Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Тимушев, О скорости сходимости по вероятности спектральной функции распределения случайной матрицы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 618–622

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:49:24

10. Monat P., Stricker C. Fölmer-Schweizer decomposition and mean-variance hedging for general claims. — Ann. Probab., 1995, v. 23, № 2, p. 605–628.
11. Föllmer H., Schweizer M. Hedging of contingent claims under incomplete information. — Applied Stochastic Analysis (London, 1989). Ed. by M.H.A. Davis and R. J. Elliott. Stochastics Monogr., v. 5. New York: Gordon and Breach, 1991, p. 389–414.
12. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2: Теория. М.: ФАЗИС, 1998, 544 с.
13. Musiela M., Rutkowski M. Martingale Methods in Financial Modelling. Berlin: Springer-Verlag, 1997, 512 p.
14. Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986, 352 с.
15. Schäl M. On quadratic cost criteria for option hedging. — Math. Oper. Res., 1994, v. 19, № 1, p. 121–131.
16. Schweizer M. Variance-optimal hedging in discrete time. — Math. Oper. Res., 1995, v. 20, № 1, p. 1–32.

Поступила в редакцию
19.VIII.2004

© 2006 г.

ТИМУШЕВ Д. А.*

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ МАТРИЦЫ¹⁾

Показано, что расстояние Колмогорова между спектральной функцией распределения $(n \times n)$ -матрицы из GUE и функцией распределения полукругового закона имеет стохастический порядок $O_p((\ln n)/n^{2/3})$.

Ключевые слова и фразы: случайная матрица, полукруговой закон, вигнеровский ансамбль, гауссовский унитарный ансамбль.

Рассмотрим вигнеровскую эрмитову случайную матрицу $\mathbf{W} = (w_{kj})$ размерности $n \times n$. По определению ансамбля Вигнера, элементы w_{kj} , $1 \leq k \leq j \leq n$, являются независимыми одинаково распределенными комплексными случайными величинами, с независимыми мнимыми и вещественными частями, причем $\mathbf{E}w_{kj} = 0$ и $\mathbf{E}|w_{kj}|^2 = \sigma^2$. Обозначим λ_j , $1 \leq j \leq n$, собственные числа матрицы $n^{-1/2}\mathbf{W}$, а $F_n(x) = n^{-1}\#\{j: \lambda_j \leq x\}$ спектральную функцию распределения матрицы $n^{-1/2}\mathbf{W}$. Пусть $G(x)$ — функция распределения полукругового закона с плотностью

$$G'(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \mathbf{I}_{\{|x| \leq 2\sigma\}}.$$

Нас будет интересовать скорость сходимости спектральной функции $F_n(x)$ к функции распределения $G(x)$ в метрике Колмогорова, а также в метриках пространств L_1 и L_2 , т.е. величины

$$\begin{aligned} \Delta_n^* &:= \sup_x |F_n(x) - G(x)|, \\ L_p(F_n, G) &:= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - G(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p = 1, 2. \end{aligned}$$

* Математический факультет, Сыктывкарский государственный университет, Октябрьский пр., 55, 167001 Сыктывкар, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке DFG-Forschergruppe FOR 399/1 и SFB 701 Universität Bielefeld.

Скорость сходимости к полукруговому закону оценивалась в работах многих авторов (см., например, [2]–[5] и литературу к ним). В [3], в частности, показано, что для вигнеровских матриц, четвертые моменты элементов которых равномерно ограничены, имеет место оценка

$$\Delta_n := \sup_x |\mathbf{E}F_n(x) - G(x)| = O(n^{-1/2})$$

для скорости сходимости ожидаемой спектральной функции $\mathbf{E}F_n(x)$ к функции распределения $G(x)$. А при равномерной ограниченности двенадцатых моментов, аналогичная оценка $\mathbf{E}\Delta_n^* = O(n^{-1/2})$ показана для сходимости по вероятности спектральной функции $F_n(x)$ к функции распределения $G(x)$. В данной работе мы рассматриваем более узкий, чем вигнеровский, класс матриц — гауссовский унитарный ансамбль (GUE). Это вигнеровские матрицы, элементы которых w_{kj} имеют гауссовское распределение. В этом случае известно точное аналитическое представление совместной плотности распределения собственных чисел и, как следствие, плотности ожидаемой спектральной функции $(\mathbf{E}F_n(x))'$ через функции Эрмита, что позволяет воспользоваться при оценивании скорости сходимости соответствующей асимптотикой. Сходимость ожидаемой спектральной функции матриц из GUE исследовалась в работе [5], где была получена оптимальная оценка $\Delta_n = O(n^{-1})$. В то же время, для сходимости по вероятности известен лишь общий результат, упомянутый выше. В этой работе нами получен более точный результат.

Для удобства положим $\sigma^2 = \frac{1}{4}$. Символ C , с индексом или без него, на протяжении всей работы будет обозначать абсолютные положительные константы, необязательно одни и те же в разных формулах. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Существует такая положительная константа C , что*

$$\mathbf{E}L_p(F_n, G) \leq C \frac{\sqrt{\ln n}}{n}, \quad p = 1, 2, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}\Delta_n^* \leq C \frac{\ln n}{n^{2/3}}. \quad (2)$$

Доказательство. Мы начнем с доказательства соотношения (1). Положим $\varepsilon_n = Cn^{-2/3}$. Из показанного в работе [5] неравенства

$$\sup_{-1+\varepsilon_n \leq x \leq 1-\varepsilon_n} |\mathbf{E}F_n(x) - G(x)| \leq Cn^{-1} \quad (3)$$

и из конечности носителя плотности полукругового закона $G'(x)$ следует, что

$$L_p(\mathbf{E}F_n, G) \leq \frac{C}{n}, \quad p = 1, 2.$$

Поэтому нам достаточно оценить величины

$$\mathbf{E}L_p(F_n, \mathbf{E}F_n), \quad p = 1, 2.$$

Рассмотрим сначала случай $p = 2$.

Пусть

$$K_n(s, t) = \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \frac{\varphi_n(s)\varphi_{n-1}(t) - \varphi_{n-1}(s)\varphi_n(t)}{s - t}$$

обозначает ядро Кристоффеля–Дарбу,

$$p_n(s) = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} K_n(\sqrt{2n}s, \sqrt{2n}s)$$

— плотность ожидаемой спектральной функции распределения $\mathbf{E}F_n(x)$ (см. [6]). Здесь $\{\varphi_i\}$ обозначают функции Эрмита. Пусть $x \in \mathbf{R}$. Несложно проверить, что

$$\mathbf{E}(F_n(x) - \mathbf{E}F_n(x))^2 = \frac{2}{n} \int_{-\infty}^x \int_x^{\infty} K_n^2(\sqrt{2n}s, \sqrt{2n}t) ds dt.$$

Таким образом, нам достаточно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x \int_x^{\infty} K_n^2(\sqrt{2n}s, \sqrt{2n}t) dt ds dx = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Для этого воспользуемся асимптотикой Планшереля–Ротача для функций Эрмита (см., например, [1, с. 700]), которая может быть представлена в виде следующей ниже таблицы:

s	$\varphi_n(\sqrt{2n}s)$
$-1 + \varepsilon_n \leq s \leq 1 - \varepsilon_n$	$O(n^{-1/4}(1 - s^2)^{-1/4})$
$1 - \varepsilon_n \leq s \leq 1 + \varepsilon_n$	$O(n^{-1/12})$
$1 + \varepsilon_n \leq s \leq \sqrt{2}$	$O(n^{-1/4}(s - 1)^{-1/4}e^{-Cn(s-1)^{3/2}})$
$s \geq \sqrt{2}$	$O(e^{-Cns^2})$

Пользуясь данной асимптотикой и неравенством (3), получим требуемое.

Перейдем к доказательству соотношения (1) при $p = 1$. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}L_1(F_n, \mathbf{E}F_n) &\leq 2\mathbf{E}L_2(F_n, \mathbf{E}F_n) + 2 \int_{\sqrt{2}}^{\infty} (1 - \mathbf{E}F_n(x)) dx \\ &\quad + 2 \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \mathbf{E}F_n(x) dx \leq 4 \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^x p_n(s) ds dx + C \frac{\sqrt{\ln n}}{n}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство является следствием (1) при $p = 2$. Из асимптотики функций Эрмита заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^x p_n(s) ds dx \leq C\sqrt{n} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^x e^{-Cns^2} ds dx \leq \frac{C}{n\sqrt{n}} e^{-Cn}.$$

Тем самым доказательство соотношения (1) завершено.

Покажем теперь справедливость (2).

Обозначим $t_n(z)$ и $s(z)$ преобразования Стилтеса спектральной функции распределения $F_n(x)$ и функции распределения полукругового закона $G(x)$ соответственно. Тогда

$$s(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - z} dG(x) = -2z + 2\sqrt{z^2 - 1}, \quad t_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - z} dF_n(x).$$

Введем обозначения:

$$\delta_s t_n(u, v) := t_n(u + iv) - s(u + iv), \quad \delta_E t_n(u, v) := t_n(u + iv) - \mathbf{E}t_n(u + iv).$$

Пусть v и a — положительные числа, $x' = x + va$. Следуя работе [3], можно показать, что найдутся такие положительные константы $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5(a)$, что для всех $V > v$ и всех $x \in \mathbf{R}$

$$|F_n(x) - G(x)| \leq C_1 A_1 + C_2 A_2(x') + C_3 A_3 + C_4 \Delta_n + C_5(a) v,$$

где

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta_s t_n(u, V)| du, \quad A_2(x') = \left| \int_v^V \delta_s t_n(x', u) du \right|, \quad A_3 = \frac{1}{\sqrt{v}} L_2(F_n, \mathbf{E}F_n).$$

Введем в рассмотрение величины

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad x'_k = x_k + va, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\Delta_n^* \leq C_1 \mathbf{E}A_1 + C_2 \mathbf{E} \max_{0 \leq k \leq n} A_2(x'_k) + C_3 \mathbf{E}A_3 + C_4 \Delta_n + C_5(a) v + Cn^{-1}.$$

Далее будем полагать, что $V = 1$ и $v = Cn^{-2/3}$.

Легко заметить, что соотношение (1) при $p = 2$ влечет оценку $\mathbf{E}A_3 = O((\ln n)/n^{2/3})$. Из работы [3, (4.30)] следует неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}\delta_s t_n(u, V)| du \leq \frac{C}{n},$$

которое, вместе с соотношением (1) при $p = 1$ дает $\mathbf{E}A_1 = O((\ln n)/n)$. Таким образом, для завершения доказательства (2) нам остается доказать оценку

$$\mathbf{E} \max_{0 \leq k \leq n} A_2(x'_k) = O\left(\frac{\ln n}{n^{2/3}}\right).$$

Из следствия 2.4 работы [7] имеем неравенство

$$\mathbf{E} \left| \int_v^V \delta_E t_n(x'_k, u) du \right|^{2p} \leq (Cp)^p \mathbf{E} \left| \nabla \int_v^V t_n(x'_k + iu) du \right|^{2p}.$$

Принимая во внимание этот факт, можно показать, что найдется такая положительная константа C , что для всех $p \geq 1$ и $0 \leq k \leq n$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E} \left| \int_v^V \delta_E t_n(x'_k, u) du \right|^{2p} \leq \frac{(Cp)^p}{n^{2p} v^p}.$$

Введем события

$$\Omega_k = \left\{ \left| \int_v^V \delta_E t_n(x'_k, u) du \right| \leq \frac{\ln n}{n\sqrt{v}} \right\}.$$

Несложно убедиться, что для любых $0 \leq k \leq n$, $q \geq 1$ и достаточно больших n выполнено неравенство $\mathbf{P}\{\bar{\Omega}_k\} \leq n^{-q}$. Учитывая это, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \max_{0 \leq k \leq n} A_2(x'_k) &\leq \mathbf{E} \max_{0 \leq k \leq n} \left| \int_v^V \delta_E t_n(x'_k, u) du \right| + C \frac{\ln n}{n} \\ &\leq \frac{\ln n}{n\sqrt{v}} + C \ln n \sum_{k=0}^n \mathbf{P}\{\bar{\Omega}_k\} + C \frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln n}{n^{2/3}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Автор выражает признательность проф. А.Н. Тихомирову и проф. Ф. Гётце за постановку задачи и полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series. — Amer. J. Math., 1965, v. 87, p. 695–708.
2. Bai Z. D. Methodologies in spectral analysis of large-dimensional random matrices, a review. — Statist. Sinica, 1999, v. 9, № 3, p. 611–677.
3. Götze F., Tikhomirov A. Rate of convergence to the semi-circular law. — Probab. Theory Related Fields, 2003, v. 127, № 2, p. 228–276.
4. Götze F., Tikhomirov A. Rate of convergence to the semi-circular law for the Gaussian unitary ensemble. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 2, с. 381–387.
5. Götze F., Tikhomirov A. The rate of convergence for spectra of GUE and LUE matrix ensemble. — Cent. Eur. J. Math., 2005, v. 3, № 4, p. 666–704 (electronic).
6. Mehta M. L. Random Matrices, 3 ed. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), v. 142. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2004, 708 p.

7. Pisier G. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces, Probability and analysis (Varenna, 1985). Lecture Notes in Math., v. 1206. Berlin: Springer-Verlag, 1986, p. 167–241.

Поступила в редакцию
13.VI.2006

© 2006 г.

ШЕВЦОВА И. Г.*

УТОЧНЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ АБСОЛЮТНОЙ ПОСТОЯННОЙ В НЕРАВЕНСТВЕ БЕРРИ–ЭССЕЕНА¹⁾

Для абсолютной константы в классическом неравенстве Берри–Эссеена для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные моменты третьего порядка, получена оценка $C \leq 0,7056$.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, нормальная аппроксимация, неравенство Берри–Эссеена, оценка скорости сходимости.

1. Постановка задачи и ее история. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 = 1. \quad (1)$$

$$\beta^3 \equiv \mathbf{E}|X_1|^3 < \infty. \quad (2)$$

Тогда, согласно неравенству Берри–Эссеена, для равномерного расстояния ρ между функцией распределения $F_n(x)$ нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ и стандартной нормальной функцией распределения $\Phi(x)$ справедлива оценка

$$\rho \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \cdot \varepsilon, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\beta^3}{\sqrt{n}},$$

а C — положительная абсолютная постоянная [9], [10]. История отыскания значения абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена интересна и богата результатами. Так, Э. Берри [9] утверждал, что $C \leq 1,88$, однако, как обнаружил позднее П. Л. Сюй [12], вычисления Берри содержали ошибку. К.-Г. Эссеен [10] показал, что $C \leq 7,59$. Х. Бергстрем [8] показал, что $C \leq 4,8$. К. Такано [14] получил оценку $C \leq 2,031$. По-видимому, работа Такано (опубликованная на японском языке) выпала из поля зрения некоторых исследователей, так как в нескольких более поздних публикациях приводятся немного худшие оценки. В частности, в работе [11] имеется упоминание о неопубликованных вычислениях, дающих $C \leq 2,9$. В работе Д. Л. Уоллеса [15] приведена оценка $C \leq 2,05$. В. Феллер [4], упоминая результат Уоллеса, также обходит вниманием работу Такано. Вычислению наименьшего возможного значения абсолютной постоянной C придавал большое значение А. Н. Колмогоров.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: irina_shevtsova@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 05-01-0039906, 05-07-90103.