то $1 \leq \tilde{l}_\gamma(u) = O(1)$ и интеграл в (3.10) сходится.

Одно следствие теоремы 7, леммы 5 и замечаний 5 и 6 (1) приведено в следующем пункте (см. следствие 5 при $K = 0$).

4. Результаты. III. В этом пункте мы предполагаем, что имеет место (2.1) и

$$-\ln \varphi(t) \sim \omega_\delta(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

где $\omega_\delta(t)$, $t \geq 1$, является положительной функцией, правильно меняющейся на ∞ с некоторым показателем δ , $0 < \delta \leq 1$.

Теорема 8. Пусть $0 \leq \gamma < \delta$. Если (см. (2.1)) $\mathbf{E} b_\gamma(X) < \infty$, то

$$\ln \varphi_S(t) \sim \Lambda_\delta \ln \varphi(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

где

$$\Lambda_\delta = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^\delta < \infty. \quad (4.3)$$

Отметим, что теорема 3 является следствием теоремы 8 при $\delta \in (0, 1)$, $\gamma = 0$ и $b_\gamma(u) = \alpha^{-1} \ln u$, $u > 1$.

З а м е ч а н и е 7. По лемме 5 условия (4.1) и (4.2) при $\delta < 1$ равносильны соответственно условию правильного изменения функции $-\ln V(r)$ в нуле с показателем $\delta/(1 - \delta)$ и условию $\ln \mathbf{P}(S < r) \sim \Lambda_\delta^{1/(1-\delta)} \ln V(r)$, $r \rightarrow 0$.

Далее рассмотрим граничную ситуацию, когда параметр δ из условия (4.1) совпадает с γ из условия (2.1).

Для того чтобы сформулировать результаты в оптимальной общности, нам понадобятся дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} \omega(u) &= u^{-\gamma} \omega_\gamma(u), \quad \bar{\omega}(u) = \sup_{t \geq 1} \frac{\omega(ut)}{\omega(t)}, \quad \tilde{\omega}(u) = \sup_{t \geq 1} \frac{\omega(ut)}{\omega(u^2 t)}, \\ \nu(u) &= \frac{b_\gamma(u)}{\omega_\gamma(u)}, \quad \bar{\nu}(u) = \sup_{t \geq 1} \nu(ut), \quad u \geq 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что все определенные выше функции медленно меняются на ∞ , причем $\bar{\omega}(u) \geq 1$ и $\tilde{\omega}(u) \geq 1$. Кроме того, функция $\bar{\nu}(u)$ не возрастает и, следовательно, имеет неотрицательный предел $\bar{\nu}(\infty)$ на ∞ .

Теорема 9. Пусть $0 < \delta = \gamma < 1$. Предположим, что выполнены условия (4.1) (с $\delta = \gamma$),

$$\int_1^\infty \bar{\nu}(u) \tilde{\omega}(u) \omega(u) \frac{du}{u} < \infty \quad (4.5)$$

u

$$\mathbf{E} \bar{\nu}(X) \bar{\omega}(X) X^\gamma < \infty. \quad (4.6)$$

Тогда $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$, $\Lambda_\gamma < \infty$ (см. (4.3)) и

- (1) если $\bar{\nu}(\infty) = 0$, то имеет место (4.2) при $\delta = \gamma$;
- (2) если $\bar{\nu}(\infty) > 0$, то $K(\gamma) < \infty$ (см. (1.2)) и

$$-\ln \varphi_S(t) \sim \Lambda_\gamma \omega_\gamma(t) + K(\gamma) b_\gamma(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Обращаем внимание на то, что при $\bar{\nu}(\infty) > 0$ величины $\bar{\nu}(\cdot)$ из условий (4.5) и (4.6) можно удалить.

З а м е ч а н и е 8. (1) Если

$$u(\ln \omega(u))' \searrow 0 \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

то $\bar{\omega}(u) = O(\omega(u))$ и $\tilde{\omega}(u) = O(1)$ при $u \rightarrow \infty$, а если

$$u(\ln \omega(u))' \nearrow 0 \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

то $\bar{\omega}(u) = O(1)$ и $\tilde{\omega}(u) = O(\omega(u)/\omega(u^2))$ при $u \rightarrow \infty$, причем и в том, и в другом случае полученные оценки являются неупрощаемыми.

(2) Пусть $\nu(u)$, начиная с некоторого места, не возрастает. Тогда из (4.7) следует $\bar{\nu}(\infty) = 0$, а условия (4.5) и (4.6) равносильны «необходимым» предположениям $l_\gamma(1) < \infty$ и (2.15) соответственно (см. [6, предложение 3] и обозначения в теореме 7); если же имеет место (4.8), то (4.5) равносильно условию $\int_1^\infty b_\gamma(u) u^{-(1+\gamma)} \omega(u)/\omega(u^2) du < \infty$, а (4.6) — условию $\mathbf{E} b_\gamma(X)/\omega(X) < \infty$.

Отметим, что если (наряду с (4.8))

$$u(\ln u) \left(\ln \frac{1}{\omega(u)} \right)' = O(1), \quad u \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

то $1 \leq \omega(u)/\omega(u^2) = O(1)$, $u \rightarrow \infty$, и, следовательно, условие (4.5) опять является необходимым.

Используя замечание 8, из теоремы 9 можно вывести ряд более прозрачных следствий, таких, например, как теорема 6 работы [6], где был проанализирован частный случай $\omega_\gamma(t) = ct^\gamma \ln^\delta t$, $b_\gamma(t) = t^\gamma (\gamma \ln t)^\delta$.

Следующее ниже утверждение, ранее не встречавшееся в литературе, использует обозначения из теоремы 7 и замечания 6.

Теорема 10. Пусть (см. (2.1) и (4.1)) $\delta = \gamma$ и выполнены условия (3.8) и (4.5). Тогда $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$, $\Lambda_\gamma < \infty$ и

$$-\ln \varphi_S(t) \sim \Lambda_\gamma \omega_\gamma(t) + c\gamma t^\gamma l_\gamma(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Следствие 5. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) $\lambda_j \sim (j g_\delta(\ln j))^{-1/\gamma}$, где функция $g_\delta(u)$ правильно меняется на ∞ с некоторым показателем $\delta > 1$;
 (2) $1 - V(x) \sim ax^{-\gamma}$, $x \rightarrow \infty$;
 (3) $-\ln V(r) = (K + o(1))\tau(r)$, $r \rightarrow 0$, при некотором $K \geq 0$, где

$$\tau(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(1/r)}{g_\delta(\ln(1/r))}\right)^{1/(1-\gamma)} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Тогда $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$, $\Lambda_\gamma < \infty$ и

$$-\ln \mathbf{P}(S < r) \sim A \tau(r), \quad r \rightarrow 0,$$

где $A = [K^{1-\gamma} \Lambda_\gamma + \alpha^{\gamma-\delta} \gamma(1-\gamma) a \Gamma(1-\gamma)/(\delta-1)]^{1/(1-\gamma)}$.

Следствие 5 при $K = 0$ обобщает одно утверждение из [6, теорема 4] и, как уже говорилось ранее, вытекает из теоремы 7. В случае положительного K для проверки используются теорема 10, лемма 5 и замечания 5, 6 (1) и 8.

5. Доказательства. Положим (см. (1.1) и (2.1))

$$J(t) = J_\gamma(t) = - \int_1^\infty \ln \varphi\left(\frac{t}{u}\right) db_\gamma(u), \quad t \geq 0.$$

Лемма 2 [6, предложение 1]. Пусть $\omega(t)$ обозначает положительную функцию, которая правильно меняется на ∞ с некоторым показателем $\tau \in [0, 1]$. Предположим, что выполнены условия (2.1) и (2.2) (или $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$).

(1) Если

$$-\ln \varphi(t) = o(\omega(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

то

$$-\ln \varphi_S(t) = (1 + o(1))J(t) + o(\omega(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

(2) Если

$$-\ln \varphi(t) \sim \omega(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

и

$$k_\tau = \int_1^\infty u^{-\tau} db(u) < \infty, \quad (5.3)$$

то

$$-\ln \varphi_S(t) \sim J(t) + (\Lambda_\tau - k_\tau)\omega(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

где

$$\Lambda_\tau = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^\tau < \infty. \quad (5.4)$$

В [6] также показано, что условия (5.2)–(5.4) являются в некотором смысле необходимыми.

Отметим, что соотношения (5.3) и (5.4) равносильны и заведомо выполняются, если $\tau > \gamma$.

Лемма 3. Пусть $0 \leq \gamma \leq 1$ и выполняются условия (2.1), (2.2). Тогда

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{J(t)}{b(t)} \geq K(\gamma). \quad (5.5)$$

Кроме того, если $K(\gamma) = \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln \varphi_S(t)}{b(t)} = \infty \quad (5.6)$$

и, при $0 \leq \gamma < 1$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\ln \mathbf{P}(S < r)}{b(s)} = \infty, \quad (5.7)$$

где $s = s(r) \rightarrow \infty$ и выполнено условие $b(s)/s \sim r$ при $r \rightarrow 0$.

Доказательство леммы 3. С помощью (2.2) можно показать, что

$$J(t) = \int_{1/t}^{\infty} (b(ut) - b(1)) d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right).$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J(t) &\geq \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} (b(ut) - b(1)) d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right) \sim b(t) \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} u^{\gamma} d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= -b(t) \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} u^{-\gamma} d \ln \varphi(u), \end{aligned}$$

если ε стремится к 0 достаточно медленно. Отсюда следует (5.5).

Далее, пусть $R \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ таким образом, что $b_0(\varepsilon t) \sim b_0(t) \sim b_0(t/\varepsilon)$ и $\varepsilon \geq (t\lambda_{2R})^{-1}$ (см. обозначения в (2.1)).

Обозначим $\lambda(y)$, $y > 0$, положительную и неубывающую функцию такую, что $\lambda_j = \lambda(j)$, $j \geq 1$. Тогда по (2.1) и [6, (3.1) и (3.2)]

$$\begin{aligned} -\ln \varphi_S(t) &\geq \sum_{j \geq R} (-\ln \varphi(\lambda_j t)) \geq -\int_R^{\infty} \ln \varphi(\lambda(y)t) dy \\ &= \int_R^{\infty} (y - R) d \ln \varphi(\lambda(y)t) \geq 0.5 \int_{2R}^{\infty} y d \ln \varphi(\lambda(y)t) \\ &\sim 0.5 \int_{2R}^{\infty} b \left(\frac{1}{\lambda(y)} \right) d \ln \varphi(\lambda(y)t) \geq 0.5 \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} b(ut) d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right) \\ &\sim 0.5 b(t) \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} u^{\gamma} d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right). \end{aligned}$$

Последний интеграл стремится к ∞ , что приводит к (5.6).

Проверка соотношения (5.7) осуществляется при помощи (5.6) так же, как в [5, предложение 1]. Лемма 3 полностью доказана.

Лемма 4. Пусть выполняются условия (2.8)–(2.12). Тогда

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{J(t)}{b(t)} \leq K(\gamma) < \infty. \quad (5.8)$$

Доказательство леммы 4. Случай $\gamma = 0$ был рассмотрен в [5, лемма 1].

Пусть $0 < \gamma < 1$. Из условий (2.8)–(2.12) и леммы 1 вытекает, что $K(\gamma) < \infty$. Далее,

$$J(t) = \left(\int_{1/\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} + \int_{1/t}^{\varepsilon} \right) (b(ut) - b(1)) d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right) = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t). \quad (5.9)$$

Если ε стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то

$$J_2(t) \sim \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} b(ut) d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right) \sim b(t) \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} u^{\gamma} d \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right) \sim K(\gamma) b(t). \quad (5.10)$$

Теперь, используя свойства медленно меняющихся функций (см. [7]) и рассуждая как в [5, доказательство леммы 1], получим с учетом (2.8) (и $\mathbf{E} X^{\gamma} < \infty$) при $t \rightarrow \infty$

$$J_1(t) = O(1) \left(-b(t) \varepsilon^{-\gamma} \ln \varphi(\varepsilon) - \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \ln \varphi \left(\frac{1}{u} \right) b(ut) \frac{du}{u} \right) = o(b(t)). \quad (5.11)$$

Пусть имеет место (2.9). Тогда $J_3(t) \leq -b(t) \int_{1/\varepsilon}^{\infty} h(u) d \ln \varphi(u) = o(b(t))$, $t \rightarrow \infty$. Отсюда и из (5.9)–(5.11) вытекает (5.8).

Пусть теперь выполняются условия (2.10)–(2.12). Положим $J_4(t) = - \int_{1/\varepsilon}^{\varepsilon t} \ln \varphi(u) b(t/u) / u du$. Из (2.11) следует, что

$$J_3(t) = O(J_4(t)) + o(b(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (5.12)$$

если ε стремится к 0 достаточно медленно.

Далее,

$$J_4(t) = - \left(\int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} + \int_{\sqrt{t}}^{\varepsilon t} \right) \ln \varphi(u) b \left(\frac{t}{u} \right) \frac{du}{u} = I_1(t) + I_2(t), \quad (5.13)$$

где

$$I_1(t) \leq -b(t) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \ln \varphi(u) \hat{h}(u) \frac{du}{u}, \quad \hat{h}(u) = \sup_{t \geq u^2} \frac{b(t/u)}{b(t)}.$$

Имея в виду (2.11), (2.12) и равенство $\hat{h}(u) = \tilde{h}(u)$ (см. (2.3)), получим

$$I_1(t) = o(b(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{I_2(t)}{b(t)} &= O(1) \int_{\sqrt{t}}^{\varepsilon t} \kappa(u) b(u) \frac{b(t/u)}{b(t)} \frac{du}{u} = O(1) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \kappa(s) b(s) \frac{b(t/s)}{b(t)} \frac{\kappa(t/s)}{\kappa(s)} \frac{ds}{s} \\ &= O(1) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \kappa(s) b(s) \hat{h}(s) \frac{\kappa(t/s)}{\kappa(s)} \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Следовательно, по (2.10) и (2.12)

$$I_2(t) = O(b(t)) \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \kappa(s) b(s) \tilde{h}(s) \frac{ds}{s} = o(b(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (5.9)–(5.14) снова следует (5.8).

Лемма 4, таким образом, полностью доказана.

Доказательство теоремы 4. Первое утверждение вытекает из леммы 2 (1) и лемм 3 (неравенство (5.5)) и 4; второе утверждение является следствием леммы 3 (соотношение (5.6)).

Доказательства следствий 1, 2 и 3 базируются, в основном, на теореме 4 и замечании 2. Проверим для примера достаточность в следствии 1 при $0 < A = C(\gamma) < \infty$ и $b(u) = u^\gamma L(u)$, когда $0 < \gamma < 1$. Действительно, первое предположение дает $K(\gamma) < \infty$ и, следовательно, $-\ln \varphi(t) = o(t^\gamma)$, $t \rightarrow \infty$, а второе ведет к $h(u) = O(u^{-\gamma})$, $u \rightarrow \infty$, и к (2.16). Значит, выполняются условия (2.8) и (2.9). Остается воспользоваться теоремой 4.

Все остальные рассуждения проводятся аналогично.

Доказательство теоремы 5 легко следует из первого утверждения леммы 2 и (3.1). Так, если $\gamma > 0$, то, полагая $b(u) = u^\gamma$, получим $J(t) = \gamma t^\gamma l_\gamma(t) + O(1) \sim \gamma t^\gamma l_\gamma(t)$, $t \rightarrow \infty$.

Утверждение о том, что (3.1) равносильно медленному изменению на бесконечности интеграла $l_\gamma(t)$, можно проверить, исходя из определения, с помощью оценок

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{l_\gamma(kt)}{l_\gamma(t)} \leq 1 + (-\ln \varphi(kt)) \int_t^{kt} u^{-1-\gamma} du, \\ \frac{l_\gamma(kt)}{l_\gamma(t)} &\geq 1 + (-\ln \varphi(t)) \int_t^{kt} u^{-1-\gamma} du \end{aligned}$$

при $k > 1$ (и аналогичных соотношений при $0 < k < 1$).

Доказательство теоремы 6. При любом $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$J(t) = \left(\int_1^{\varepsilon t} + \int_{\varepsilon t}^{t/\varepsilon} + \int_{t/\varepsilon}^{\infty} \right) \left(-\ln \varphi\left(\frac{t}{u}\right) \right) db_\gamma(u) = I_1 + I_2 + I_3. \quad (5.15)$$

Функция $l_\gamma(t)$ медленно меняется на ∞ и $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\gamma l_\gamma(t)/b(t) = \infty$; кроме того, если $\gamma = 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} l_\gamma(t)/\ln t = \infty$.

Значит, если ε стремится к 0 достаточно медленно при $t \rightarrow \infty$, то $I_1 \sim c(\gamma)l_\gamma(\varepsilon t) \sim c(\gamma)l_\gamma(t)$ и $I_2 = o(t^\gamma l_\gamma(t))$ при $t \rightarrow \infty$. Действительно, при положительных γ , обозначив $u^{-\gamma}b_\gamma(u)$ через $L(u)$, получим

$$I_2 \leq \left(-\ln \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) t^\gamma \left(\varepsilon^{-\gamma} L\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^\gamma L(\varepsilon t) \right) = O(1) \varepsilon^{-2\gamma} b_\gamma(t) = o(t^\gamma l_\gamma(t)). \quad (5.16)$$

Применяя [5, рассуждения после (27)], мы также найдем $I_3 = o(b(t)) = o(t^\gamma l_\gamma(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

Случай $\gamma = 0$ изучается схожим образом. Теперь, чтобы доказать теорему 6, достаточно воспользоваться леммой 2(1).

Доказательство теоремы 7. Если имеет место (3.8), то соотношение $l_\gamma(1) < \infty$ равносильно (2.15). Далее, в представлении (5.15)

$$I_3 \sim ct^\gamma \int_{t/\varepsilon}^{\infty} u^{-\gamma} db_\gamma(u) \sim c\gamma t^\gamma \int_{t/\varepsilon}^{\infty} b_\gamma(u) u^{-1-\gamma} du \quad (5.17)$$

и (см. (5.16)) $I_2 + I_3 \sim c\gamma t^\gamma l_\gamma(t)$, $t \rightarrow \infty$. В силу (3.9)

$$I_1 = O(t^\delta) \int_1^{\varepsilon t} u^{-\delta} db_\gamma(u) = O(1) \varepsilon^{\gamma-\delta} b_\gamma(t) = o(1) t^\gamma l_\gamma(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $J(t) \sim c\gamma t^\gamma l_\gamma(t)$, $t \rightarrow \infty$. Кроме того, из (3.9) следует (5.1). Теперь, чтобы завершить доказательство, следует применить лемму 2(1).

Доказательство замечания 6. Оценим заново интеграл I_1 из предыдущих рассуждений с учетом новых предположений. Из (3.1) следует, что $I_1 = t^\gamma (I_{11} + I_{12} + o(1)l_\gamma(t))$, $t \rightarrow \infty$, где $I_{11} = -\int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} t^{-\gamma} \ln \varphi(t/u) db_\gamma(u)$ и $I_{12} = -\int_{\sqrt{t}}^{\varepsilon t} t^{-\gamma} \ln \varphi(t/u) db_\gamma(u)$. Имеем: $I_{11} = o(1) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} l_\gamma(t/u) L(u) du/u$ и

$$I_{12} = o(1) \left(-\int_{\sqrt{t}}^{\varepsilon t} l_\gamma\left(\frac{t}{u}\right) dl_\gamma(u) \right) = o(1) \left(l_\gamma^2(\sqrt{t}) + \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} l_\gamma\left(\frac{t}{u}\right) L(u) \frac{du}{u} \right).$$

С учетом (3.10) и оценок $\int_{\sqrt{t}}^{\varepsilon t} l_\gamma(t/u) L(u) du/u \leq l_\gamma(t) \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \tilde{l}_\gamma(u) L(u) du/u$ и $l_\gamma^2(t) \leq 2l_\gamma(\sqrt{t}) \int_{\sqrt{t}}^{\infty} l_\gamma(t/u) L(u) du/u$, откуда получим соотношение $I_1 = o(t^\gamma l_\gamma(t))$, $t \rightarrow \infty$ и, как следствие, замечание 6(1).

Проверим второе утверждение. С помощью (3.12) найдем

$$\begin{aligned} I_{11} &= O(1) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \kappa\left(\frac{t}{u}\right) l_\gamma\left(\frac{t}{u}\right) L(u) \frac{du}{u} = O(1) l_\gamma(t) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \kappa(u) \tilde{l}_\gamma(u) L(u) \frac{du}{u}, \\ I_{12} &= O(1) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \kappa(u) l_\gamma(u) L\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u} = O(1) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \frac{\mu(t/u)}{\mu(u)} l_\gamma\left(\frac{t}{u}\right) \kappa(u) L(u) \frac{du}{u} \\ &= O(1) l_\gamma(t) \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \bar{\mu}(u) \kappa(u) \tilde{l}_\gamma(u) L(u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.11) вновь следует нужная оценка для I_1 . Таким образом, замечание 6 полностью доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м 8–10. Пусть положительное $\varepsilon = \varepsilon(t)$ стремится к 0 достаточно медленно при $t \rightarrow \infty$. Аналогично (5.15), запишем

$$\begin{aligned} J(t) &= \left(\int_1^{1/\varepsilon} + \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} + \int_{\sqrt{t}}^{\varepsilon t} + \int_{\varepsilon t}^{t/\varepsilon} + \int_{t/\varepsilon}^{\infty} \right) \left(-\ln \varphi\left(\frac{t}{u}\right) \right) db_\gamma(u) \\ &= J_1 + \dots + J_5. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если $\delta > \gamma$, то в соответствии со свойствами медленно меняющихся функций (см., например, [7]) $\int_1^\infty u^{-\delta'} db(u) < \infty$ при некотором δ' , $\gamma < \delta' < \delta$, а также $k_\delta < \infty$ (см. (5.3)) и

$$J_1 \sim k_\delta \omega_\delta(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

Кроме того, при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_2 + J_3 &= O(1) \omega_\delta(t) \int_{1/\varepsilon}^\infty u^{-\delta'} db(u) = o(\omega_\delta(t)), \\ J_4 &= O(1) b_\gamma(t) \left(-\ln \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) = o(\omega_\delta(t)). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Используя в [5, рассуждения после (2.7)] оценку $b(tu) \leq g(t) b(u)$ (см. (2.3) и лемму 1 (1)), получим

$$J_5 = o(g_\gamma(t)) = o(\omega_\delta(t)). \quad (5.21)$$

Прделанные выкладки приводят к соотношению

$$J(t) \sim k_\delta \omega_\delta(t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

Теорема 8 следует из (5.22) и леммы 2 (2).

Проверим теорему 9. Из (4.5) вытекают соотношения (5.3), (5.4) при $\tau = \gamma$ и, следовательно, (5.19), а (4.6) влечет за собой (2.2). Остается воспользоваться леммой 2 (2), подходящим образом оценив $J(t)$ (вернее, $J_2 + \dots + J_5$).

С этой целью, применяя, по аналогии с (5.21), в рассуждениях из [5] оценку $b(tu) \leq \omega_\gamma(t) \bar{\nu}(u) \bar{\omega}(u) u^\gamma$ и имея в виду (4.6), получим

$$J_5 = o(\omega_\gamma(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (5.23)$$

Далее, с помощью (4.1), (4.5) и вытекающего из (4.5) соотношения

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\nu}(u) \bar{\omega}(u) \omega(u) = 0$$

найдем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_2 &= O(1) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \omega_\gamma\left(\frac{t}{u}\right) b_\gamma(u) \frac{du}{u} + o(\omega_\gamma(t)) \\ &= O(\omega_\gamma(t)) \int_{1/\varepsilon}^{\sqrt{t}} \nu(u) \frac{\omega(t/u)}{\omega(t)} \omega(u) \frac{du}{u} + o(\omega_\gamma(t)) = o(\omega_\gamma(t)) \end{aligned} \quad (5.24)$$

и аналогично (с учетом неравенства $\bar{\nu}(t/u) \leq \bar{\nu}(u)$, $\sqrt{t} \leq u < t$)

$$J_3 = o(\omega_\gamma(t)). \quad (5.25)$$

Если $\bar{\nu}(\infty) = 0$, то оценка (5.20) (при $\delta = \gamma$) остается справедливой. Отсюда и из (5.19), (5.23)–(5.25) следует (5.22) и, в конечном счете, теорема 9 (1).

Если же $\bar{\nu}(\infty) > 0$, то (4.5) и (4.6) приводят к $K(\gamma) < \infty$ и к асимптотике (при $t \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} J_4 &\sim \gamma \int_{\varepsilon t}^{t/\varepsilon} \left(-\ln \varphi\left(\frac{t}{u}\right) \right) b_\gamma(u) \frac{du}{u} \sim \gamma b_\gamma(t) \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} (-\ln \varphi(u)) \frac{du}{u^{1+\gamma}} \\ &\sim \gamma b_\gamma(t) \int_0^\infty (-\ln \varphi(u)) \frac{du}{u^{1+\gamma}} = K(\gamma) b_\gamma(t). \end{aligned}$$

Таким образом (см. (5.19), (5.23)–(5.25))

$$J(t) \sim k_\delta \omega_\delta(t) + K(\gamma) b_\gamma(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Подставляя эту оценку в лемму 2 (2), приходим к теореме 9 (2).

Теорема 10 проверяется так же, как теорема 9 (2), с тем отличием, что вместо (5.20) применяется соотношение (5.16), а (5.21) меняется на (5.17).

При проверке замечания 8 используется [5, замечание 2]. Для доказательства утверждения, следующего за замечанием 8 (и аналогичных результатов после леммы 1 и замечания 6), применяется такое рассуждение:

$$\ln \frac{1}{\omega(ue^t)} = \ln \frac{1}{\omega(u)} + t \left(\ln \frac{1}{\omega(ue^\theta)} \right)' ue^\theta, \quad 0 < \theta < t.$$

При $t = \ln u$ отсюда следует, что $\ln(ue^\theta) \in (\ln u, 2 \ln u)$ и, по (4.9),

$$\ln \frac{1}{\omega(u^2)} = \ln \frac{1}{\omega(u)} + O(1), \quad u \rightarrow \infty.$$

6. Приложение.

Лемма 5 (см. [8, следствия 5 и 6], [5, замечание 3]). Пусть $\lambda_\gamma(t) = t^\gamma \lambda(t)$, $t > 0$, где $\gamma \in [0, 1)$ и положительная функция $\lambda(t)$ медленно меняется на ∞ , и пусть положительная функция $s = s(r)$, $r > 0$, стремится к ∞ и удовлетворяет условию $\lambda_\gamma(s)/s \sim r$ при $r \rightarrow 0$. Тогда:

(1) $-\ln \varphi(t) \sim \lambda_\gamma(t)$, $t \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда $-\ln V(r) \sim c_*(\gamma) \lambda_\gamma(s)$, $r \rightarrow 0$, где $c_*(\gamma) = (1 - \gamma) \gamma^{\gamma/(1-\gamma)}$;

(2) $-\ln \varphi(t) = O(\lambda_\gamma(t))$, $t \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда $-\ln V(r) = O(\lambda_\gamma(s))$, $r \rightarrow 0$, и аналогично в случае замены $O(\dots)$ на $o(\dots)$.

Кроме того, если $\lambda(t \lambda^{1/(1-\gamma)}(t)) \sim \lambda(t)$, $t \rightarrow \infty$, то

$$\lambda_\gamma(s) \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} \lambda^{1/(1-\gamma)}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^{1/(1-\gamma)}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aurzada F. On the lower tail probabilities of some random sequences in l_p . — J. Theoret. Probab., 2007, v. 20, № 4, p. 843–858.
2. Aurzada F. A short note on small deviations of sequences of i.i.d. random variables with exponentially decreasing weights. — Statist. Probab. Lett., 2008, v. 78, № 15, p. 2300–2307.
3. Borovkov A. A., Ruzankin P. S. On small deviations of series of weighted random variables. — J. Theoret. Probab., 2008, v. 21, № 3, p. 628–649.
4. Боровков А. А., Рузанкин П. С. О малых уклонениях рядов независимых положительных случайных величин с весами, близкими к экспоненциальным. — Матем. тр., 2008, т. 11, № 1, с. 49–67.
5. Rozovsky L. V. Small deviations of series of weighted i.i.d. non-negative random variables with a positive mass at the origin. — Statist. Probab. Lett., 2009, v. 79, № 13, p. 1495–1500.
6. Rozovsky L. V. On the behavior of the log Laplace transform of series of weighted non-negative random variables at infinity. — Statist. Probab. Lett., 2010, v. 80, № 9–10, p. 764–770.
7. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p.
8. Rozovsky L. V. Remarks on a link between Laplace transform and distribution function of a nonnegative random variable. — Statist. Probab. Lett., 2009, v. 79, № 13, p. 1501–1508.
9. Розовский Л. В. О малых уклонениях сумм взвешенных положительных случайных величин. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2010, т. 384, с. 212–224.

Поступила в редакцию
10.II.2010

Исправленный вариант
11.IV.2011