Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шевцова, О точности нормальной аппроксимации для обобщенных пуассоновских распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 1, 152–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:10:53

© 2013 г.

ШЕВЦОВА И. Г.*

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ
ОБОБЩЕННЫХ ПУАССОНОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹⁾

Впервые найдено точное значение асимптотически правильной константы в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots$, имеющих моменты третьего порядка. Кроме того, для равномерного расстояния Δ_λ между функцией распределения стандартного нормального закона и функцией распределения центрированной и нормированной случайной суммы $S_\lambda = X_1 + \dots + X_{N_\lambda}$, где N_λ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$ и независима от $X_1, X_2, \dots$, получены оценки:

$$\Delta_\lambda \leq \frac{2\ell_\lambda}{3\sqrt{2\pi}} + 0.5 \cdot \ell_\lambda^2 < 0.2660 \cdot \ell_\lambda + 0.5 \cdot \ell_\lambda^2, \quad \text{где } \ell_\lambda = \frac{\mathbf{E}|X_1|^3}{\sqrt{\lambda}(\mathbf{E}X_1^2)^{3/2}}.$$

Показано, что эта оценка неуллучшаема в отношении множителя $2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659\dots$ при ℓ_λ . Для случая, когда распределение X_1 симметрично, доказана уточненная оценка

$$\Delta_\lambda \leq \frac{1+2\kappa}{2\sqrt{2\pi}} \ell_\lambda + 0.4 \cdot \ell_\lambda^2 < 0.2391 \cdot \ell_\lambda + 0.4 \cdot \ell_\lambda^2,$$

где $\kappa = \sup_{x>0}(\cos x - 1 + x^2/2)/x^3 = 0.0991\dots$. Показано, что значение множителя при ℓ_λ в этой оценке не может быть меньше $(2\sqrt{2\pi})^{-1} = 0.1994\dots$. Получены аналогичные оценки при ослабленных моментных условиях, когда $\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ с некоторым $0 < \delta < 1$.

Ключевые слова и фразы: пуассоновская случайная сумма, центральная предельная теорема, оценка скорости сходимости, нормальная аппроксимация, неравенство Берри–Эссеена, асимптотически правильная константа.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики РАН, Москва, Россия; e-mail: ishevtsova@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00515а, 11-07-00112а, 11-01-12026-офи-м) и Министерства образования и науки (грант МК-2256.2012.1, госконтракт 16.740.11.0133).

1. Введение. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с общей функцией распределения $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$, $x \in \mathbf{R}$. Предположим, что

$$\mathbf{E} X^2 > 0, \quad \beta_{2+\delta} \equiv \mathbf{E} |X|^{2+\delta} < \infty$$

при некотором $\delta \in [0, 1]$. Множество всех функций распределения случайных величин X , удовлетворяющих указанному условию, обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$. Пусть $F_{2+\delta, s}$ — множество всех симметричных функций распределения из $\mathcal{F}_{2+\delta}$. Всюду далее под записью $X \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ ($X \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}$) подразумеваем, что функция распределения F случайной величины X принадлежит классу $\mathcal{F}_{2+\delta}$ ($\mathcal{F}_{2+\delta, s}$), также будем отождествлять и записи функционалов, зависящих от распределения случайной величины X , в качестве аргументов которых указана функция распределения F случайной величины X или сама случайная величина X . Например, $\beta_{2+\delta} = \beta_{2+\delta}(F) = \beta_{2+\delta}(X) = \mathbf{E} |X|^{2+\delta}$.

Пусть N_λ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$:

$$\mathbf{P}(N_\lambda = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и такая, что на расширенном вероятностном пространстве при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \dots$ независимы. Случайная величина $S_\lambda = X_1 + \dots + X_{N_\lambda}$ называется пуассоновской случайной суммой (для определенности полагаем $\sum_{k=1}^0 (\cdot) = 0$), а ее распределение — обобщенным пуассоновским. Пуассоновские случайные суммы S_λ являются весьма популярными математическими моделями многих реальных объектов. В частности, в страховой математике случайная величина S_λ описывает суммарное страховое требование в классическом процессе риска в «динамическом» случае. Многие примеры прикладных задач из самых разнообразных областей, в которых используются пуассоновские случайные суммы, приведены, например, в книгах [26], [21].

Как известно, для $F \in \mathcal{F}_2$ распределения пуассоновских случайных сумм S_λ асимптотически нормальны, что обуславливает большую важность задачи изучения точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм.

Несложно убедиться, что $\mathbf{E} S_\lambda = \lambda \mathbf{E} X$, $\mathbf{D} S_\lambda = \lambda \mathbf{E} X^2$. Функцию распределения стандартизованной пуассоновской случайной суммы

$$\tilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - \mathbf{E} S_\lambda}{\sqrt{\mathbf{D} S_\lambda}} = \frac{S_\lambda - \lambda \mathbf{E} X}{\sqrt{\lambda \mathbf{E} X^2}}$$

обозначим $F_\lambda(x)$. Для $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ с $0 < \delta \leq 1$ также введем следующие обозначения:

$$L_0 = L_0(F) = L_0(X) = \frac{\mathbf{E} |X - \mathbf{E} X|^{2+\delta}}{(\mathbf{D} X)^{1+\delta/2}},$$

$$L_1 = L_1(F) = L_1(X) = \frac{\mathbf{E}|X|^{2+\delta}}{(\mathbf{E}X^2)^{1+\delta/2}},$$

$$\ell_\lambda = \ell_\lambda(F) = \frac{L_1(F)}{\lambda^{\delta/2}} = \frac{\mathbf{E}|X|^{2+\delta}}{\lambda^{\delta/2}(\mathbf{E}X^2)^{1+\delta/2}}.$$

При $\delta = 0$ положим $L_0 = L_1 = \ell_\lambda = 1$. Величины L_0 и L_1 будем называть соответственно центральным и нецентральным ляпуновскими отношениями, а ℓ_λ — нецентральной ляпуновской дробью. Пусть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$\Delta_\lambda = \Delta_\lambda(F) = \Delta_\lambda(X) = \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)|.$$

Утверждение об асимптотической нормальности обобщенных пуассоновских распределений означает, что равномерное расстояние $\Delta_\lambda(F)$ между допредельной функцией распределения стандартизованной пуассоновской случайной суммы и предельной нормальной функцией распределения стремится к нулю с ростом λ . Этот факт имеет место для любой функции распределения $F \in \mathcal{F}_2$. Однако условие принадлежности $F \in \mathcal{F}_2$ не является достаточным для конструирования разумных оценок скорости сходимости $\Delta_\lambda(F) \rightarrow 0$, что весьма важно для прикладных задач, в которых используется аппроксимация нормальным распределением. А именно, как будет показано в теореме 8, для любой неотрицательной функции $\psi(\lambda)$ такой, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi(\lambda) = 0$, найдется функция распределения $F \in \mathcal{F}_2$ такая, что $\Delta_\lambda(F) \geq \psi(\lambda)$ для всех достаточно больших λ . Кроме того, в теореме 5 будет продемонстрировано, что

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \Delta_\lambda(F) > 0.54006.$$

С другой стороны, если для некоторого $0 < \delta \leq 1$ известно, что $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, то скорость сходимости в центральной предельной теореме уже представляется возможным оценить в терминах соответствующих моментов при помощи неравенства типа Берри–Эссеена

$$\Delta_\lambda \leq C_{\text{ВЕ}}(\delta) \frac{L_1}{\lambda^{\delta/2}} = C_{\text{ВЕ}}(\delta) \ell_\lambda, \quad (1)$$

где $C_{\text{ВЕ}}(\delta)$ зависит только от δ . Говоря об оценках типа Берри–Эссеена для пуассоновских сумм, нельзя, конечно же, не упомянуть их историю, краткое описание которой мы приведем, следуя линии изложения этого вопроса в книге [5].

Традиционно наибольшее внимание уделялось случаю $\delta = 1$, поскольку, как можно убедиться, при $\delta > 1$ скорость сходимости остается в общем случае такой же, как при $\delta = 1$. При этом оценки точности нормальной аппроксимации для обобщенных пуассоновских распределений

выписывались в терминах центральных ляпуновских отношений L_0 как следствия оценок для случайных сумм с произвольным асимптотически вырожденным индексом и по аналогии с оценками для сумм неслучайного числа независимых с.в. Такие оценки имели довольно громоздкий вид (см., например, [24], [7]).

Однако при конструировании оценок точности нормальной аппроксимации для обобщенных пуассоновских распределений более естественным оказалось использование нецентральных ляпуновских отношений, в терминах которых такие оценки принимают совсем простой вид (см. (1)). По-видимому, впервые неравенство (1) было доказано для $\delta = 1$ в неопубликованной диссертации Г. В. Ротарь в 1972 г. [11] и опубликовано без доказательства в статье того же автора в 1976 г. [12] с $C_{\text{ВЕ}}(1) = 2.23$. В 1983 г. с использованием традиционной техники, основанной на неравенстве сглаживания Эссеена, оценка (1) была доказана Р. фон Чосси и Г. Рапплом [23] с $C_{\text{ВЕ}}(1) = 2.21$ (причем авторы этой работы в формулировке соответствующей теоремы объявили значение $C_{\text{ВЕ}}(1) = 3$, что, конечно, верно, но фактически по ходу доказательства они получили значение $C_{\text{ВЕ}}(1) = 2.21$).

Следующий прорыв в оценивании постоянной $C_{\text{ВЕ}}(1)$ был совершен в 1993 г. Р. Михелем [29] с использованием свойства безграничной делимости обобщенных пуассоновских распределений и верхних оценок константы $A(1)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена для сумм неслучайного числа н.о.р.с.в.:

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n \mathbf{E} X}{\sqrt{n \mathbf{D} X}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq A(\delta) \frac{L_0(X)}{n^{\delta/2}}, \quad (2)$$

$n \geq 1$, $X \in \mathcal{F}_{2+\delta}$. Относительно константы $A(1)$ в настоящий момент известно, что

$$0.4097 \dots = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \leq A(1) < 0.4748$$

(нижняя оценка найдена К.-Г. Эссееном в [25], верхняя — автором в [31]). Наилучшие оценки констант $A(\delta)$ при $0 < \delta < 1$ приведены в [3] (верхние) и [15] (нижние). Используя оценку $A(1) \leq 0.8$, полученную в 1972 г. П. ван Биком [20], Михель [29] показал, что $C_{\text{ВЕ}}(1) \leq A(1) \leq 0.8$. Не будучи знакомыми с этой работой Михеля, авторы статьи [22], применив уточненное неравенство сглаживания Эссеена, получили оценку $C_{\text{ВЕ}}(1) \leq 1.99$. Из метода доказательства, использованного Михелем для $\delta = 1$ (и обобщенного позже на случай произвольного $0 < \delta \leq 1$ в книге [5]), вытекает, что если для абсолютной константы $A(\delta)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена с *центральной* ляпуновским отношением (2) справедлива оценка $A(\delta) \leq M(\delta)$, то та же оценка справедлива и для константы $C_{\text{ВЕ}}(\delta)$ в аналоге неравенства Берри–Эссеена

с *нецентральный* ляпуновским отношением (1) для пуассоновских случайных сумм: $C_{\text{BE}}(\delta) \leq M(\delta)$. На это обстоятельство также обратили внимание в 1997 г. В. Ю. Королев и С. Я. Шоргин [28], которые независимо от Михеля [29] получили тот же результат, но с другой, лучшей на тот момент времени оценкой $M(1) = 0.7655$, доказанной в 1982 г. И. С. Шигановым [19]. Поскольку наилучшая на сегодняшний день оценка абсолютной постоянной в классическом неравенстве Берри–Эссеена имеет вид $A(1) < 0.4748$ (см. [31]), можно заключить, следуя логике работ [29], [28], что неравенство (1) справедливо с $C_{\text{BE}}(1) = 0.4748$.

И лишь недавно, в 2009 г., В. Ю. Королеву и И. Г. Шевцовой [6] удалось показать, что на самом деле привязка оценки константы $C_{\text{BE}}(1)$ в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских сумм (1) к оценке абсолютной постоянной $A(1)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена (2) менее жесткая. А именно, в [6] было показано, что (1) справедливо с $C_{\text{BE}}(1) = 0.345$, и тем самым впервые было продемонстрировано, что абсолютная постоянная в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (1) строго меньше минимально возможного значения $(\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi})$ (см. [25]) абсолютной константы $A(1)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена (2). Позже те же авторы уточнили свою оценку до $C_{\text{BE}}(1) \leq 0.3041$ (см. [27]). Аналогичный результат для $0 < \delta \leq 1$ был получен в [10] (см. второй столбец таблицы 1). А для наилучшего возможного значения $C(\delta)$ при $\delta = 0$

$$C_{\text{BE}}(0) = \sup_{\lambda > 0, F \in \mathcal{F}_2} \Delta_\lambda(F) \quad (3)$$

верхнюю оценку несложно получить из леммы 12.3 монографии Р. Н. Бхаттачария и Р. Ранга Рао [2]:

$$C_{\text{BE}}(0) \leq \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leq \sup_{b > 0} \left(\frac{1}{1 + b^2} - \Phi(-b) \right) < 0.54094.$$

Установленный в работе [6] факт обострил интерес к нижним оценкам постоянной $C_{\text{BE}}(1)$ в (1). Несмотря на то что нижняя оценка абсолютной константы $A(1)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена (2) известна еще с 1956 г. [25], нижних оценок для $C_{\text{BE}}(1)$ и тем более для $C_{\text{BE}}(\delta)$ при $0 < \delta < 1$ в (1) до недавнего времени известно не было. Указанный пробел был восполнен в [10] с помощью определения по аналогии с терминологией, использованной в работе [15], *верхней асимптотически правильной константы*:

$$\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell_\lambda(F)}, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad (4)$$

Таблица 1. Двусторонние оценки константы $C_{\text{BE}}(\delta)$ в неравенстве Берри–Эссеена и верхних асимптотически правильных констант $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$, $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$, определенных в (4), для некоторых δ . По определению, $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq \bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leq C_{\text{BE}}(\delta)$ для всех $0 \leq \delta \leq 1$.

δ	$C_{\text{BE}}(\delta) \leq$	$\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \geq$	$\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \geq$
1.0	0.3041	0.2659	0.2344
0.9	0.3089	0.2698	0.2383
0.8	0.3187	0.2819	0.2446
0.7	0.3334	0.2961	0.2534
0.6	0.3538	0.3128	0.2651
0.5	0.3775	0.3328	0.2803
0.4	0.4080	0.3568	0.3000
0.3	0.4450	0.3862	0.3257
0.2	0.4901	0.4232	0.3603
0.1	0.5451	0.4714	0.4097

которая, очевидно, является минорантой для $C_{\text{BE}}(\delta)$. Введем также *верхнюю асимптотически правильную константу* для симметричных распределений $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$, которая определяется аналогично $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ с заменой $\mathcal{F}_{2+\delta}$ на $\mathcal{F}_{2+\delta,s}$. В работах [30], [10] найдены нижние оценки $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ для $0 < \delta \leq 1$, но, поскольку соответствующие экстремальные распределения симметричны, те же оценки остаются верными и для $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$. Таким образом, из результатов работ [30], [10] (для $0 < \delta \leq 1$) и нижеследующей теоремы 7 (для $\delta = 0$) вытекает, что при всех $0 \leq \delta \leq 1$

$$C_{\text{BE}}(\delta) \geq \bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \geq \bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma>0} \gamma^{\delta/2} e^{-\gamma} I_0(\gamma),$$

где $I_0(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^k / (2^k k!))^2$ и $\gamma^{\delta/2} \equiv 1$ при $\delta = 0$. В частности,

$$\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma>0} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} I_0(\gamma) > 0.2344, \quad \bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2,s}) \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma>0} e^{-\gamma} I_0(\gamma) = \frac{1}{2}.$$

Значения минорант $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ при других $0 < \delta < 1$ приведены в таблице 1 в четвертом столбце. Однако нижние оценки для $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ и, следовательно, для $C_{\text{BE}}(\delta)$, представленные здесь в терминах $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$, можно уточнить. А именно, в данной работе (см. теорему 5) будет показано, что при всех $0 \leq \delta \leq 1$

$$C_{\text{BE}}(\delta) \geq \bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \geq \sup_{\gamma>0, m \in \mathbf{N}_0} \gamma^{\delta/2} \left(e^{-\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\gamma^k}{k!} - \Phi\left(\frac{m-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\right) \right),$$

где $\mathbf{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел (определение величины $C_{\text{BE}}(0)$ см. в (3)). В частности,

$$C_{\text{BE}}(1) \geq \bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) \geq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} > 0.2659,$$

$$C_{\text{BE}}(0) \geq \bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_2) \geq \sup_{\gamma > 0} (e^{-\gamma} - \Phi(-\sqrt{\gamma})) = \sup_{b > 0} (e^{-b^2} - \Phi(-b)) > 0.54006,$$

при других $0 < \delta < 1$ значения минорант $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ указаны в таблице 1 в третьем столбце. Таким образом, для $\delta = 0$ зазор между верхней 0.54094 и нижней 0.54006 оценками константы $C_{\text{BE}}(0)$ довольно мал и не превосходит 0.0009. По всей видимости, верхнюю оценку константы $C_{\text{BE}}(0)$ можно уточнить, так как использованная для этих целей в данной работе верхняя граница величины $\sup_x |F(x) - \Phi(x)|$ достигается на некотором двухточечном распределении $F \in \mathcal{F}_2$, которым обобщенное пуассоновское в силу своей безграничной делимости в принципе быть не может.

Заметим, что нижние оценки для $C_{\text{BE}}(\delta)$, $0 < \delta \leq 1$, установленные в работах [30], [10] и в нижеследующей теореме 5 в терминах *верхних* асимптотически правильных констант $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$, $\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$, перестают, вообще говоря, быть справедливыми, если в (1) ограничиться классом функций распределения $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, для которых ляпуновская дробь $\ell_\lambda(F)$ принимает малые или бесконечно малые значения. Чтобы устранить этот недостаток, по аналогии с предложенным в 1953 г. А. Н. Колмогоровым [4] подходом к вычислению наилучшего возможного значения константы в неравенстве Берри–Эссеена введем *асимптотически правильные константы* в классах функций распределения $\mathcal{F}$, в качестве которых будут выступать $\mathcal{F}_{2+\delta}$, $\mathcal{F}_{2+\delta,s}$ с $0 < \delta \leq 1$:

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{\lambda > 0, F \in \mathcal{F}: \ell_\lambda(F) = \ell} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell}, \quad (5)$$

а также — по аналогии с терминологией, использованной в работе [15], — *нижние асимптотически правильные константы*:

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}: \ell_\lambda(F) = \ell} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell}, \quad (6)$$

обеспечивающие справедливость асимптотических оценок

$$\Delta_\lambda \leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F})\ell_\lambda + o(\ell_\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$\Delta_\lambda \leq \underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F})\ell_\lambda + K\lambda^{-\delta/2} + o(\ell_\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (8)$$

для некоторого $K \in \mathbf{R}$, не зависящего от λ и ℓ_λ , и всех $F \in \mathcal{F}$ таких, что $\ell_\lambda(F) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Эти асимптотические оценки, очевидно,

являются наилучшими из возможных в отношении множителей при ℓ_λ . Легко видеть, что определенные выше величины связаны неравенствами

$$\begin{aligned} \frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})}{\bar{\lambda}} &\leq \frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})}{\bar{\lambda}} \leq \frac{\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})}{\bar{\lambda}} \\ \frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})}{\bar{\lambda}} &\leq \frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})}{\bar{\lambda}} \leq \frac{\bar{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})}{\bar{\lambda}} \leq C_{\text{ВЕ}}(\delta), \quad 0 < \delta \leq 1. \end{aligned}$$

В работах [30], [9] показано, что

$$\begin{aligned} &\frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})}{\bar{\lambda}} \\ &\geq \begin{cases} (2\sqrt{2\pi})^{-1} = 0.1994\dots, & \delta = 1, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(5+\delta)/2} \Gamma((3+\delta)/2)} \sup_{s>0} \frac{(1+s^2/2)^{-1} + s^2/4 - 1}{s^{2+\delta}}, & 0 < \delta < 1 \end{cases} \quad (9) \end{aligned}$$

(в формулировках соответствующих теорем в работах [30], [9] объявлены нижние оценки для $\frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})}{\bar{\lambda}}$, но фактически по ходу доказательства получены нижние оценки для $\frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})}{\bar{\lambda}}$). Значения минорант в (9) при некоторых $0 < \delta < 1$ приведены в таблице 2.

В данной работе получены верхние оценки асимптотически правильных констант $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ (теорема 3) и $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ (теорема 4). В частности, для $\delta = 1$ в следствии 3 впервые найдено точное значение асимптотически правильной константы $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$ в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм и показано, что

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \frac{C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)}{\bar{\lambda}} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659\dots$$

Из этих соотношений вытекает, что асимптотическая оценка (8) не может улучшить при $\delta = 1$ оценку (7), т.е. ни при каком выборе $K \in \mathbf{R}$ значение коэффициента при ляпуновской дроби в (8) не может быть сделано меньше, чем значение коэффициента при ляпуновской дроби в (7). Этот результат необычен тем, что для классической схемы суммирования детерминированного числа n независимых одинаково распределенных случайных величин оценки, аналогичные (7) и (8) (в которых вместо λ фигурирует n), различаются. Более того, в следствии 1 будет получена асимптотически правильная оценка

$$\Delta_\lambda \leq \frac{2\ell_\lambda}{3\sqrt{2\pi}} + 0.4679 \cdot \ell_\lambda^2, \quad \lambda > 0, \quad F \in \mathcal{F}_3,$$

неулучшаемая в отношении множителя $2/(3\sqrt{2\pi})$ при ℓ_λ , и тем самым конкретизирован вид $o(\ell_\lambda)$ в (7). Эта асимптотическая оценка уточняет неравенство (1) с наилучшей известной на данный момент оценкой

$C_{\text{BE}}(1) \leq 0.3041$ при всех $\ell_\lambda \leq 0.08$. В следствии 2 показано, что для симметричного случая полученную в следствии 1 оценку можно уточнить до

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda &\leq \frac{1 + 2\kappa_1}{2\sqrt{2\pi}} \ell_\lambda + 0.3442 \cdot \ell_\lambda^2 \\ &< 0.2391 \cdot \ell_\lambda + 0.3442 \cdot \ell_\lambda^2, \quad \lambda > 0, \quad F \in \mathcal{F}_{3,s}, \end{aligned}$$

где $\kappa_1 = \sup_{x>0} (\cos x - 1 + x^2/2)/x^3 < 0.0992$. Как вытекает из (9), значение коэффициента при ℓ_λ в этой оценке не может быть меньше, чем $(2\sqrt{2\pi})^{-1} = 0.1994\dots$. В теоремах 1 и 2 получены аналогичные результаты для случая, когда соответственно $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta,s}$ с произвольным $0 < \delta \leq 1$.

2. Верхние оценки.

Теорема 1. Для $0 < \delta \leq 1$ обозначим $\theta_0(\delta)$ единственный корень уравнения

$$\delta\theta^2 + 2\theta \sin \theta + 2(2 + \delta)(\cos \theta - 1) = 0, \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \kappa_\delta &= \sup_{x>0} \frac{|\cos x - 1 + x^2/2|}{x^{2+\delta}} = \frac{\cos \theta_0(\delta) - 1 + \theta_0^2(\delta)/2}{\theta_0^{2+\delta}(\delta)} = \frac{\theta_0(\delta) - \sin \theta_0(\delta)}{(2 + \delta)\theta_0^{1+\delta}(\delta)}, \\ \gamma_\delta &= \sup_{x>0} \sqrt{\left(\frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^{2+\delta}}\right)^2 + \left(\frac{\sin x - x}{x^{2+\delta}}\right)^2}, \end{aligned}$$

$t_1(\delta) = \theta_0(\delta)/(2\pi)$, $t_2 = t_2(\delta)$ — единственный корень уравнения

$$t^2 (1 - 2\kappa_\delta(2\pi t)^\delta) = t_1^2(\delta) (1 - 2\kappa_\delta(2\pi t_1(\delta))^\delta), \quad 0 < t < t_1(\delta),$$

и

$$t_3(\delta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{(2 + \delta)^2 \kappa_\delta} \right)^{1/\delta} \exp \left\{ -\frac{4 + \delta}{2(2 + \delta)} \right\},$$

а также

$$\begin{aligned} J_{21}(T, t_0) &= \frac{1.0253}{\pi} T^2 \int_{t_0 \wedge t_2(\delta)}^{t_2(\delta)} \exp \left\{ -\frac{T^2 t^2}{2} (1 - 2\kappa_\delta(2\pi t)^\delta) \right\} \frac{dt}{t}, \\ J_{22}(T, t_0) &= \frac{1.0253}{\pi} T^2 \exp \left\{ -\frac{T^2 t_1^2(\delta)}{2} (1 - 2\kappa_\delta(2\pi t_1(\delta))^\delta) \right\} \ln \frac{t_1(\delta)}{t_0 \vee t_2(\delta)}, \\ J_3(T) &= T^2 \int_0^{1-t_1(\delta)} t \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi(t \vee 10^{-4})} - \cot \pi(t \vee 10^{-4}) \right)^2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -T^2 \frac{1 - \cos 2\pi t}{4\pi^2} \right\} dt, \end{aligned}$$

$$J_4(T, t_0) = 0 \vee \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{\pi t_0} - 1 + t_0 - \frac{\pi^2 t_0^2}{18} \right) e^{-T^2 t_0^2 / 2},$$

$$J(T, t_0) = 0 \vee \left(J_{21}(T, t_0) + J_{22}(T, t_0) + J_3(T) \right. \\ \left. + J_4(T, t_0) - 1 + \frac{\pi^{5/2}}{18\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{T} \right), \quad T > 0.$$

Тогда для любого $\ell > 0$ при всех $\lambda > 0$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ таких, что $\ell_\lambda \leq \ell$, справедлива оценка

$$\Delta_\lambda \leq C(\delta) \ell_\lambda + \frac{\ell_\lambda^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + A_\delta(\ell \wedge \ell_*(\delta)) \cdot \ell_\lambda^2,$$

где

$$C(\delta) = \frac{\gamma_\delta \cdot 2^{\delta/2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right),$$

$$A_\delta(\ell) = \ell^{(1-\delta)/\delta} \cdot 2^{(\delta-1)/2} \pi^{-1} \gamma_\delta \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right) \left(1 + \frac{(3+\delta)\ell^{2/\delta}}{72}\right) \\ + \inf_{t_3(\delta) \leq t_0 < t_1(\delta)} \left(1.0253 \frac{2^{3/2+\delta} \varkappa_\delta \gamma_\delta \Gamma(5/2+\delta)}{\pi(1-2\varkappa_\delta(2\pi t_0)^\delta)^{5/2+\delta}} \right. \\ \left. + \frac{\ell^{2(1-\delta)/\delta}}{4\pi^2} \sup_{0 < \varepsilon \leq \ell} J\left(\frac{2\pi}{\varepsilon^{1/\delta}}, t_0\right) \right),$$

$\Gamma(\cdot)$ — эйлерова гамма-функция; $\ell_*(\delta)$ — единственный корень уравнения

$$A_\delta(\ell)\ell^2 = \kappa - C(\delta)\ell - \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}}, \quad 0 < \ell < (2\sqrt{2\pi}\kappa)^\delta, \quad (10)$$

$$\kappa \equiv \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \sup_x |F(x) - \Phi(x)| = \sup_{b>0} \left(\frac{1}{1+b^2} - \Phi(-b) \right) = 0.54093 \dots \quad (11)$$

Значения величины $C(\delta)$ при некоторых $0 < \delta \leq 1$ приведены в таблице 2 во втором и шестом столбцах, значения $\ell_*(\delta)$, $A_\delta(\ell)$, округленные в большую сторону с точностью до четвертого знака, — в таблице 3, а значения величин γ_δ , $\varkappa_\delta$, $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$, $t_3(\delta)$ с точностью до четвертого знака — в таблице 4.

Теорема 2. Для любых $0 < \delta \leq 1$ и $\ell > 0$ при всех $\lambda > 0$ и $F \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}$ таких, что $\ell_\lambda \leq \ell$, справедлива оценка

$$\Delta_\lambda \leq C_s(\delta) \ell_\lambda + \frac{\ell_\lambda^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + A_\delta^s(\ell \wedge \ell_*^s(\delta)) \cdot \ell_\lambda^2,$$

где

$$C_s(\delta) = \frac{\varkappa_\delta \cdot 2^{\delta/2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right),$$

$$A_\delta^s(\ell) = \ell^{(1-\delta)/\delta} \cdot 2^{(\delta-1)/2} \pi^{-1} \varkappa_\delta \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right) \left(1 + \frac{(3+\delta)\ell^{2/\delta}}{72}\right) \\ + \inf_{t_3(\delta) \leq t_0 < t_1(\delta)} \left(1.0253 \frac{2^{3/2+\delta} \varkappa_\delta^2 \Gamma(5/2+\delta)}{\pi (1 - 2\varkappa_\delta (2\pi t_0)^\delta)^{5/2+\delta}} \right. \\ \left. + \frac{\ell^{2(1-\delta)/\delta}}{4\pi^2} \sup_{0 < \varepsilon \leq \ell} J\left(\frac{2\pi}{\varepsilon^{1/\delta}}, t_0\right)\right),$$

$\ell_*^s(\delta)$ — единственный корень уравнения

$$A_\delta^s(\ell)\ell^2 = \kappa - C_s(\delta)\ell - \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}}, \quad 0 < \ell < (2\sqrt{2\pi}\kappa)^\delta,$$

$\kappa = 0.5409\dots$, величины $\varkappa_\delta$, $t_1(\delta)$, $t_3(\delta)$, $J(T, t_0)$, $T > 0$, определены в формулировке теоремы 1.

Таблица 2. Значения величин $C(\delta)$, $C_s(\delta)$ из теорем 1 и 2, мажорирующих асимптотически правильные константы $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ и $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ (см. теоремы 3 и 4), рядом — соответствующие значения миноранты нижней асимптотически правильной константы $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ (см. (9)) при некоторых $0 < \delta < 1$. По определению, $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq C_s(\delta)$, $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leq C(\delta)$ для всех $0 < \delta \leq 1$.

$\delta =$	$C(\delta) \leq$	$C_s(\delta) \leq$	$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \geq$	$\delta =$	$C(\delta) \leq$	$C_s(\delta) \leq$	$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \geq$
0+	0.1693	0.1592	0.0883	0.50	0.0854	0.0724	0.0308
0.05	0.1561	0.1458	0.0747	0.55	0.0810	0.0676	0.0286
0.10	0.1444	0.1338	0.0655	0.60	0.0772	0.0632	0.0266
0.15	0.1339	0.1231	0.0583	0.65	0.0738	0.0593	0.0248
0.20	0.1245	0.1135	0.0524	0.70	0.0709	0.0556	0.0232
0.25	0.1161	0.1048	0.0474	0.75	0.0685	0.0523	0.0217
0.30	0.1085	0.0969	0.0431	0.80	0.0665	0.0493	0.0204
0.35	0.1017	0.0899	0.0394	0.85	0.0650	0.0466	0.0192
0.40	0.0956	0.0835	0.0361	0.90	0.0642	0.0440	0.0182
0.45	0.0902	0.0777	0.0333	0.95	0.0642	0.0417	0.0172
				1–	0.0665	0.0396	0.0163

Значения величины $C_s(\delta)$ при некоторых $0 < \delta \leq 1$ приведены в таблице 2 в третьем и седьмом столбцах, а значения $\ell_*^s(\delta)$, $A_\delta^s(\ell)$, округленные в большую сторону с точностью до четвертого знака, — в таблице 3.

Поскольку $C(1) = (6\sqrt{2\pi})^{-1}$, $C_s(1) = \varkappa_1/\sqrt{2\pi}$, из теорем 1 и 2 при $\delta = 1$ получаем два следствия.

Следствие 1. Для любых $\ell > 0$ и $\lambda > 0$ при всех $F \in \mathcal{F}_3$ таких, что $\ell_\lambda \leq \ell$, справедливы оценки

$$\Delta_\lambda \leq \frac{2\ell_\lambda}{3\sqrt{2\pi}} + A_1 (\ell \wedge 0.8280) \cdot \ell_\lambda^2 < 0.2660 \cdot \ell_\lambda + 0.4679 \cdot \ell_\lambda^2 \quad (12)$$

с $A_1(\ell)$, определенной в формулировке теоремы 1. В частности, $A_1(0.1) \leq 0.2684$ и при $\ell_\lambda \leq 0.1$

$$\Delta_\lambda \leq \frac{2\ell_\lambda}{3\sqrt{2\pi}} + 0.2684 \cdot \ell_\lambda^2 < \begin{cases} 0.2929 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 0.1, \\ 0.2687 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 10^{-2}, \\ 0.2663 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 10^{-3}, \\ 0.2660 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 10^{-4}. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1. Как будет следовать из теоремы 6, значение коэффициента $2/(3\sqrt{2\pi})$ при ляпуновской дроби ℓ_λ в (12) не может быть уменьшено.

Таблица 3. Значения величин $\ell_*(\delta)$ и $A_\delta(\ell)$ из теоремы 1 для $\ell = \ell_*(\delta)$, $0.5 \wedge \ell_*(\delta)$, $0.1 \wedge \ell_*(\delta)$ и $\ell \rightarrow 0+$ при некоторых $0 < \delta \leq 1$. В третьем столбце указаны оптимальные значения t_0 , доставляющие инфимум в $A_\delta(\ell_*(\delta))$, при других ℓ оптимальные значения t_0 совпадают с $t_3(\delta)$ (см. таблицу 4).

$\delta =$	$\ell_*(\delta) \leq$	$t_0 =$	$A_\delta(\ell_*(\delta)) \leq$	$A_\delta(0.5) \leq$	$A_\delta(0.1) \leq$	$A_\delta(0+) \leq$
0.05	0.0661	0.1370	121.7947	121.7947	121.7947	121.7947
0.10	0.1477	0.1386	23.8244	23.8244	23.8244	23.8244
0.15	0.2334	0.1401	9.3589	9.3589	9.3589	9.3589
0.20	0.3205	0.1416	4.8734	4.8734	4.8726	4.8726
0.25	0.4062	0.1431	2.9613	2.9613	2.9561	2.9561
0.30	0.4863	0.1444	1.9884	1.9884	1.9750	1.9746
0.35	0.5581	0.1457	1.4339	1.4291	1.4106	1.4096
0.40	0.6170	0.1469	1.1095	1.0805	1.0588	1.0566
0.45	0.6577	0.1480	0.9320	0.8508	0.8263	0.8225
0.50	0.6867	0.1490	0.8237	0.6935	0.6660	0.6599
0.55	0.7094	0.1500	0.7485	0.5833	0.5519	0.5429
0.60	0.7283	0.1513	0.6924	0.5051	0.4686	0.4564
0.65	0.7457	0.1621	0.6456	0.4497	0.4068	0.3909
0.70	0.7628	0.1717	0.6040	0.4110	0.3605	0.3406
0.75	0.7794	0.1801	0.5673	0.3847	0.3256	0.3015
0.80	0.7950	0.1874	0.5356	0.3680	0.2997	0.2710
0.85	0.8091	0.1937	0.5087	0.3565	0.2811	0.2474
0.90	0.8209	0.1988	0.4870	0.3492	0.2687	0.2297
0.95	0.8291	0.2026	0.4714	0.3469	0.2628	0.2176
1.00	0.8280	0.2044	0.4679	0.3559	0.2684	0.2680

Следствие 2. Для любых $\ell > 0$ и $\lambda > 0$ при всех $F \in \mathcal{F}_{3,s}$ таких, что $\ell_\lambda \leq \ell$, справедливы оценки

$$\Delta_\lambda \leq \frac{1 + 2\kappa_1}{2\sqrt{2\pi}} \ell_\lambda + A_1^s(\ell \wedge 0.9537) \cdot \ell_\lambda^2 < 0.2391 \cdot \ell_\lambda + 0.3442 \cdot \ell_\lambda^2$$

с $A_1^s(\ell)$, определенной в формулировке теоремы 2. В частности, $A_1^s(0.1) \leq 0.1599$ и при $\ell_\lambda \leq 0.1$

$$\Delta_\lambda \leq \frac{1+2\kappa_1}{2\sqrt{2\pi}} \ell_\lambda + 0.1599 \cdot \ell_\lambda^2 < \begin{cases} 0.2551 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 0.1, \\ 0.2407 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 0.01, \\ 0.2392 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 0.001, \\ 0.2391 \cdot \ell_\lambda, & \ell_\lambda \leq 0.0004. \end{cases}$$

Таблица 4. Значения γ_δ , κ_δ , $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$, $t_3(\delta)$ с точностью до четвертого знака для некоторых $0 < \delta \leq 1$.

δ	γ_δ	κ_δ	$t_1(\delta)$	$t_2(\delta)$	$t_3(\delta)$
0.01	0.5225	0.4909	0.9950	0.0261	0.1356
0.05	0.4885	0.4563	0.9761	0.0673	0.1370
0.10	0.4498	0.4170	0.9539	0.1019	0.1386
0.15	0.4149	0.3815	0.9331	0.1302	0.1401
0.20	0.3833	0.3494	0.9132	0.1551	0.1416
0.25	0.3548	0.3203	0.8941	0.1778	0.1431
0.30	0.3290	0.2940	0.8756	0.1989	0.1444
0.35	0.3058	0.2701	0.8576	0.2187	0.1457
0.40	0.2847	0.2484	0.8399	0.2375	0.1469
0.45	0.2657	0.2287	0.8226	0.2556	0.1480
0.50	0.2486	0.2108	0.8054	0.2729	0.1490
0.55	0.2331	0.1945	0.7884	0.2896	0.1500
0.60	0.2193	0.1796	0.7716	0.3058	0.1509
0.65	0.2070	0.1661	0.7548	0.3214	0.1517
0.70	0.1960	0.1537	0.7380	0.3366	0.1524
0.75	0.1865	0.1424	0.7212	0.3514	0.1530
0.80	0.1783	0.1321	0.7044	0.3657	0.1536
0.85	0.1715	0.1227	0.6875	0.3797	0.1540
0.90	0.1665	0.1142	0.6705	0.3932	0.1544
0.95	0.1637	0.1063	0.6533	0.4064	0.1547
1.00	0.1666	0.0991	0.6359	0.4191	0.1550

Устремляя ℓ к нулю, из теорем 1 и 2 можно получить верхние оценки асимптотически правильных констант

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{\lambda > 0, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: \ell_\lambda = \ell} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell}, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta, s}) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{\lambda > 0, F \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}: \ell_\lambda = \ell} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell}, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Таблица 5. Значения величин $\ell_*^s(\delta)$ и $A_\delta^s(\ell)$ из теоремы 2 для $\ell = \ell_*^s(\delta)$, $0.5 \wedge \ell_*^s(\delta)$, $0.1 \wedge \ell_*^s(\delta)$ и $\ell \rightarrow 0+$ при некоторых $0 < \delta \leq 1$. В третьем столбце указаны оптимальные значения t_0 , доставляющие инфимум в $A_\delta^s(\ell_*^s(\delta))$, при других ℓ оптимальные значения t_0 совпадают с $t_3(\delta)$ (см. таблицу 4).

δ	$\ell_*^s(\delta)$	$t_0 =$	$A_\delta^s(\ell_*^s(\delta)) \leq$	$A_\delta^s(0.5) \leq$	$A_\delta^s(0.1) \leq$	$A_\delta^s(0+) \leq$
0.05	0.0684	0.1370	113.7650	113.7650	113.7650	113.7650
0.10	0.1535	0.1386	22.0866	22.0866	22.0866	22.0866
0.15	0.2437	0.1401	8.6060	8.6060	8.6060	8.6060
0.20	0.3362	0.1416	4.4423	4.4423	4.4413	4.4413
0.25	0.4279	0.1431	2.6743	2.6743	2.6689	2.6688
0.30	0.5139	0.1444	1.7783	1.7775	1.7646	1.7643
0.35	0.5907	0.1457	1.2716	1.2625	1.2462	1.2453
0.40	0.6486	0.1469	0.9967	0.9428	0.9238	0.9220
0.45	0.6870	0.1480	0.8499	0.7325	0.7113	0.7080
0.50	0.7156	0.1490	0.7559	0.5886	0.5648	0.5596
0.55	0.7392	0.1500	0.6879	0.4877	0.4603	0.4529
0.60	0.7611	0.1616	0.6325	0.4160	0.3838	0.3738
0.65	0.7838	0.1735	0.5820	0.3650	0.3264	0.3137
0.70	0.8071	0.1842	0.5362	0.3289	0.2827	0.2671
0.75	0.8310	0.1939	0.4949	0.3037	0.2488	0.2303
0.80	0.8553	0.2025	0.4577	0.2845	0.2222	0.2009
0.85	0.8799	0.2102	0.4243	0.2679	0.2012	0.1771
0.90	0.9046	0.2171	0.3945	0.2534	0.1843	0.1575
0.95	0.9292	0.2232	0.3679	0.2408	0.1708	0.1414
1.00	0.9537	0.2286	0.3442	0.2299	0.1599	0.1595

Теорема 3. Для асимптотически правильных констант $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ при всех $0 < \delta \leq 1$ справедливы оценки

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} < 0.2660, \quad C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leq C(\delta), \quad 0 < \delta < 1,$$

с $C(\delta)$, определенной в формулировке теоремы 1. В частности,

$$\lim_{\delta \rightarrow 1-} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} < 0.0665, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leq \frac{\gamma_0}{\pi} < 0.1693.$$

Значения $C(\delta)$ для других $0 < \delta < 1$ приведены в таблице 2.

Теорема 4. Для асимптотически правильных констант $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s})$ при всех $0 < \delta \leq 1$ справедливы оценки

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \leq \frac{1+2\kappa_1}{2\sqrt{2\pi}} < 0.2391, \quad C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,s}) \leq C_s(\delta), \quad 0 < \delta < 1,$$

с $C_s(\delta)$, определенной в формулировке теоремы 2. В частности,

$$\lim_{\delta \rightarrow 1-} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta, s}) \leq \frac{\varkappa_1}{\sqrt{2\pi}} < 0.0396, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta, s}) \leq \frac{\varkappa_0}{\pi} = \frac{1}{2\pi} < 0.1592.$$

Значения $C_s(\delta)$ для других $0 < \delta < 1$ приведены в таблице 2.

В следующем пункте будет показано, что $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = 2(3\sqrt{2\pi})^{-1} = 0.2659\dots$ (см. следствие 3), т.е. теорема 3 фактически устанавливает точное значение асимптотически правильной константы $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на свойстве безграничной делимости обобщенного пуассоновского распределения и соответствующих оценках точности нормальной аппроксимации для сумм детерминированного числа независимых одинаково распределенных случайных величин. Последние даны в следующей лемме.

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве и имеющие общую функцию распределения $G \in \mathcal{F}_2$. Для $n = 1, 2, \dots$ обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_n^* &= \Delta_n^*(Y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |G_n(x) - \Phi(x)|, \\ G_n(x) &= \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n - n\mathbf{E}Y < x\sqrt{n\mathbf{D}Y}) \\ &= G^{*n}(x\sqrt{n\mathbf{D}Y} + n\mathbf{E}Y), \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

где G^{*n} есть n -кратная свертка функции распределения G с собой.

Лемма 1 (см. [32], [18]). Для любых $0 < \delta \leq 1$, $\ell > 0$ и произвольной бесконечно малой последовательности неотрицательных чисел $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{Y \in \mathcal{F}_{2+\delta}: |L_0(Y)n^{-\delta/2} - \ell| \leq \theta_n} \Delta_n^*(Y) &\leq C(\delta)\ell + \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + A_\delta(\ell \wedge \ell_*(\delta)) \cdot \ell^2, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{Y \in \mathcal{F}_{2+\delta, s}: |L_0(Y)n^{-\delta/2} - \ell| \leq \theta_n} \Delta_n^*(Y) &\leq C_s(\delta)\ell + \frac{\ell^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + A_\delta^s(\ell \wedge \ell_*^s(\delta)) \cdot \ell^2, \end{aligned}$$

с $C(\delta)$, $A_\delta(\ell)$, $\ell_*(\delta)$, определенными в формулировке теоремы 1, и $C_s(\delta)$, $A_\delta^s(\ell)$, $\ell_*^s(\delta)$, определенными в формулировке теоремы 2.

Свойство безграничной делимости с вытекающими из него оценками первых моментов сформулировано в следующей лемме (также см. [13], [5]).

Лемма 2. Для любых $0 < \delta \leq 1$, $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, $\lambda > 0$ и $n \geq 1$ существует вероятностное пространство и набор n независимых одинаково распределенных случайных величин $Y_{\nu,1}, \dots, Y_{\nu,n} \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, $\nu = \lambda/n$,

на нем таких, что

$$\tilde{S}_\lambda \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Y_{\nu,j}, \quad \mathbf{E} Y_{\nu,1} = 0, \quad \mathbf{D} Y_{\nu,1} = 1,$$

и при $n \geq \lambda$

$$L_1(X) \nu^{-\delta/2} (1 - 4\nu) \leq L_0(Y_{\nu,1}) = \mathbf{E} |Y_{\nu,1}|^{2+\delta} \leq L_1(X) \nu^{-\delta/2} (1 + 40\nu).$$

Если же $F \in \mathcal{F}_{2+\delta,s}$, то и $Y_{\nu,1} \in \mathcal{F}_{2+\delta,s}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения леммы, за исключением нижней оценки для $\mathbf{E} |Y_{\nu,1}|^{2+\delta}$ и последнего предложения, доказаны в [13] (также см. [5]). Для доказательства оставшихся утверждений заметим, что в силу безграничной делимости обобщенного пуассоновского распределения случайная величина $Y_{\nu,1}$ представима в виде

$$Y_{\nu,1} \stackrel{d}{=} \frac{X_1 + \dots + X_{N_\nu} - \nu \mathbf{E} X}{\sqrt{\nu \mathbf{E} X^2}} \equiv \frac{S_\nu - \mathbf{E} S_\nu}{\sqrt{\mathbf{D} S_\nu}}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что если распределение случайной величины X_1 ($\stackrel{d}{=} X_2 \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} X$) симметрично, то $\mathbf{E} X = 0$ и распределение их случайной суммы $Y_{\nu,1}$ тоже симметрично.

Обозначим теперь $a = \mathbf{E} X$. По формуле полной вероятности и в силу неравенства $e^{-x} \geq 1 - x$, $x \in \mathbf{R}$, имеем

$$\begin{aligned} (\nu \mathbf{E} X^2)^{1+\delta/2} \mathbf{E} |Y_{\nu,1}|^{2+\delta} &= \mathbf{E} |X_1 + \dots + X_{N_\nu} - a\nu|^{2+\delta} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} |X_1 + \dots + X_k - a\nu|^{2+\delta} \mathbf{P}(N_\nu = k) \\ &= e^{-\nu} \left(|a\nu|^{2+\delta} + \nu \mathbf{E} |X_1 - a\nu|^{2+\delta} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \mathbf{E} |X_1 + \dots + X_k - a\nu|^{2+\delta} \right) \\ &\geq \nu(1 - \nu) \mathbf{E} |X_1 - a\nu|^{2+\delta}. \end{aligned}$$

Далее, используя неравенство $|1 - x|^\alpha \geq 1 - \alpha x$, справедливое для всех $x \in \mathbf{R}$ и $\alpha \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |X_1 - a\nu|^{2+\delta} &= \mathbf{E} |X - a\nu|^{2+\delta} \geq \mathbf{E} |X - a\nu|^{2+\delta} \mathbf{1}(X \neq 0) \\ &= \mathbf{E} |X|^{2+\delta} \left| 1 - \frac{a\nu}{X} \right|^{2+\delta} \mathbf{1}(X \neq 0) \geq \mathbf{E} |X|^{2+\delta} \left(1 - (2 + \delta) \frac{a\nu}{X} \right) \mathbf{1}(X \neq 0) \\ &= \mathbf{E} |X|^{2+\delta} - (2 + \delta) \nu a \mathbf{E} X |X|^\delta. \end{aligned}$$

Поскольку в силу неравенства Ляпунова

$$|a \mathbf{E} X |X|^\delta| = |\mathbf{E} X \cdot \mathbf{E} X |X|^\delta| \leq \mathbf{E} |X| \cdot \mathbf{E} |X|^{1+\delta} \leq \mathbf{E} |X|^{2+\delta} = \beta_{2+\delta},$$

приходим к оценке

$$\mathbf{E} |X_1 - a\nu|^{2+\delta} \geq \beta_{2+\delta}(1 - (2 + \delta)\nu) \geq \beta_{2+\delta}(1 - 3\nu),$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |Y_{\nu,1}|^{2+\delta} &\geq \frac{\nu(1-\nu) \mathbf{E} |X_1 - a\nu|^{2+\delta}}{(\nu \mathbf{E} X^2)^{1+\delta/2}} \geq \frac{\beta_{2+\delta}(1-3\nu)(1-\nu)}{(\mathbf{E} X^2)^{1+\delta/2} \nu^{\delta/2}} \\ &\geq \frac{\beta_{2+\delta}(1-4\nu)}{(\mathbf{E} X^2)^{1+\delta/2} \nu^{\delta/2}} = \nu^{-\delta/2} L_1(X)(1-4\nu). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теорем 1 и 2. По лемме 2 для любых $n \geq \lambda > 0$ имеем $\Delta_\lambda(X) = \Delta_n^*(Y_{\nu,1})$ и, поскольку $\ell_\lambda = L_1(X)\lambda^{-\delta/2}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{L_0(Y_{\nu,1})}{n^{\delta/2}} - \ell_\lambda \right| &= \ell_\lambda \left| \frac{\nu^{\delta/2} \mathbf{E} |Y_{\nu,1}|^{2+\delta}}{L_1(X)} - 1 \right| \leq \ell_\lambda \max\{40\nu, 4\nu\} \\ &= 40\nu\ell_\lambda = \frac{40\lambda\ell_\lambda}{n} \equiv \theta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

для любых фиксированных $\lambda > 0$ и $\ell_\lambda > 0$. Таким образом, в силу леммы 1 и произвольности $n \geq \lambda$ заключаем, что для любых фиксированных $\lambda > 0$ и $X \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ (а значит, и ℓ_λ тоже фиксировано)

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(X) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^*(Y_{\lambda/n,1}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{Y \in \mathcal{F}_{2+\delta}: |L_0^{2+\delta}(Y)n^{-\delta/2} - \ell_\lambda| \leq \theta_n} \Delta_n^*(Y) \\ &\leq C(\delta)\ell_\lambda + \frac{\ell_\lambda^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + A_\delta(\ell_\lambda \wedge \ell_*(\delta)) \cdot \ell_\lambda^2 \end{aligned}$$

с определенной выше бесконечно малой последовательностью θ_n . Если же $X \in \mathcal{F}_{2+\delta,s}$, то, как отмечено в лемме 2, и $Y_{\nu,1} \in \mathcal{F}_{2+\delta,s}$, и при всех $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(X) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^*(Y_{\lambda/n,1}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{Y \in \mathcal{F}_{2+\delta,s}: |L_0^{2+\delta}(Y)n^{-\delta/2} - \ell_\lambda| \leq \theta_n} \Delta_n^*(Y) \\ &\leq C_s(\delta)\ell_\lambda + \frac{\ell_\lambda^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + A_\delta^s(\ell_\lambda \wedge \ell_*^s(\delta)) \cdot \ell_\lambda^2, \end{aligned}$$

с той же бесконечно малой последовательностью θ_n .

3. Нижние оценки.

Теорема 5. Для верхней асимптотически правильной константы $\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$, определенной в (4), при всех $0 \leq \delta \leq 1$ справедливы нижние оценки

$$\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \geq \overline{C}_{\text{АП}}^*(\mathcal{F}_{2+\delta}) \geq \sup_{\gamma > 0, m \in \mathbf{N}_0} \gamma^{\delta/2} \left(e^{-\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\gamma^k}{k!} - \Phi\left(\frac{m-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\right) \right), \quad (13)$$

где $\mathbf{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел, $\gamma^{\delta/2} \equiv 0$ при $\delta = 0$,

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\text{АП}}^*(\mathcal{F}_2) &= \overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_2), \\ \overline{C}_{\text{АП}}^*(\mathcal{F}_{2+\delta}) &= \sup_{\ell > 0} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: \ell_\lambda(F) = \ell} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell}, \quad 0 < \delta \leq 1.\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Можно убедиться, что экстремум в (13) при всех $0 \leq \delta \leq 0.95$ достигается значением $m = 0$, так что миноранта в (13) имеет вид

$$\sup_{\gamma > 0} \gamma^{\delta/2} (e^{-\gamma} - \Phi(-\sqrt{\gamma})).$$

При $\delta = 0.96$ экстремальное m уже равно 1 и значение миноранты в (13) есть $0.2635\dots$, при $\delta = 0.995$ экстремальное m равно 2, соответствующее значение миноранты равно $0.2652\dots$ и т.д. При $\delta = 1$ экстремум доставляют $m \rightarrow \infty$ и $\gamma = m$, так что $\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) \geq 2/(3\sqrt{2\pi}) > 0.2659$. Значения миноранты в (13) при других $0 < \delta < 1$ приведены в таблице 1.

Теорема 6. Для нижней асимптотически правильной константы $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$ справедлива нижняя оценка

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) \equiv \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3: \ell_\lambda(F) = \ell} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell} \geq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659\dots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м 5 и 6. Первое неравенство теоремы 5

$$\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \equiv \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell_\lambda(F)} \geq \sup_{\ell > 0} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: \ell_\lambda(F) = \ell} \frac{\Delta_\lambda(F)}{\ell}$$

очевидно. Рассмотрим теперь последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \dots$ с распределением Бернулли $\mathbf{P}(X = 1) = \gamma/\lambda = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$, $0 < \gamma < \lambda$. Тогда $\mathbf{E}X = \mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}|X|^{2+\delta} = \gamma/\lambda$, $\ell_\lambda = \gamma^{-\delta/2}$. Из условия $\ell_\lambda = \ell$ найдем, что $\gamma = \ell^{-2/\delta}$, будем иметь это соотношение в виду. Случайная величина $S_\lambda = X_1 + \dots + X_{N_\lambda}$, как известно, имеет пуассоновское распределение с параметром γ , а следовательно, $\mathbf{E}S_\lambda = \gamma = \mathbf{D}S_\lambda$ и

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda &= \sup_x \left| \mathbf{P}\left(\frac{S_\lambda - \gamma}{\sqrt{\gamma}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \geq \sup_{m \in \mathbf{N}_0} \left(\mathbf{P}(S_\lambda \leq m) - \Phi\left(\frac{m - \gamma}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \\ &= \sup_{m \in \mathbf{N}_0} \left(e^{-\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\gamma^k}{k!} - \Phi\left(\frac{m - \gamma}{\sqrt{\gamma}}\right) \right),\end{aligned}$$

и для выбранного распределения Δ_λ не зависит от λ .

Таким образом, для $\overline{C}_{\text{АП}}^*(\mathcal{F}_{2+\delta})$ при всех $0 \leq \delta \leq 1$ получаем оценку

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\text{АП}}^*(\mathcal{F}_{2+\delta}) &\geq \sup_{\gamma > 0} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: \ell_\lambda(F) = \gamma^{-\delta/2}} \gamma^{\delta/2} \Delta_\lambda(F) \\ &\geq \sup_{\gamma > 0, m \in \mathbf{N}_0} \gamma^{\delta/2} \left(e^{-\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\gamma^k}{k!} - \Phi\left(\frac{m-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\right) \right),\end{aligned}$$

что и доказывает теорему 5.

Для доказательства теоремы 6 заметим, что верхний предел при $\ell \rightarrow 0$ в определении $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$ не уменьшится, если брать его по ℓ вида $\gamma^{-1/2}$, где $\gamma \in \mathbf{N}$, $\gamma \rightarrow \infty$, поэтому

$$\begin{aligned}\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) &\geq \lim_{\gamma \rightarrow \infty, \gamma \in \mathbf{N}} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3: \ell_\lambda(F) = \gamma^{-1/2}} \sqrt{\gamma} \Delta_\lambda(F) \\ &\geq \lim_{\gamma \rightarrow \infty, \gamma \in \mathbf{N}} \sup_{m \in \mathbf{N}_0} \sqrt{\gamma} \left(e^{-\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\gamma^k}{k!} - \Phi\left(\frac{m-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty, m \in \mathbf{N}} \sqrt{m} \left(e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} - \Phi(0) \right).\end{aligned}$$

Как известно, (см., например, [1, пп. 6.5.13, 6.1.38, 6.5.35]),

$$\begin{aligned}e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} &= \frac{1}{m!} \int_m^\infty t^m e^{-t} dt = \frac{\Gamma(m+1, m)}{m!}, \\ m! &= \sqrt{2\pi m}^{m+1/2} \exp\left\{-m + \frac{\theta}{12m}\right\}, \quad 0 < \theta < 1, \\ \Gamma(m+1, m) &= \left(\frac{m}{e}\right)^m \left(\sqrt{\frac{\pi m}{2}} + \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right), \quad m \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

поэтому

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) \geq \lim_{m \rightarrow \infty, m \in \mathbf{N}} \sqrt{m} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3\sqrt{2\pi m}} + O\left(\frac{1}{m}\right) - \Phi(0) \right) = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}},$$

что доказывает теорему 6.

Из теорем 3 и 6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Для $\delta = 1$ значения асимптотически правильной и нижней асимптотически правильной констант совпадают и равняются

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659 \dots$$

З а м е ч а н и е 3. В отличие от рассматриваемой в данной работе схемы пуассоновского случайного суммирования для схемы суммирования детерминированного числа независимых одинаково распределенных случайных величин из $\mathcal{F}_3$ асимптотически правильная константа $(\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4097 \dots$ строго больше нижней асимптотически правильной константы $2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659 \dots$.

Теорема 7. Для верхней асимптотически правильной константы $\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2,s})$ справедлива оценка

$$\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2,s}) \equiv \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2,s}} \Delta_\lambda(F) \geq \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X, X_1, X_2, \dots$ с одинаковым симметричным распределением $\mathbf{P}(X = \pm 1) = p$, $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - 2p$, $0 < p \leq 1/2$. Тогда $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = 2p$. В [9, лемма 2.1] показано, что для функции распределения F_λ соответствующей нормированной суммы $\tilde{S}_\lambda = (X_1 + \dots + X_{N_\lambda})/\sqrt{2\lambda p}$ имеет место соотношение

$$\Phi(0) - F_\lambda(0) = \frac{e^{-2\lambda p}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{2k}}{(k!)^2},$$

с помощью которого получаем

$$\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2,s}) \geq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{0 < p \leq 1/2} \frac{e^{-2\lambda p}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Полагая теперь $p = \gamma/(2\lambda)$, $0 < \gamma \leq \lambda$, окончательно получаем

$$\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2,s}) \geq \sup_{\gamma > 0} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma/2)^{2k}}{(k!)^2} \geq \frac{1}{2} \lim_{\gamma \rightarrow 0} e^{-\gamma} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma/2)^{2k}}{(k!)^2} \right) = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 8. Пусть $\psi(\lambda)$, $\lambda > 0$, — неотрицательная функция такая, что $\psi(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда найдутся такие функции распределения $F \in \mathcal{F}_2$ и положительное число λ_1 , что $\Delta_\lambda(F) \geq \psi(\lambda)$ при всех $\lambda \geq \lambda_1$. При этом функция распределения F имеет вид

$$F(x) = F(x; \gamma_1, \gamma_2, \dots; \sigma_1, \sigma_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \Phi\left(\frac{x}{\sigma_k}\right), \quad (14)$$

где $\gamma_k \geq 0$, $\sigma_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sigma_k^2 = 1$.

З а м е ч а н и е 4. При доказательстве теоремы числовые последовательности $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$ и $\{\sigma_k\}_{k \geq 1}$, определяющие экстремальную функцию распределения F в (14), будут построены по функции $\psi(\lambda)$ в явном виде.

Основные идеи доказательства восходят к методу Прохорова–Мацкявичюса, с помощью которого в [8] был получен аналогичный результат для сумм детерминированного числа независимых одинаково распределенных случайных величин. Как и в [8], мы разобьем доказательство теоремы 8 на два этапа: сначала выведем неравенство, связывающее величину $\Delta_\lambda(F)$ с остатками рядов

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k \sigma_k^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а затем перейдем к построению функции распределения F вида (14), существование которой утверждает теорема 8. Доказательство теоремы 8 исправляет неточность, допущенную Мацквичюсом при доказательстве аналогичной теоремы в [8]: доказательство Мацквичюса верно при условии, что последовательность $\psi(n)$ строго монотонна.

Лемма 3. Для любых $\lambda \geq 1$ и $n \geq 0$ таких, что $0 < 4r_n(\lambda + 1) \leq R_n \leq 1$, справедлива оценка

$$\Delta_\lambda > \frac{R_n}{60}.$$

Доказательство. Как несложно убедиться, характеристическая функция распределения (14) имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \exp \left\{ -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2} \right\}, \quad t \in \mathbf{R},$$

а характеристическая функция нормированной суммы $\tilde{S}_\lambda = (X_1 + \dots + X_{N_\lambda})/\sqrt{\lambda}$ имеет вид

$$f_\lambda(t) = \exp \left\{ \lambda \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1 \right) \right\} = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\exp \left\{ -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2\lambda} \right\} - 1 \right) \right\}.$$

В силу неравенства $e^x \geq 1 + x$, справедливого для всех $x \in \mathbf{R}$, имеем

$$\begin{aligned} f_\lambda(t) - e^{-t^2/2} &= e^{-t^2/2} \left(f_\lambda(t) e^{t^2/2} - 1 \right) \\ &= e^{-t^2/2} \left[\exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\exp \left\{ -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2\lambda} \right\} - 1 + \frac{t^2}{2\lambda} \right) \right\} - 1 \right] \\ &\geq \lambda e^{-t^2/2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\exp \left\{ -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2\lambda} \right\} - 1 + \frac{t^2}{2\lambda} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Далее, как показано в [8], для любой пары функций распределения G_1 и G_2 с характеристическими функциями g_1 и g_2 справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |G_1(x) - G_2(x)| \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (g_1(t) - g_2(t)) e^{-t^2/2} dt \right|.$$

В частности, для $G_1 = F_\lambda$ и $G_2 = \Phi$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda &\geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\lambda(t) - e^{-t^2/2} \right) e^{-t^2/2} dt \\ &\geq \frac{\lambda}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp \left\{ -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2\lambda} \right\} - 1 + \frac{t^2}{2\lambda} \right) e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(1 + \frac{\sigma_k^2}{2\lambda} \right)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{4\lambda} \right), \end{aligned}$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 t^2}{2\lambda} - t^2 \right\} dt = \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right)^{-1/2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Так как функция $1/\sqrt{x}$ выпукла при $x > 0$, то по неравенству Иенсена для всех n таких, что $\sum_{k=1}^n \gamma_k \equiv 1 - r_n > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma_k \left(1 + \frac{\sigma_k^2}{2\lambda} \right)^{-1/2} &= (1 - r_n) \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{1 - r_n} \left(1 + \frac{\sigma_k^2}{2\lambda} \right)^{-1/2} \\ &\geq (1 - r_n) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{1 - r_n} \left(1 + \frac{\sigma_k^2}{2\lambda} \right) \right)^{-1/2} = (1 - r_n) \left(1 + \frac{1 - R_n}{2\lambda(1 - r_n)} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Аналогично, для всех n таких, что $r_n > 0$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k \left(1 + \frac{\sigma_k^2}{2\lambda} \right)^{-1/2} \geq r_n \left(1 + \frac{R_n}{2\lambda r_n} \right)^{-1/2}.$$

Таким образом, при всех n таких, что $r_n \in (0, 1)$, справедлива оценка

$$\Delta_\lambda \geq \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \Delta_\lambda^*(r_n, R_n),$$

где

$$\Delta_\lambda^*(r, R) = (1 - r) \left(1 + \frac{1 - R}{2\lambda(1 - r)} \right)^{-1/2} + r \left(1 + \frac{R}{2\lambda r} \right)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{4\lambda}.$$

Зафиксируем $r \in (0, 1)$ и рассмотрим Δ_λ^* как функцию переменного $R \in [r, 1]$. Оценим $\Delta_\lambda^*(r, R)$ на указанном отрезке снизу. Несложно убедиться, что

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda^*(r, r) &= \left(1 + \frac{1}{2\lambda} \right)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{4\lambda} > 0 \quad \text{при всех } \lambda > 0, \\ \frac{\partial \Delta_\lambda^*(r, R)}{\partial R} &= \frac{A^{-3/2} - B^{-3/2}}{4\lambda}, \quad \text{где } A = 1 + \frac{1 - R}{2\lambda(1 - r)}, \quad B = 1 + \frac{R}{2\lambda r}. \end{aligned}$$

Далее, в рассматриваемой области $R \in [r, 1]$ при всех $\lambda \geq 1$ справедливы неравенства $A \leq B$ и $A \leq 1 + (2\lambda)^{-1} \leq 3/2$, а следовательно,

$$A^{-3/2} - B^{-3/2} \geq \frac{B - A}{A^{3/2}B} = \frac{A^{-3/2}}{(1 - r)} \frac{V}{1 + V}, \quad \text{где } V = V(R) = \frac{R - r}{(2\lambda + 1)r}.$$

Выбирая теперь произвольное $R_* \in (r, 1]$ и обозначая $V_* = V(R_*)$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda^*(r, R_*) &= \Delta_\lambda^*(r, r) + \int_r^{R_*} \frac{\partial \Delta_\lambda^*(r, R)}{\partial R} dR \geq \int_r^{R_*} \frac{\partial \Delta_\lambda^*(r, R)}{\partial R} dR \\ &\geq \frac{A^{-3/2}}{4\lambda(1-r)} \int_r^{R_*} \frac{V(R) dR}{1+V(R)} = \frac{(2\lambda+1)rA^{-3/2}}{4\lambda(1-r)} \int_0^{V_*} \frac{V dV}{1+V} \\ &= \frac{(2\lambda+1)rA^{-3/2}}{4\lambda(1-r)} (V_* - \ln(1+V_*)) = \frac{(R_*-r)A^{-3/2}}{4\lambda(1-r)} \frac{V_* - \ln(1+V_*)}{V_*} \\ &\geq \frac{(3/2)^{-3/2}(R_*-r)}{4\lambda} \frac{V_* - \ln(1+V_*)}{V_*}. \end{aligned}$$

Предположим, что $r \leq (4(\lambda+1))^{-1}$. Тогда для любого R_* из области $4r(\lambda+1) \leq R_* \leq 1$ при всех $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned} R_* - r &\geq R_* - \frac{R_*}{4(\lambda+1)} = R_* \left(1 - \frac{1}{4(\lambda+1)}\right) \geq \frac{7R_*}{8}, \\ V_* &= \frac{R_* - r}{(2\lambda+1)r} \geq \frac{4r(\lambda+1) - r}{(2\lambda+1)r} = \frac{4\lambda+3}{2\lambda+1} > 2. \end{aligned}$$

Так как функция $(V - \ln(1+V))/V$ возрастает при $V > 0$, то ее значение в точке V_* больше, чем ее значение в точке 2, т.е. больше, чем $1 - \ln \sqrt{3} = 0.4506\dots$. Поэтому при всех $\lambda \geq 1$, $r > 0$ и R_* таких, что $4r(\lambda+1) \leq R_* \leq 1$, имеем

$$\Delta_\lambda^*(r, R_*) \geq \frac{(3/2)^{-3/2}}{4\lambda} \cdot \frac{7}{8} \cdot (1 - \ln \sqrt{3}) R_*.$$

Итак, если выполнено условие леммы, т.е. если $\lambda \geq 1$ и n таковы, что $0 < 4r_n(\lambda+1) \leq R_n \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda &\geq \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(3/2)^{-3/2}}{4\lambda} \cdot \frac{7}{8} \cdot (1 - \ln \sqrt{3}) R_n \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{4 \cdot 8 \cdot 9} (1 - \ln \sqrt{3}) R_n \geq 0.0189 \cdot R_n > \frac{1}{60} R_n. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 8. Для того чтобы иметь дело с монотонными функциями, положим $\psi_1(\lambda) = \sup_{x \geq \lambda} \psi(x)$. Тогда $\psi_1(\lambda)$ не возрастает и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi_1(\lambda) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $\psi_1(\lambda)$ положительна при всех $\lambda > 0$, так как в противном случае $\psi_1(\lambda) = \psi(\lambda) \equiv 0$ для всех λ начиная с некоторого и утверждение теоремы становится тривиальным. Определим n_0 как такое наименьшее целое положительное число, что выполняется неравенство $60\psi_1(n_0) \leq 1$. Положим

$$R_0 = \dots = R_{n_0-1} = 1, \quad R_{n_0+k} = 60\psi_1(n_0+k), \quad k \geq 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n_0-1} = 0, \quad \gamma_{n_0} \sigma_{n_0}^2 = 1 - 60\psi_1(n_0), \\ \gamma_{n_0+k} \sigma_{n_0+k}^2 = 60(\psi_1(n_0 + k - 1) - \psi_1(n_0 + k)), \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Определим теперь $\gamma_{n_0+k} = r_{n_0+k-1} - r_{n_0+k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где

$$r_{n_0-1} = 1, \quad r_{n_0+k} = \frac{R_{n_0+k}}{4(\lambda+1)} = \frac{60\psi_1(n_0+k)}{4(\lambda+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ясно, что $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sigma_k^2 = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = 1$, и условие $4(\lambda+1)r_n \leq R_n$ леммы 3 выполняется очевидным образом для всех $n \geq n_0$. Поэтому в силу леммы 3 заключаем, что $\Delta_\lambda \geq R_n/60 = \psi_1(n)$ для всех $n \geq n_0$. В частности, если $\lambda \geq n_0$, то для $n = [\lambda]$, где $[\lambda]$ — наибольшее целое, не превосходящее λ , имеем $n \geq n_0$, а следовательно, $\Delta_\lambda \geq \psi_1([\lambda])$. Так как $[\lambda] \leq \lambda$ и $\psi_1(\lambda)$ не возрастает, заключаем, что $\Delta_\lambda \geq \psi_1(\lambda) \geq \psi(\lambda)$ для всех $\lambda \geq n_0$, что и требовалось доказать.

В заключение автор выражает свою искреннюю признательность В. Ю. Королеву за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979, 832 с.
2. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением. М.: Наука, 1982, 286 с.
3. Григорьева М. Е., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена. — Информ. и ее примен., 2010, т. 4, № 2, с. 78–85.
4. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестн. Моск. ун-та, 1953, т. 10, с. 29–38.
5. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2011, 620 с.
6. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм. — Докл. РАН, 2010, т. 431, № 1, с. 16–19.
7. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во МГУ, 1990, 296 с.
8. Мацкявичюс В. К. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 3, с. 565–569.
9. Нефедова Ю. С. Уточнение структуры моментных оценок скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2011.
10. Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм. — Информ. и ее примен., 2011, т. 5, № 1, с. 39–45.
11. Ротарь Г. В. Некоторые задачи планирования резерва. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: ЦЭМИ, 1972.
12. Ротарь Г. В. Об одной задаче управления резервами. — Эконом. матем. методы, 1976, т. 12, № 4, с. 733–739.

13. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, № 1, с. 3–28.
14. Шевцова И. Г. Нижняя асимптотически правильная постоянная в центральной предельной теореме. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 4, с. 466–469.
15. Шевцова И. Г. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 2, с. 271–304.
16. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин. — Докл. РАН, 2012, т. 443, № 5, с. 555–560.
17. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для сумм независимых симметричных случайных величин. — Докл. РАН, 2012, т. 443, № 6, с. 671–676.
18. Шевцова И. Г. Моментные оценки точности нормальной аппроксимации с уточненной структурой для сумм независимых симметричных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 499–532.
19. Шуганов И. С. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
20. van Beek P. An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1972, v. 23, p. 187–196.
21. Bening V. E., Korolev V. Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002, 434 p.
22. Bening V. E., Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya. On approximation to generalized Poisson distributions. — J. Math. Sci., 1997, v. 83, № 3, p. 360–373.
23. von Chossy R., Rappl G. Some approximation methods for the distribution of random sums. — Insurance: Math. Econ., 1983, v. 2, p. 251–270.
24. Englund G. A remainder term estimate in a random-sum central limit theorem. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 1, с. 143–149.
25. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
26. Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton: CRC Press, 1996, 267 p.
27. Korolev V., Shevtsova I. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. — Scand. Actuarial J., 2012, v. 2012, № 2, p. 81–105.
28. Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya. On the absolute constant in the remainder term estimate in the central limit theorem for Poisson random sums. — Probabilistic Methods in Discrete Mathematics (Proceeding of the Fourth International Petrozavodsk Conference). Utrecht: VSP, 1997, p. 305–308.
29. Michel R. On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution. — Insurance: Math. Econ., 1993, v. 13, № 1, p. 35–37.
30. Nefedova Yu., Shevtsova I. On the constants in the uniform and non-uniform versions of the Berry–Esseen inequality for Poisson random sums. — Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT) on 2010 International Congress (18–20 Oct. 2010, Moscow), p. 1141–1144.
31. Shevtsova I. On the absolute constants in the Berry–Esseen type inequalities for identically distributed summands. — arXiv:1111.6554v1 [math.PR].
32. Shevtsova I. Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation. — Ann. Math. Inform., 2012, v. 39, p. 241–307.

Поступила в редакцию
16.III.2012