Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, А. Н. Ширяев, Задачи об оптимальной остановке для броуновского движения с разладкой на отрезке, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 1, 193–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:41:52

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2013 г.

ЖИТЛУХИН М. В.^{*}, ШИРЯЕВ А. Н.^{**}

ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ДЛЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С РАЗЛАДКОЙ НА ОТРЕЗКЕ¹⁾

Рассматриваются задачи об оптимальной остановке броуновского движения и геометрического броуновского движения с «разладкой» в предположении, что момент разладки имеет равномерное распределение на отрезке. Оптимальные решающие правила находятся в виде моментов первого выхода некоторого марковского процесса (статистики Ширяева–Робертса) на криволинейные границы, которые задаются как решения интегральных уравнений.

Рассматриваемые задачи представляют интерес для финансовой математики и могут быть применены в вопросах выбора оптимального момента продажи акции при меняющемся тренде.

Ключевые слова и фразы: задачи об оптимальной остановке, задачи обнаружения разладки, статистика Ширяева–Робертса.

1. Введение.

1.1. В работе рассматриваются задачи об оптимальной остановке для броуновского движения с *разладкой* и его экспоненты (геометрического броуновского движения с разладкой). Под моментом появления разладки понимается неизвестный момент изменения коэффициента сноса данных процессов. Задачи заключаются в нахождении момента остановки, максимизирующего среднее значение остановленного процесса.

Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, заданное на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Предполагается, что наблюдению подлежит процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$, имеющий вид

$$X_t = \mu_1 t + (\mu_2 - \mu_1)(t - \theta)^+ + \sigma B_t,$$

или, в стохастических дифференциалах,

$$dX_t = [\mu_1 \mathbf{I}(t < \theta) + \mu_2 \mathbf{I}(t \geq \theta)] dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = 0,$$

где $\mu_1 > 0 > \mu_2$, $\sigma > 0$ — известные константы, а θ — ненаблюдаемый *момент разладки*, в который (локальный) коэффициент сноса процесса X меняет свое значение с μ_1 на μ_2 . Процесс X называется (линейным) *броуновским движением с разладкой*.

^{*} Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия и Манчестерский университет, Великобритания; e-mail: mikhailzh@mi.ras.ru

^{**} Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: albertsh@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании, МФТИ (грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0073) и РФФИ (грант № 11-01-00949_а). М. В. Житлухин также поддержан грантом РФФИ № 12-01-31449-мол_а.

Следуя байесовскому подходу, будем считать θ случайной величиной, определенной на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и независимой от B . В данной работе, имея в виду практические приложения (см. ниже), мы рассматриваем случай, когда θ *равномерно распределено* на конечном отрезке $[0, T]$, возможно с положительными вероятностями в точках $t = 0, T$, т.е. функция распределения $G(t) = \mathbf{P}(\theta \leq t)$ задана формулой

$$G(t) = G(0) + \rho t \quad \text{для } 0 \leq t < T, \quad G(T) = 1,$$

где $G(0) \in [0, 1]$ — вероятность того, что разладка присутствует с самого начала, и $0 < \rho \leq (1 - G(0))/T$ — плотность распределения θ . Вероятность $\mathbf{P}(\theta = T) = 1 - G(T-)$ может быть строго положительной.

Пусть $\mathfrak{M}_T$ обозначает класс всех моментов остановки $\tau \leq T$ наблюдаемого процесса X . Мы рассмотрим следующие две задачи об оптимальной остановке для X и его экспоненты (*геометрического броуновского движения с разладкой*):

$$V^{(l)} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbf{E} X_\tau, \quad V^{(g)} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbf{E} \exp \left(X_\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \right). \quad (1)$$

Задачи заключаются в нахождении величин $V^{(l)}, V^{(g)}$ и нахождении моментов остановки $\tau_*^{(l)}, \tau_*^{(g)}$, на которых достигаются супремумы (если такие моменты существуют). Верхний индекс (l) соответствует задаче для *линейного* броуновского движения, а индекс (g) — задаче для *геометрического* броуновского движения.

Заметим, что, интуитивно, процессы X_t и $\exp(X_t - \sigma^2 t/2)$ возрастают в среднем «до момента θ » и убывают в среднем «после момента θ ». Но так как θ не является моментом остановки, нельзя просто положить $\tau_* = \theta$, а необходимо принимать решение об остановке, основываясь на обнаружении разладки по результатам последовательного наблюдения за X .

Мы решим задачи (1), используя результаты, полученные в нашей недавней работе [1]. Главная идея заключается в их сведении к марковским задачам об оптимальной остановке с привлечением метода замены меры. Данный подход уже применялся ранее в литературе, но нам удалось распространить его на случай конечного отрезка времени.

1.2. Применительно к финансовой математике, рассматриваемые задачи связаны с вопросами выбора оптимального момента продажи некоторого актива (скажем, акции).

Будем предполагать, что цена акции моделируется геометрическим броуновским движением с разладкой $S = (S_t)_{t \geq 0}$:

$$S_t = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right),$$

или, эквивалентно,

$$dS_t = [\mu_1 \mathbf{I}(t < \theta) + \mu_2 \mathbf{I}(t \geq \theta)] S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 = 1,$$

где $\mu_1 > 0 > \mu_2$. Таким образом, цена изначально имеет положительный тренд, который затем меняется на отрицательный в неизвестный момент θ .

Пусть $t = 0$ соответствует «текущему» моменту времени, когда инвестор владеет акцией с положительным трендом. Обычно, используя фундаментальные экономические соображения, возможно предсказать, что к некоторому (может быть, достаточно отдаленному) времени T тренд сменится на отрицательный. Тогда возникает вопрос о выборе оптимального момента продажи акции с целью максимизации прибыли.

Если нет дополнительной информации о структуре распределения θ , то естественно предполагать, что θ равномерно распределено на $[0, T]$ (так как равномерное распределение обладает наибольшей энтропией на отрезке). Если интерпретировать величину $\mathbf{E} S_\tau$ как среднюю прибыль от продажи акции, то задача (1) для геометрического броуновского движения заключается в выборе оптимального момента продажи. Задачу для линейного броуновского движения можно трактовать как задачу

выбора оптимального момента продажи в предположении, что инвестор обладает *логарифмической функцией полезности*, т.е. максимизирует $\mathbf{E} \ln S_\tau$, что эквивалентно максимизации $\mathbf{E} X_\tau$ для $\mu'_1 = \mu_1 - \sigma^2/2$, $\mu'_2 = \mu_2 - \sigma^2/2$.

Интересное следствие из решения задач (1) заключается в качественном различии между *риск-нейтральными* инвесторами, максимизирующими $\mathbf{E} S_\tau$, и инвесторами, *не приемлющими риск*, которые максимизируют $\mathbf{E} \ln S_\tau$: если $\mathbf{P}(\theta < T) = 1$ (т.е. $G(T-) = 1$), то риск-нейтральный инвестор продаст акцию строго до момента T с вероятностью 1 ($\mathbf{P}(\tau_*^{(g)} < T) = 1$), однако инвестор, не приемлющий риск, с положительной вероятностью будет ждать до момента T ($\mathbf{P}(\tau_*^{(l)} < T) < 1$) — см. теорему в разделе 2 и замечание 1 к ней.

1.3. Задачи (1) рассматривались в работах [5], [10], [6] в предположении, что момент разладки θ имеет экспоненциальное распределение. В работе [5] была решена задача для геометрического броуновского движения, когда оптимальный момент ищется в классе всех моментов остановки процесса S (в том числе неограниченных). Было доказано, что если μ_1, μ_2, σ удовлетворяют некоторому соотношению, то оптимальным моментом остановки является момент первого выхода *процесса апостериорных вероятностей* $\pi_t = \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^X)$, где $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$, на некоторый уровень. Впоследствии данный результат был распространен на все значения μ_1, μ_2, σ и оптимальный уровень был найден явно (см. [6]). В работе [10] изучалась задача для линейного броуновского движения, когда требуется выбрать оптимальный момент остановки на конечном отрезке $[0, T]$, но в предположении, что θ экспоненциально распределено (т.е. разладка может и не произойти до момента T). Как оказалось, данная задача эквивалентна стандартной байесовской постановке задачи о разладке, где требуется минимизировать вероятность ложной тревоги и среднее время запаздывания (см., например, [3], [4], [8]). Авторы работы [10] также кратко обсуждают задачу об оптимальной остановке геометрического броуновского движения с разладкой, но не находят явного решения.

2. Основной результат.

2.1. Пусть $\mu = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$ задает *отношение сигнала к шуму*. Для удобства обозначений определим процесс $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, $\tilde{X}_t = (X_t - \mu_1 t)/\sigma$, который является броуновским движением с единичным коэффициентом диффузии и коэффициентом сноса, меняющим в момент θ свое значение с нулевого на $(-\mu)$.

Введем *статистику Ширяева–Робертса*²⁾ $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$:

$$\psi_t = \exp \left(-\mu \tilde{X}_t - \frac{1}{2} \mu^2 t \right) \left(\psi_0 + \rho \int_0^t \exp \left(\mu \tilde{X}_s + \frac{1}{2} \mu^2 s \right) ds \right), \quad (2)$$

где $\psi_0 = G(0)$. Применяя формулу Ито, несложно видеть, что ψ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\psi_t = \rho dt - \mu \psi_t d\tilde{X}_t. \quad (3)$$

На измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T^X)$, $\mathcal{F}_T^X = \sigma(X_t; t \leq T)$, определим вероятностные меры $\mathbf{P}^{(l)}$ и $\mathbf{P}^{(g)}$ такие, что $\tilde{X}_t$ является стандартным броуновским движением относительно $\mathbf{P}^{(l)}$, а $(\tilde{X}_t - \sigma t)$ является стандартным броуновским движением относительно $\mathbf{P}^{(g)}$. Эти меры будут использоваться для решения задач $V^{(l)}$ и $V^{(g)}$ соответственно. Хорошо известно (см., например, [2, гл. 7]), что $\mathbf{P}^{(l)}$ и $\mathbf{P}^{(g)}$ эквивалентны на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T^X)$. Отметим, что для меры $\mathbf{P}^{(l)}$ часто используется обозначение $\mathbf{P}^\infty$, подчеркивающее, что она соответствует отсутствию разладки (т.е. случаю, когда разладка «происходит» в момент $t = \infty$).

²⁾ В общем случае статистика Ширяева–Робертса определяется формулой $\psi_t = (d\mathbf{P}_t^0/d\mathbf{P}_t^\infty) \int_0^t (d\mathbf{P}_s^\infty/d\mathbf{P}_s^0) dG(s)$, где $\mathbf{P}_t^s = \mathbf{P}^s | \mathcal{F}_t^X$ для мер $\mathbf{P}^0$ или $\mathbf{P}^\infty$, соответствующих тому, что разладка происходит в момент $t = 0$ или не происходит вовсе (см. подробнее [1] и доказательство леммы в разделе 3).

Для произвольного $x \geq 0$ символами $\mathbf{E}_x^{(l)}[\cdot]$ и $\mathbf{E}_x^{(g)}[\cdot]$ будем обозначать математические ожидания функционалов процесса $(\psi_t)_{t \geq 0}$, заданного формулами (2)–(3) с начальным условием $\psi_0 = x$, в случаях, когда $\tilde{X}$ является соответственно стандартным броуновским движением или броуновским движением со сносом σ . Для краткости вместо $\mathbf{E}_{G(0)}^{(l)}[\cdot]$ и $\mathbf{E}_{G(0)}^{(g)}[\cdot]$ будем писать просто $\mathbf{E}^{(l)}[\cdot]$ и $\mathbf{E}^{(g)}[\cdot]$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Оптимальными моментами остановки в задачах $V^{(l)}$ и $V^{(g)}$ являются*

$$\begin{aligned}\tau_*^{(l)} &= \inf \left\{ t \geq 0: \psi_t \geq a^{(l)}(t) \right\} \wedge T, \\ \tau_*^{(g)} &= \inf \left\{ t \geq 0: \psi_t \geq a^{(g)}(t) \right\} \wedge T,\end{aligned}$$

где $a^{(l)}(t)$ и $a^{(g)}(t)$ — неубывающие функции на $[0, T]$, являющиеся единственными решениями интегральных уравнений ($t \in [0, T]$)

$$\int_0^{T-t} \mathbf{E}_{a^{(l)}(t)}^{(l)} \left[\left(\mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)\psi_s \right) \mathbf{I}\{\psi_s < a^{(l)}(t+s)\} \right] ds = 0, \quad (4)$$

$$\int_0^{T-t} \mathbf{E}_{a^{(g)}(t)}^{(g)} \left[e^{\mu_1 s} \left(\mu_1 (1 - G(t+s)) - |\mu_2| \psi_s \right) \mathbf{I}\{\psi_s < a^{(g)}(t+s)\} \right] ds = 0 \quad (5)$$

в классе непрерывных ограниченных функций на $[0, T]$, удовлетворяющих условиям

$$a^{(l)}(t) \geq \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \quad \text{при } t \in [0, T), \quad a^{(l)}(T) = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (6)$$

$$a^{(g)}(t) \geq \frac{\mu_1}{|\mu_2|} (1 - G(t)) \quad \text{при } t \in [0, T), \quad a^{(g)}(T) = \frac{\mu_1}{|\mu_2|} (1 - G(T-)). \quad (7)$$

Значения $V^{(l)}$ и $V^{(g)}$ могут быть найдены по формулам

$$V^{(l)} = \int_0^T \mathbf{E}^{(l)} \left[\left(\mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)\psi_s \right) \mathbf{I}\{\psi_s < a^{(l)}(s)\} \right] ds, \quad (8)$$

$$V^{(g)} = 1 + \int_0^T \mathbf{E}^{(g)} \left[e^{\mu_1 s} \left(\mu_1 (1 - G(s)) - |\mu_2| \psi_s \right) \mathbf{I}\{\psi_s < a^{(g)}(s)\} \right] ds. \quad (9)$$

З а м е ч а н и е 1. Относительно различия между риск-нейтральными инвесторами и инвесторами, не приемлющими риск, упомянутого в разделе 1, заметим, что если $G(T-) = 1$, то $\mathbf{P}(\tau_*^{(g)} < T) = 1$, так как $a^{(g)}(T) = 0$, но $\mathbf{P}(\tau_*^{(l)} < T) < 1$, так как $a^{(l)}(T) > 0$ (в последнем случае можно проверить, что процесс ψ остается ниже границы $a^{(l)}(t)$ на всем отрезке $[0, T]$ с положительной вероятностью).

З а м е ч а н и е 2. В работах [5], [10], [6] решения задач (1), когда θ экспоненциально распределено, даются в терминах процесса апостериорных вероятностей $\pi_t = \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^X)$. Используя формулу Байеса, устанавливается, что процессы π и ψ связаны соотношением $\psi_t = \pi_t(1 - G(t))/(1 - \pi_t)$ (см. [1]). Следовательно, моменты $\tau_*^{(l)}$ и $\tau_*^{(g)}$ могут быть также представлены как моменты первого выхода процесса π на некоторые криволинейные границы. Мы предпочитаем работать с процессом ψ , так как он имеет более простой вид, чем π , в случае, когда θ равномерно распределено.

2.2. Уравнения (4), (5) можно решить численно *индукцией назад*: зафиксировав разбиение $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ отрезка $[0, T]$, последовательно находим значения $a(t_n), a(t_{n-1}), \dots, a(t_0)$. Значение $a(T)$ находится из условий (6) или (7) соответственно. Найдя $a(t_k), a(t_{k+1}), \dots, a(t_n)$ и численно вычисляя интеграл (4) или (5) для $t = t_{k-1}$ по значениям подынтегральной функции в точках $t_{k-1}, t_k, \dots, t_n$, получаем алгебраическое уравнение, из которого находим значение $a(t_{k-1})$. Повторяя данную процедуру, можно найти значение $a(t)$ в каждой точке разбиения.

Для вычисления математических ожиданий в (4), (5), (8), (9) можно применять метод Монте-Карло или воспользоваться явной формулой для переходной плотности процесса ψ (см., например, [1], где она была получена из совместного закона распределения экспоненты броуновского движения и его интеграла, найденного в [9]).

В качестве примера численного решения уравнений (4), (5) на рис. 1 приведены оптимальные границы остановки для значений параметров $T = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\sigma = 1$, $G(t) = t$ при $0 \leq t \leq 1$.

Рис. 1. Оптимальные границы остановки в задачах $V^{(l)}$ (слева) и $V^{(g)}$ (справа) для значений $T = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\sigma = 1$, $\mathbf{P}(\theta \leq t) = t$ при $t \leq 1$.

3. Доказательство теоремы.³⁾

3.1. Для доказательства теоремы мы сперва сведем задачи $V^{(l)}$ и $V^{(g)}$ к задачам об оптимальной остановке для процесса ψ , а затем применим общий результат из приложения, доказанный в работе [1]. Метод основан на идеях работ [5], [7], [8].

Лемма. *Справедливы следующие соотношения:*

$$V^{(l)} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbf{E}^{(l)} \int_0^\tau (\mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)\psi_s) ds,$$

$$V^{(g)} = 1 + \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbf{E}^{(g)} \int_0^\tau e^{\mu_1 s} [\mu_1(1 - G(s)) - |\mu_2|\psi_s] ds.$$

Супремум в каждом равенстве достигается на моменте остановки, являющемся оптимальным в соответствующей задаче (1).

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого момента остановки $\tau \in \mathfrak{M}_T$

$$\mathbf{E} X_\tau = \mathbf{E}^{(l)} \int_0^\tau (\mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)\psi_s) ds, \quad (10)$$

$$\mathbf{E} \exp\left(X_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right) = 1 + \mathbf{E}^{(g)} \int_0^\tau e^{\mu_1 s} [\mu_1(1 - G(s)) - |\mu_2|\psi_s] ds. \quad (11)$$

На измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T^X)$ определим семейство вероятностных мер $(\mathbf{P}^u)_{0 \leq u \leq T}$ таких, что относительно $\mathbf{P}^u$ разладка происходит в фиксированный момент времени u , т.е. для каждого $0 \leq u \leq T$ процесс X допускает представление $X_t = \mu_1 t + (\mu_2 - \mu_1)(t - u)^+ + \sigma B_t^{(u)}$ со стандартным броуновским движением $B^{(u)}$ по мере $\mathbf{P}^u$. Символом $\mathbf{E}^u[\cdot]$ будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}^u$, а символы $\mathbf{P}_t$, $\mathbf{P}_t^u$, $\mathbf{P}_t^{(l)}$, $\mathbf{P}_t^{(g)}$ будем использовать для обозначения сужений соответствующих мер на σ -алгебры $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$, $0 \leq t \leq T$.

Докажем (10). Так как броуновское движение B является мартингалом с нулевым средним, то

$$\mathbf{E} X_\tau = \mathbf{E} [\mu_1 \tau + (\mu_2 - \mu_1)(\tau - \theta)^+]. \quad (12)$$

³⁾ Доказательство получено М. В. Житлухиным.

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\mathbf{E}(\tau - \theta)^+ = \int_0^T \mathbf{E}^u[(\tau - u) \mathbf{I}(\tau > u)] dG(u). \quad (13)$$

Заметим, что для любого $0 \leq u \leq T$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^u[(\tau - u) \mathbf{I}(\tau > u)] &= \int_u^T \mathbf{E}^u \mathbf{I}(s \leq \tau) ds \\ &= \int_u^T \mathbf{E}^{(l)} \left[\exp \left(-\mu(\tilde{X}_s - \tilde{X}_u) - \frac{1}{2} \mu^2(s - u) \right) \mathbf{I}(s \leq \tau) \right] ds, \end{aligned} \quad (14)$$

где мы воспользовались тем, что $\mathbf{I}(s \leq \tau)$ является $\mathcal{F}_s^X$ -измеримой случайной величиной и

$$\frac{d\mathbf{P}_s^u}{d\mathbf{P}_s^{(l)}} = \exp \left(-\mu(\tilde{X}_s - \tilde{X}_u) - \frac{1}{2} \mu^2(s - u) \right)$$

(явная формула плотности меры, порождаемой одним процессом Ито, по мере, порождаемой другим процессом Ито, содержится, например, в [2]). Из (13) и (14), меняя порядок интегрирования, находим

$$\mathbf{E}(\tau - \theta)^+ = \mathbf{E}^{(l)} \int_0^\tau \int_0^s \exp \left(-\mu(\tilde{X}_s - \tilde{X}_u) - \frac{1}{2} \mu^2(s - u) \right) dG(u) ds = \mathbf{E}^{(l)} \int_0^\tau \psi_s ds.$$

Используя (12), получаем представление (10).

Докажем (11). Имеем

$$\frac{d\mathbf{P}_t^s}{d\mathbf{P}_t^{(g)}} = \begin{cases} \exp \left(-\sigma \tilde{X}_t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \exp \left(-\mu(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s) - \frac{1}{2} \mu^2(t - s) \right), & s \leq t, \\ \exp \left(-\sigma \tilde{X}_t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right), & s > t, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_t}{d\mathbf{P}_t^{(g)}} &= \int_0^T \frac{d\mathbf{P}_t^s}{d\mathbf{P}_t^{(g)}} dG(s) \\ &= \exp \left(-\sigma \tilde{X}_t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \\ &\quad \times \left(\int_0^t \exp \left(-\mu(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s) - \frac{1}{2} \mu^2(t - s) \right) dG(s) + 1 - G(t) \right) \\ &= \exp \left(-\sigma \tilde{X}_t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) (\psi_t + 1 - G(t)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left(X_\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \right) &= \mathbf{E}^{(g)} \left(\frac{d\mathbf{P}_\tau}{d\mathbf{P}_\tau^{(g)}} \exp \left(X_\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \right) \right) \\ &= \mathbf{E}^{(g)} \left[e^{\mu_1 \tau} (\psi_\tau + 1 - G(\tau)) \right]. \end{aligned}$$

Применяя формулу Ито, получаем

$$\begin{aligned} &e^{\mu_1 \tau} (\psi_\tau + 1 - G(\tau)) \\ &= 1 + \int_0^\tau e^{\mu_1 s} \left[\mu_2 \psi_s + \mu_1 (1 - G(s)) \right] ds + \mu \int_0^\tau \psi_s d(\tilde{X}_s - \sigma s). \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание $\mathbf{E}^{(g)}[\cdot]$ левой и правой частей равенства, и воспользовавшись тем, что $(\tilde{X}_s - \sigma s)$ является стандартным броуновским движением по мере $\mathbf{P}^{(g)}$ и, следовательно, математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю, получаем (11).

Лемма доказана.

3.2. Теперь доказательство теоремы следует из предложения, приведенного в приложении. Для задачи $V^{(l)}$ мы пользуемся тем, что процесс ψ удовлетворяет уравнению (3) с $\tilde{X}$, являющимся броуновским движением по мере $\mathbf{P}^{(l)}$, а для задачи $V^{(g)}$ используем представление ψ с помощью уравнения

$$d\psi_t = \left(\rho - (\mu_1 - \mu_2)\psi_t \right) dt - \mu\psi_t d(\tilde{X}_t - \sigma t) \quad (15)$$

с броуновским движением $(\tilde{X}_t - \sigma t)$ по мере $\mathbf{P}^{(g)}$.

4. Приложение. Вспомогательная задача об оптимальной остановке.

Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, а $\psi = (\psi_s)_{s \geq 0}$ — случайный процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению (ср. с (3), (15))

$$d\psi_s = (\rho + b\psi_s) ds - \mu\psi_s dB_s, \quad (16)$$

где $b, \mu \in \mathbf{R}$ и $\rho > 0$.

Рассмотрим задачу об оптимальной остановке, заключающуюся в нахождении величины

$$V = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} \int_0^\tau e^{\lambda s} (f(s) - \psi_s) ds, \quad (17)$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$, а $f(s)$ — невозрастающая и ограниченная функция, являющаяся непрерывной и строго положительной на $[0, T)$. Супремум в (17) берется по всем моментам остановки τ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющим условию $\tau \leq T$ п.н.

Для произвольного $x \geq 0$ символ $\mathbf{E}_x[\cdot]$ будет обозначать математическое ожидание функционалов процесса $(\psi_t)_{t \geq 0}$, задаваемого уравнением (16) с начальным условием $\psi_0 = x$.

Следующий результат был доказан в работе [1].

Предложение. *Оптимальным моментом остановки в задаче (17) является*

$$\tau_* = \inf\{t \geq 0: \psi_t \geq a(t)\} \wedge T,$$

где $a(t)$ — неубывающая функция на $[0, T]$, являющаяся единственным решением интегрального уравнения ($t \in [0, T]$)

$$\int_0^{1-T} \mathbf{E}_{a(t)} \left[e^{\lambda s} (f(t+s) - \psi_s) \mathbf{I}\{\psi_s < a(t+s)\} \right] ds = 0$$

в классе непрерывных ограниченных функций на $[0, T)$, удовлетворяющих условиям

$$a(t) \geq f(t) \quad \text{при } t \in [0, T), \quad a(T) = f(T-).$$

Величина V находится по формуле

$$V = \int_0^T \mathbf{E}_{\psi_0} \left[e^{\lambda s} (\psi_s - f(s)) \mathbf{I}\{\psi_s < a(s)\} \right] ds.$$

Авторы признательны профессору Х. Р. Лерхе и А. А. Левинскому за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Житмухин М. В., Ширяев А. Н. Байесовские задачи о разладке на фильтрованных вероятностных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 453–470.

2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
3. Ширяев А. Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 1, с. 26–51.
4. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
5. Beibel M., Lerche H. R. A new look at optimal stopping problems related to mathematical finance. — Statist. Sinica, 1997, v. 7, № 1, p. 93–108.
6. Ekström E., Lindberg C. Optimal closing of a momentum trade. — J. Appl. Probab. (to appear).
7. Feinberg E. A., Shiryaev A. N. Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings. — Statist. Decisions, 2006, v. 24, № 4, p. 445–470.
8. Gapeev P. V., Peskir G. The Wiener disorder problem with finite horizon. — Stochastic Process. Appl., 2006, v. 116, № 12, p. 1770–1791.
9. Matsumoto H., Yor M. Exponential functionals of Brownian motion. I: Probability laws at fixed time. — Probab. Surv., 2005, v. 2, p. 312–347.
10. Shiryaev A., Novikov A. A. On a stochastic version of the trading rule «Buy and Hold». — Statist. Decisions, 2008, v. 26, № 4, p. 289–302.

Поступила в редакцию
13.XII.2012

© 2013 г.

ШУР М. Г.*

ДВЕ ТЕОРЕМЫ, КАСАЮЩИЕСЯ ПАРАМЕТРА СХОДИМОСТИ НЕПРИВОДИМОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Рассматривается однородная неприводимая цепь Маркова X с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{B})$ и переходным оператором P , действующим в пространстве ограниченных снизу измеримых функций, причем σ -алгебра $\mathcal{B}$ считается счетнопорожденной. Доказывается, что если эта цепь апериодична, а какие-либо функция f и мера ν малы для нее, то $[\nu(P^n f)]^{1/n} \rightarrow R$ при $n \rightarrow \infty$, где R — ее параметр сходимости. Для периодических цепей Маркова это утверждение модифицируется соответствующим образом. Если же цепь X симметрична относительно некоторой σ -конечной меры π , то $R = \|\tilde{P}\|^{-1}$, где $\tilde{P}$ — ограниченный самосопряженный оператор, порожденный P и действующий в пространстве $L_2(\pi)$. Результаты работы развивают приведенные в [4] и [5].

Ключевые слова и фразы: неприводимая цепь Маркова, симметричная цепь Маркова, параметр сходимости.

1. В этой заметке, дополняющей работы [4] и [5], приведены теоремы 1 и 2, связанные с важнейшей характеристикой неприводимой цепи Маркова — ее параметром сходимости. По поводу терминологии см. монографию [1].

Далее под X подразумевается некоторая однородная цепь Маркова $X = \{X_n; n \geq 0\}$ с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{B})$, стохастической переходной вероятностью $p(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$, и переходным оператором P , действующим в пространстве $\mathcal{D}$ ограниченных снизу $\mathcal{B}$ -измеримых функций. В теореме 1, постулировав неприводимость и апериодичность X , мы при широких условиях устанавливаем равенство

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{[\nu(P^n f)]^{1/n}\}, \quad (1)$$

* Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия.